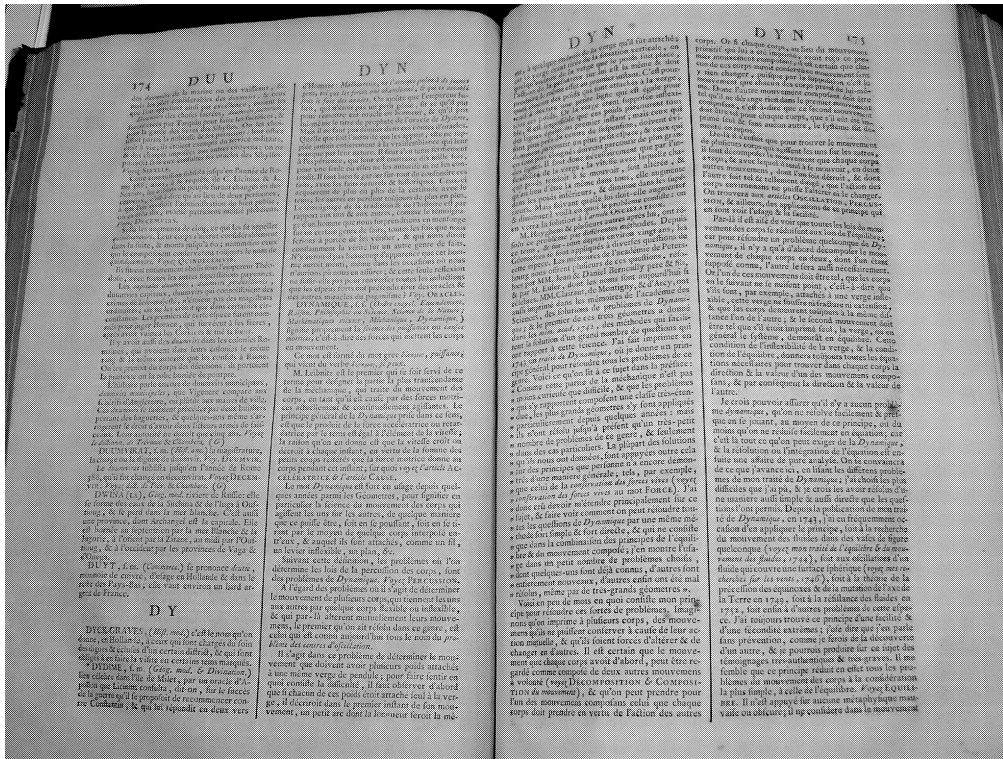


物理学概論 II

—電磁気学の部分—



「百科全書（初版）」Dynamique（動力学）の頁（高知大学附属図書館蔵）

高知大学理学部理学科物理科学

津江保彦*

目次

1章 数学的準備—ベクトル解析の初歩—	2
§1.1 勾配・発散・回転	2
§§1.1.1 スカラー場の勾配	2
§§1.1.2 発散と回転	2
§1.2 ベクトル場の積分定理	4
§§1.2.1 ガウスの定理	4
§§1.2.2 ストークスの定理	5
2章 電磁気学の基本法則	8
§2.1 真空中のマクスウェル方程式	8
§§2.1.1 電荷に関するクーロンの法則	8
§§2.1.2 単磁化の非存在	9
§§2.1.3 マクスウェルアンペールの法則	9
§§2.1.4 ファラデーの電磁誘導の法則	11
§§2.1.5 幾つかの注意	11
§2.2 物質中での Maxwell 方程式	13
§§2.2.1 誘電分極	13
§§2.2.2 磁化	14
§2.3 スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャル	15
3章 マクスウェル方程式からの帰結	17
§3.1 静電場	17
§§3.1.1 電位	17
§§3.1.2 導体	17
§§3.1.3 コンデンサ	19
§3.2 定常電流と磁場	21
§§3.2.1 オームの法則	21
§§3.2.2 ジュール熱	23
§§3.2.3 コイルが作る磁場	24
§§3.2.4 ビオ・サバールの法則	24
§3.3 電磁誘導	26
§§3.3.1 相互誘導・自己誘導	26
§§3.3.2 ソレノイドに蓄えられるエネルギー	26
§§3.3.3 LCR 回路	27
4章 電磁波	28
§4.1 電磁波	28
§4.2 電磁波の進行方向	29
§4.3 電磁場のエネルギー	30

5章特殊相対性理論	31
§5.1 アインシュタインの特殊相対性原理と光速不変の原理	31
§5.2 光速不変の原理と同時刻の相対性	31
§5.3 ローレンツ変換	32
§5.4 ローレンツ変換からの帰結	35
§§5.4.1 動いている慣性系の時間の遅れ	35
§§5.4.2 ローレンツ収縮	36
§§5.4.3 速度の合成則	37
§5.5 質量とエネルギーの等価性	38
§5.6 重力場による時間の遅れ	39
§§5.6.1 重力場による時間の遅れ	39
§§5.6.2 応用例：GPS衛星	41

1章 数学的準備—ベクトル解析の初歩—

基本的な古典電磁気学について述べることにする。真空中でのマクスウェル方程式から種々の現象を導きたいのであるが、必要な数学のうち、頻出するガウスの定理とストークスの定理を述べる必要があると思われるので、まずは記載しておこう。

§1.1 勾配・発散・回転

§§1.1.1 スカラー場の勾配

まず、スカラー場、ベクトル場の微分を考えておこう。3次元空間で考えていこう。空間にある数が分布しているとしよう。これらは場所 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数と見なされるので、 $\varphi(\mathbf{r})$ と表わそう。これをスカラー関数と呼ぶ。この関数は、 x, y, z の3変数に依存するので、偏導関数は、 $\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial z}$ の3つ存在する。これらを纏めて、

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

と記す。すなわち、偏微分により、スカラー場 $\varphi(\mathbf{r})$ からあらたにベクトル場が作られることになる。ここで、 ∇ は偏微分記号を並べて作った“ベクトル演算子”であり、ナブラと読む：

$$\nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

また、grad はグラジエントと呼ばれ、勾配を意味する。

今、値の等しい等位面、すなわち $\varphi(\mathbf{r}) = \text{一定}$ が成り立つ面が存在するとしよう。このとき、 \mathbf{r} の近傍 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ で φ の値は等しいので、 $\varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$ が成り立っている。左辺をテーラー展開すると

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &\approx \varphi(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial z} dz \right) \\ &= \varphi(\mathbf{r}) + \nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

が得られるが、等位面ではこれが $\varphi(\mathbf{r})$ に等しいことから、

$$\nabla\varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が得られる。すなわち、勾配 $\nabla\varphi(\mathbf{r})$ から作られるベクトル場は、もとのスカラー場の等位面上のベクトル $d\mathbf{r}$ に直交していることがわかる。すなわち、勾配の方向は等位面に直交する方向であることがわかる。

§§1.1.2 発散と回転

次に、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r}))$ を考えよう。微分演算子 ∇ とベクトル場は、形式的に内積・外積の双方を考えることができる。もちろん、微分記号は微分されるべき関数の左に置かれる。

まず、内積を考えよう。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z} \equiv \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

ここで、div はダイバージェンスと読み、**発散**を意味する。

次に、外積を考える。

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \equiv \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

ここで、rot はローテーションと読み、**回転**を意味する。

発散と回転の物理的意味を見ておこう。図1のような2つのベクトル場

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えてみる。図1からわかるように、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は原点を中心に x - y 面で渦を巻いている場であり、ベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は x - y 面上に原点近傍から湧き出しているベクトル場である。このとき、発散、回転を計算すると

$$\text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

$$\text{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2 \neq 0, \quad \text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる。このように、渦を巻くのみで湧き出しのないベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対しては、回転は零でないが、発散は零となる。湧き出しのみあり、渦の無いベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ では、回転は零であるが発散は零でない。このよ

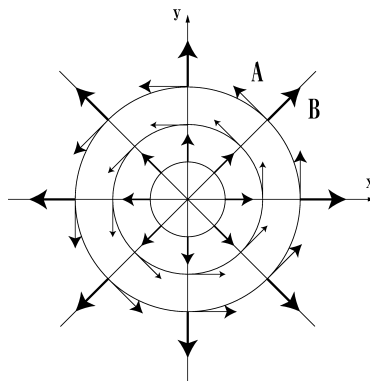


図 1:

うに、発散はベクトル場の湧き出し（または吸い込み）を、回転はベクトル場の渦（回転）を特徴的に捉えるものと見て良からう。

最後に、勾配、発散、回転の絡む有用な式を幾つか挙げておこう。 ϕ をスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} をベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ として、

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \phi) &\equiv \text{rot grad } \phi = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &\equiv \text{div rot } \mathbf{A} = 0 \\ \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \\ \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \\ \text{rot rot } \mathbf{A} &\equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}\end{aligned}$$

ここで、

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義されている。

§ 1.2 ベクトル場の積分定理

§§1.2.1 ガウスの定理

3次元ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ が存在しているとき、3次元の領域 V とその表面 S に関して、

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) dS \quad (1.2)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ は領域 V の表面 S の各点で定義される、面 S に垂直な大きさ1の単位ベクトルであり、法線ベクトルと呼ばれる。また、 dV は領域 V 内の微小体積、 dS は表面 S 上の微小面積である。上記の等式をガウスの定理と呼ぶ。証明は以下のとおりである。

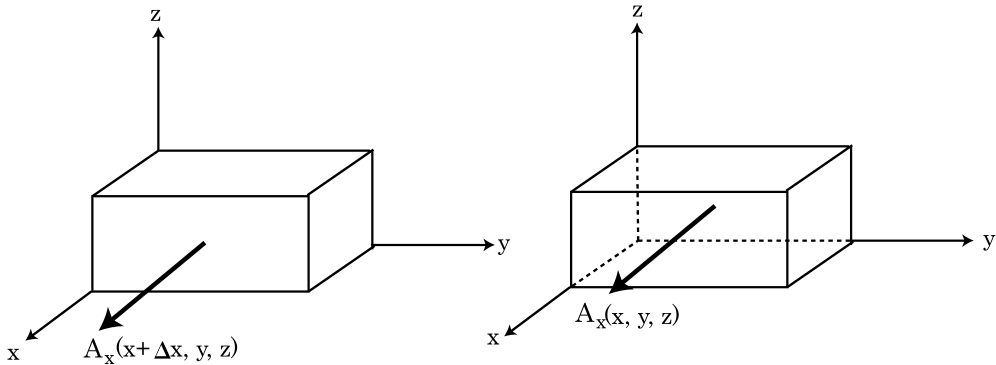


図 2:

図2のように、領域 V 中の微小な直方体を考える。 x 軸に垂直な面について、手前の面 $x + \Delta x$ に垂直な面上でのベクトル \mathbf{A} の x 成分は $A_x(x + \Delta x, y, z)$ で代表させよう。奥の面は、 $A_x(x, y, z)$ をとる。このとき、面積 $\Delta y \Delta z$ を掛けて

$$\begin{aligned} A_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - A_x(x, y, z) \Delta y \Delta z &= \left(\frac{A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z)}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

と、左辺は微分で表わされる。左辺と右辺を入れ替えて積分にして表記すれば、

$$\iiint_{\Delta V} \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\Delta S(y-z \text{ 面})} A_x(x, y, z) n_x(x, y, z) dy dz$$

と表わされる。ここで、法線ベクトル \mathbf{n} は $n_x(x + \Delta x, y, z) = 1$ 、 $n_x(x, y, z) = -1$ となる。同様に、 y 軸、 z 軸に垂直な面についても考えると、

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta V} \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} dx dy dz &= \iint_{\Delta S(z-x \text{ 面})} A_y(x, y, z) n_y dz dx \\ \iiint_{\Delta V} \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\Delta S(x-y \text{ 面})} A_z(x, y, z) n_z dx dy \end{aligned}$$

が得られる。3つの式の辺々を足すと、

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Delta V} \left(\frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \right) dx dy dz \\ &= \iint_{\Delta S} (A_x(x, y, z) n_x dy dz + A_y(x, y, z) n_y dz dx + A_z(x, y, z) n_z dx dy) \end{aligned}$$

となるので、

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \iint_{\Delta S} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (dV = dx dy dz)$$

という式が得られる。次に有限の体積を考える。領域 V を微小な領域 ΔV_i の和であると考えれば、体積素片 ΔV_i と隣の体積素片領域の接する面では法線ベクトルの向きが正反対であるので、考えている表面積分 (ΔS_i) は互いに打ち消しあうので、

$$\sum_i \iint_{\Delta S_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

が得られる。一方、体積積分は微小な体積素片 ΔV_i すべての寄与が足されるので、

$$\sum_i \iiint_{\Delta V_i} \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$$

となる。以上より、(1.2) 式のガウスの定理が証明された。

§§1.2.2 ストークスの定理

閉曲線 C に関するベクトル場 \mathbf{A} の線積分

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

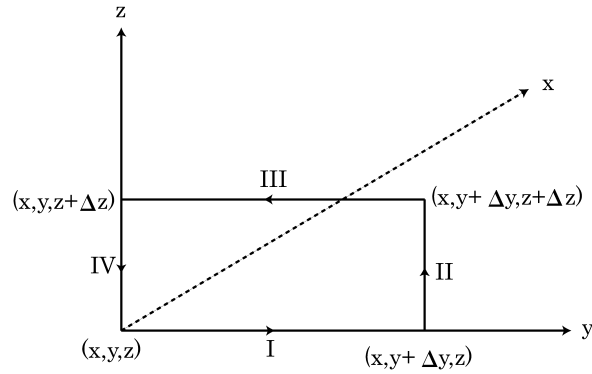


図 3:

を、**循環**と呼ぶ。循環が、閉曲線 C を境界にもつ面 S についての面積分で表わされるという定理が**ストークスの定理**である。定理は以下のものである。

$$\oint_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}dS$$

証明は以下の通りである。

図 3 の様に微小な矩形を考える。この矩形でベクトル場 \mathbf{A} に関する循環は、

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_I A_y dy + \int_{II} A_z dz + \int_{III} A_y dy + \int_{IV} A_z dz \\ &= A_y(x, y, z)\Delta y + A_z(x, y + \Delta y, z)\Delta z - A_y(x, y, z + \Delta z)\Delta y - A_z(x, y, z)\Delta z \\ &= -\left(\frac{A_y(x, y, z + \Delta z) - A_y(x, y, z)}{\Delta z}\right)\Delta y\Delta z + \left(\frac{A_z(x, y + \Delta y, z) - A_z(x, y, z)}{\Delta y}\right)\Delta y\Delta z \\ &= -\frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial z}\Delta y\Delta z + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y}\Delta y\Delta z = \left(\frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z \\ &= (\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}))_x \Delta y\Delta z = \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\Delta y\Delta z \\ &= \iint_{\Delta S} \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS \end{aligned}$$

のように変形される。ここで、1行目は \mathbf{A} と \mathbf{r} の内積をとり、1行目から2行目へは積分の方向に注意して正負の符号が決まっている。また、積分路 I では、積分路中の点 (x, y, z) でベクトルの値を代表させ、同様に積分路 II、III、IV ではそれぞれの積分路中の点 $(x, y + \Delta y, z)$ 、 $(x, y, z + \Delta z)$ 、 (x, y, z) でベクトルの値を代表させた。3行目から4行目へは矩形が微小であるので、差を微分で表わし、4行目から5行目へはベクトル場の回転の定義を用いて、これが $(\Delta y, \Delta z)$ 面に垂直な法線ベクトル $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ との内積で表わされることに注意した。最後の行は矩形の面積積分の形にしておいた。

有限な領域 S を考え、これを微小な矩形 ΔS_i に分割しておき、すべての矩形について和をとると、

$$\sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \iint_{\Delta S_i} \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}dS$$

となる。ここで、左辺の和は、隣り合う矩形領域ではそれぞれの循環の線積分方向が正反対で積分が打ち消しあうので、

$$\sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

となる。一方、右辺の矩形の面積分は、すべて和として寄与するので、

$$\sum_i \iint_{S_i} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。こうして、ストークスの定理が成り立つことが示された。

2章 電磁気学の基本法則

§2.1 真空中のマクスウェル方程式

電磁気学の基礎方程式はマクスウェル方程式と呼ばれる。幾つかの実験事実から、この基礎方程式系が導かれるのであるが、ここでは順序を逆にして、電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式を与えておいて、確かに実験事実が再現されることを見る。

電磁相互作用の強さは粒子の持つ電荷 q により与えられる。観測される粒子の電荷は、素電荷 e [†] の整数倍に量子化されている[‡]。電荷には、正、負の両方が存在する。また、荷電粒子の流れが電流となる。

速度 \mathbf{v} で運動する電荷 q の荷電粒子にはローレンツ力 $\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ が働く。ここで、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} はそれぞれ、電場、磁束密度である。荷電粒子に働く力のうち、速度に依存しない部分から電場を、速度に依存する部分から磁束密度を定義したと考えればよい。

真空中に電荷や電流が、時間・空間の分布として与えられていると、これらにより、電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} が決定される。電場 \mathbf{E} から電束密度 \mathbf{D} を、また磁束密度 \mathbf{B} から磁場 \mathbf{H} を

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

により定義する。ここで、 ϵ_0 、 μ_0 は真空中の誘電率、及び透磁率であり、光速を c として、 $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ の関係がある。電磁場の基方程式であるマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x}), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x})}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

である。ここで、 $\rho(\mathbf{x})$ は電荷密度、 $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ は電流密度である。また、荷電粒子に働くローレンツ力は

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

である。これらが基本となる方程式系であり、これをもとにして考察していこう。

§§2.1.1 電荷に関するクーロンの法則

電荷 Q を持った点粒子が、真空中で原点に存在しているとしよう。マクスウェル方程式で

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t)$$

であるが、今は時間 t に依存しない。点電荷が原点にあるとして、点電荷（原点）を含む半径 r の球で積分すると

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}) dV$$

[†]後に単位が決定されるが、ここで用いられる単位系で $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C] である。

[‡]基本粒子であるクォークの電荷は、 $\frac{2}{3}e$ や $-\frac{1}{3}e$ などという分数電荷を持つ。

となる。点状の電荷が原点に置かれているので、生じる電場に特別な方向性は無く、球対称として良い。左辺はガウスの定理から、半径 r の球面での積分に置き換えられ、

$$\begin{aligned} \iiint \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV &= \iint \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。ここで、原点からの距離 r での電場の大きさは一定であり、向きは外向き \mathbf{e}_r とした。表面積は $4\pi r^2$ である。一方、右辺は電荷密度の体積積分であり、電荷は原点に Q のみ存在するので積分は Q を与える。こうして

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

を得る。こうして、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

となる。こうして、静止した点電荷が作る電場は、距離の 2 乗に反比例し、大きさは点電荷の大きさに比例することがわかる。また電場の向きは電荷が正であれば電荷から発散する外向き、負であれば吸収される内向きになることがわかる。これをガウスの法則と呼ぶ。

点電荷 Q が作る電場のもとで、他の点電荷 q が Q から距離 r の点に置かれたとする。2 番目の電荷 q を持つ荷電粒子が受ける力は \mathbf{f} 、ローレンツ力の表式から

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と得られる。これは**クーロンの法則**と呼ばれる。ここで、単位ベクトル \mathbf{e}_r は 2 つの点電荷を結ぶ外向きの単位ベクトルであるので、同種の符号を持つ荷電粒子間 ($qQ > 0$) には斥力、異符の荷電粒子間 ($qQ < 0$) には引力が働くことがわかる。

§§2.1.2 単磁化の非存在

磁束密度 \mathbf{B} に関するマクスウェル方程式

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

を電場に関するマクスウェル方程式 $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ に比較すると、右辺に電荷密度に対応する“磁化密度”が現れていないことがわかる。すなわち、N 極だけ、あるいは S 極だけといった**単磁化は存在しない**。任意の領域 V とその表面 S に対し、ガウスの定理を用いると

$$0 = \iiint \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dV = \iint \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS$$

となり、磁束密度は必ずわき出しがあれば吸い込みもあり相殺する。すなわち、任意の領域の中に単磁化が存在し、 $\operatorname{div} \mathbf{B}$ が 0 にならないといった状況は起こりえないことがわかる。

§§2.1.3 マクスウェルアンペールの法則

今、時間に依存しない場合を考察する。このとき、電流密度の入ったマクスウェル方程式は

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

となる。電束密度 \mathbf{D} の時間変化は無いとしている。流れる電流密度ベクトルを横切る閉曲面 S で面積分すると、 S に垂直な法線ベクトルを \mathbf{n} として、

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

となる。左辺はストークスの定理を用いて、閉曲面 S の境界となる閉曲線を C として、

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

となる。右辺から“電流” I を定義する。

$$I \equiv \iint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

こうして、

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I$$

を得る。すなわち、電流 I は磁場 \mathbf{H} を生む。

今、無限に長い直線電流を考えると、対称性から、磁場は直線電流 I からの距離 r のみの関数であり、直線電流を取り囲むような磁場を発生させる。よって、

$$I = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r H(r)$$

となる。こうして、無限に長い直線電流の周りには、それを取り囲む様に、大きさ $H(r)$ の磁場が生じることがわかる。

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

時間に依存する場合には、電流密度 \mathbf{j} に、電束密度の時間変化 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ が加わり、磁場が生じることになる。これをマクスウェル・アンペールの法則と呼ぶ。

さて、マクスウェル方程式 (2.4) の第 3 式の $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ の項は、電荷の保存法則にとって不可欠である。(2.4) の第 3 式の両辺の発散 (div) をとると、

$$\text{div rot } \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{j} + \text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

となるが、任意のベクトル \mathbf{A} に対して $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$ が成り立つので、結局

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \text{div } \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

となる。ここで、時間微分 ($\partial/\partial t$) と空間微分 (div) を入れ替えた。こうして、マクスウェル方程式 (2.4) の第 1 式を用いると、

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

が得られる。これは、電荷・電流密度の保存を表わす連続の方程式に他ならない。

§§2.1.4 ファラディの電磁誘導の法則

マクスウェル方程式

$$\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

の両辺を、ある閉曲面 S で面積分しよう。面 S の法線ベクトルを \mathbf{n} として、

$$\iint_S \text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_S \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

となるが、左辺はストークスの定理から、閉曲面 S の境界となる閉曲線を C として

$$\iint_S \text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} \equiv V$$

となる。電場 \mathbf{E} を閉曲線 C に沿って積分したものは、この閉曲線を回路と見立てたときの“起電力” V と考えられる。一方、右辺は、時間微分と面積分を交換し、その際空間積分が先にとられてしまうので、時間微分は全微分で書けることに注意すると

$$- \iint_S \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

となる。ここで、

$$\Phi \equiv \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

は、磁束密度の面積分であり、“磁束”と呼ばれる。したがって、マクスウェル方程式は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

と書ける。すなわち、磁束の時間変化は起電力を生む。これを**ファラディの電磁誘導の法則**と呼ぶ。また、右辺に負符号が現れるのは、起電力により生じる電流は、その電流により作られる磁場が、もとの磁場の変化を打ち消すように生じることを意味している。これは特に**レンツの法則**と呼ばれる。

§§2.1.5 幾つかの注意

(1) 電流密度

電流密度について述べておこう。電荷の流れを平均したものを考える。これを**電流密度** ($\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$) と呼ぶ。ここで、 n_i を i 粒子の単位体積あたりの粒子数、 q_i を i 粒子の電荷、 \mathbf{v}_i を i 粒子の速度、 $\langle \dots \rangle$ を \dots の平均として、電流密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j} = \sum_{i=\text{粒子}} n_i q_i \langle \mathbf{v}_i \rangle .$$

と得られる。電流密度を、その流れる方向 (単位ベクトルを \mathbf{n}) の断面積 (dS) で積分したものが**電流** ($I(t)$) である。

$$I = \iint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

(2) 電流間に働く力

磁場が電流に及ぼす力を求めておこう。磁束密度 \mathbf{B} が存在するとき、電荷 q 、速度 \mathbf{v} の荷電粒子が受ける力 \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

であった。よって、単位体積当たりの荷電粒子数を n 、電流の流れる導線の断面積を S 、考えている部分の導線の長さを l とすると、電流を流れる導線には単位体積あたり nSl 個の荷電粒子が存在する。導線中を流れる荷電粒子が受ける力の合力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = nSl\mathbf{f} = nSlq\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} = nqS\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}l$$

となる。ここで、荷電粒子の速度を平均の速度 \mathbf{v}_D に置き直した。また、 $nq\mathbf{v}_D$ は電流密度 \mathbf{j} 、 $nqS\mathbf{v}_D$ は電流 \mathbf{I} になるので、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}l$$

が得られる。今、無限に長い直線電流 I_1 が作る磁束密度 \mathbf{B}_1 が、それに平行に置かれて同じ方向に流れる無限に長い直線電流 I_2 に及ぼす力 \mathbf{F}_2 を求めよう。上式から、

$$\mathbf{F}_2 = I_2 \times \mathbf{B}_1 l = I_2 B_1 l \mathbf{e}$$

が得られる。ここで、 \mathbf{e} は2つの導線に直交しており、2つの導線を結ぶ内向きの方向である。電流 I_1 が作る磁束密度 B_1 はアンペールの法則より、

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}, \quad (B_1 = \mu_0 H_1)$$

である。ここで、 r は2つの導線間の距離である。よって、力 \mathbf{F}_2 の大きさ F_2 は

$$F_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l$$

となる。

(3) 電磁気学の単位

電流、電荷といった電磁気学に現れる物理量を定める単位は、上の電流間の力から決定される。真空中で1mの間隔で平行に張られた無限に長い2本の直線電流を考え、等しい電流 ($I_1 = I_2$) を流したとき、 $l = 1\text{m}$ あたり

$$F = 2 \times 10^{-7} \text{ [N]}$$

のときの電流を

$$1 \text{ [A]} (\text{アンペア})$$

と定義する。ただし、このとき、**真空の透磁率**と呼ばれる定数 μ_0 については

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [N/A}^2\text{]}$$

という値を選ぶ。この選び方は電流の単位を変えるだけで任意であるが、このように選ぶことにする。このとき、**真空の誘電率** ϵ_0 は光速 c から

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

と決まる。

また、1[A] の電流が 1[s] 間に運ぶ電荷を 1[C](クーロン) と定義する。

以上が国際標準である SI(system internationale) 単位系における単位の決定の仕方である。しかしながら、物質が素粒子から構成されているという知識から、電子の電荷 q を

$$q(\equiv -e) = -1.60217653 \times 10^{-19} \text{ [C]}$$

とし、単位時間あたり 1 C の電荷が運ばれる電荷の流れを、1 A とした方が理解しやすい。ここで、 e は素電荷と呼ばれる量である。通常、観測される素粒子が持つ電荷は素電荷 e の整数倍に量子化されている。但し、基本粒子であるクォークは、素電荷 e を単位にして、 $2/3$ や $-1/3$ といった分数電荷を持つことが知られている。

§ 2.2 物質中での Maxwell 方程式

§2.2.1 誘電分極

物質に外部電場を加えると、物質内の原子や分子は正負に分極する (図 4)。物質内では異なる分子の分極の正負が打ち消し合い、実質的には何も変化がないが、物質表面には正負の電荷が現れる。これは電気分極と呼ばれる現象である。

物質全体としての分極の強さを電気分極ベクトル \mathbf{P} として表そう。その大きさは物質表面に現れる電荷密度により決まり、向きは外部電場と同じ向き、すなわち負から正への向きとしよう。物質表面に現れた電荷密度 ρ_P 、を分極電荷密度と呼ぶ。このとき、マクスウェル方程式のガウスの法則から、分極電荷密度 ρ_P と電気分極ベクトル \mathbf{P} には、電気分極ベクトルが負から正の方向に (通常の電場とは逆に) 定義されているので、

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho_P$$

が成り立つ。ここで、符号に注意せよ。また、電気分極は、物質内に入ってきた電場 \mathbf{E} に比例するはずだから、

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \equiv \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (\chi = \chi_e \epsilon_0)$$

と書けるであろう。ここで、比例係数として導入した χ_e を、電気感受率と呼ぶ。ところで、真空中では、真に存在する電荷密度を ρ として、 $\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho$ だった。しかし、今は分極電荷密度が存在することも考慮して

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho + \rho_P = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}$$

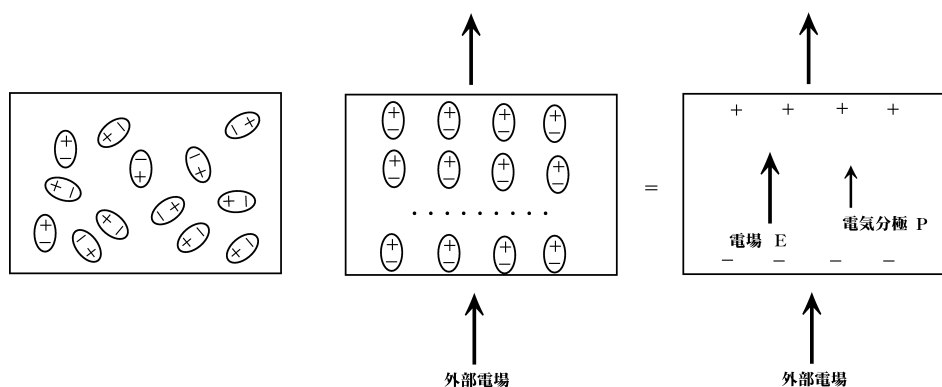


図 4:

となっている。よって、

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

と書き直して、真に存在する電荷密度 ρ のみで書き表すことができる。今、物質中での電束密度 \mathbf{D} を次のように導入しよう。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &\equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \\ &\equiv \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ &\equiv \epsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

ここで、比誘電率 ϵ_r と物質中での誘電率 ϵ を

$$\begin{aligned} \epsilon_r &\equiv 1 + \chi_e, \\ \epsilon &\equiv \epsilon_0 \epsilon_r \end{aligned}$$

と定義する。以上、まとめて

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。基本方程式の一つであるマクスウェル方程式のガウスの法則を表わす方程式は、真空中に比べて、物質中では真空の誘電率 ϵ_0 を物質中での誘電率 ϵ に置きかえれば良いことがわかる。

§§2.2.2 磁化

真空中では、時間変動が無い ($\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$) ときには $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$ または $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ だった。磁場を加えると、磁気双極子 \mathbf{m} が現れる。これは磁場を作るので、

$$\operatorname{rot} \mathbf{m} = \mathbf{j}_m$$

と、誘起された磁気双極子による \mathbf{j}_m が現れる。よって、

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) = \mu_0 (\mathbf{j} + \operatorname{rot} \mathbf{m})$$

すなわち、

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{m}) = \mu_0 \mathbf{j}$$

となる。ここで、誘導磁化 \mathbf{M}_i を導入する：

$$\mathbf{M}_i \equiv \mu_0 \mathbf{m}$$

すると、2つ前の式は

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - \mathbf{M}_i) = \mu_0 \mathbf{j}$$

となる。ここで、物質中での磁場 \mathbf{H} を

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} - \mathbf{M}_i) \quad \left(= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{m} \right)$$

として導入すると、2つ前の式は

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

となる。時間変動があるときには、電荷の保存則を満足するように、電束密度の時間微分が電流密度に加わるのは、真空中の場合と同様である。したがって、

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

となる。

さて、誘導磁化 \mathbf{M}_i は、外から磁場を与えたので発生したので、物質中の磁場 \mathbf{H} に比例しているはずである。よって、

$$\mathbf{M}_i = \chi_m \mathbf{H}$$

と書けるはずである。ここで、比例定数 χ_m を磁化率と呼ぶ。すると、導入した \mathbf{H} の式から、 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}_i$ と書けるので、よって、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}_i = \mu_0 \mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H} = \mu_0 \left(1 + \frac{\chi_m}{\mu_0} \right) \mathbf{H} \\ &\equiv \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \\ &\equiv \mu \mathbf{H} \end{aligned}$$

となる。ここで、比透磁率 $\mu_r \equiv 1 + \frac{\chi_m}{\mu_0}$ と、透磁率 $\mu \equiv \mu_0 \mu_r$ を定義した。

物質中においても単磁荷が存在しないことには変わらないので、

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.8)$$

が成立する。また、電磁誘導の法則も、物質中で定義された磁束密度の変化に対し、

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

は変わらない。

以上から、物質の性質は誘電率、透磁率に反映され、結局、物質中での Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \text{ただし } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

のように、真空中でのそれと同じ形を持つことがわかる。

§ 2.3 スカラーポテンシャル・ベクトルポテンシャル

式 (2.10) から、物質中でも真空中でも同じ形の基礎方程式が得られた。そこで、第 2 式

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.11)$$

に注目する。ベクトル解析から、発散が 0 となるベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、必ず別のベクトル場の回転で書ける。なぜなら、ベクトル場の“回転”の“発散”は常に 0 となるからである：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) . \quad (\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{div rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0) \quad (2.12)$$

このベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ をベクトル・ポテンシャルと呼ぶ。

ベクトル・ポテンシャルで書かれた磁束密度を、(2.10) の第 3 式に代入しよう。

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} , \\ \text{すなわち } \quad \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{rot } \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

ここで、回転が 0 となるベクトル場は、あるスカラー関数の勾配で必ず書けることに注意しよう：

$$\text{rot } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0 , \rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{grad } \phi(\mathbf{r}) , \quad (\text{rot grad } \phi(\mathbf{r}) = 0) \quad (2.14)$$

こうして (2.13) の rot の中を $-\text{grad } \phi$ とおくことで

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) , \\ \text{すなわち } \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

と表わされる。ここで、 $\phi(\mathbf{r}, t)$ をスカラー・ポテンシャルまたは、電位と呼ぶ。こうして、電場、磁束密度とも、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} 、スカラーポテンシャル ϕ により表わすことができる。再度、まとめておこう。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\text{grad } \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} , \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

3章 マクスウェル方程式からの帰結

§3.1 静電場

§§3.1.1 電位

時間に依存しない場合には、電場 \mathbf{E} は、4元ベクトル場のスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を用いて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

と書ける。時間依存性の無い場合を**静電場**と呼ぶ。このとき、 $\phi(\mathbf{r})$ は**電位**とも呼ばれる。電場ベクトルと、微小な変位 $d\mathbf{r}'$ との内積をとり、座標で積分すると

$$\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

と書ける。ここで、 \mathbf{r}_0 は電位の基準を決める位置である。積分定数としての $\phi(\mathbf{r}_0)$ は電位の基準であり、任意に選ぶことが可能である。

さて、原点に置かれた点電荷 q による電位（スカラーポテンシャル） $\phi(\mathbf{r})$ を求めてみよう。今、電場は

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

であった。ただし、 \mathbf{e}_r は原点から外向きの単位ベクトルとする。こうして、電位は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}_0) &= - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \\ &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2} dr' \quad (\mathbf{e}'_r \cdot d\mathbf{r}' = dr') \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned}$$

と得られる。ここで、無限遠方 ($r_0 \rightarrow \infty$) で、電位を $\phi(\infty) = 0$ ととると、原点に置かれた点電荷による電位 ϕ は

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

となる。

§§3.1.2 導体

電荷が自由に移動できる物体を**導体**と呼び、電流を通すことが出来る。導体に外から電場を加えると、導体内の電荷は電場に反応して移動し、導体内の電場を打ち消すまで続く。こうして、導体内では外からの電場を打ち消すように電荷が移動し、結果的に導体内の電場は零となる (図 5)。

導体表面に誘起される面電荷密度 σ を求めてみよう。導体表面を含んで、図 6 のように領域 V を考える。単位体積当たりの電荷密度を ρ とすると、Maxwell 方程式から、

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$

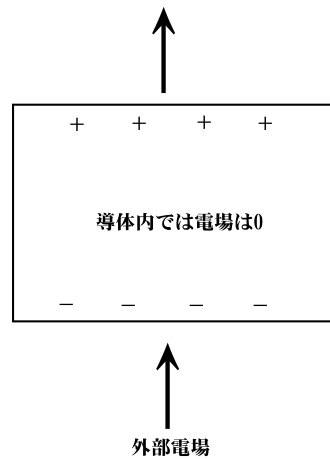


図 5:

である。両辺、領域 V で体積積分する。左辺の体積積分は

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV \\
 &= \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= DS
 \end{aligned}$$

となる。ここで、1行目から2行目へはガウスの定理を用い、2行目から3行目へは、 \mathbf{n} は領域 V から外向きに出る単位ベクトルであることと、電場 (電束密度 \mathbf{D}) は导体外部にしか存在しないことを用いた。一方、右辺の体積積分は、

$$\begin{aligned}
 (\text{右辺}) &= \iiint_V \rho dV \\
 &= \sigma S
 \end{aligned}$$

となる。ここで、電荷は导体表面にしかないので全電荷は、(面電荷密度 σ) \times (面積 S) となることを用いた。

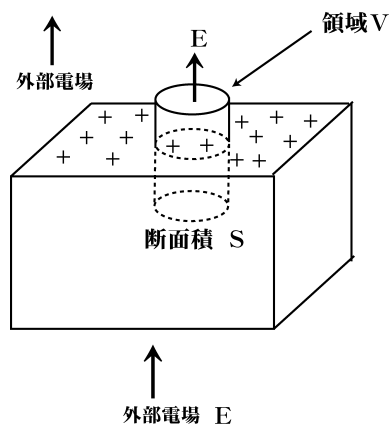


図 6:

以上、2式あわせて

$$D = \sigma$$

となり、導体表面に誘起される面電荷密度 σ は電束密度の大きさと書ける。ここで、導体外部、すなわち真空中での電束密度と電場の関係、 $D = \epsilon_0 E$ より、面電荷密度 σ は、外からかけた電場の大きさ E を用いて、

$$\sigma = \epsilon_0 E$$

と求められる。

§§3.1.3 コンデンサ

導体を2つ用意して、電荷を蓄える**コンデンサ**と呼ばれる回路部品を構成することが可能である。面積 S の平板な導体を、図7のように距離 d 離して2枚平行に置く。上を $+Q$ に、下を $-Q$ に帯電したとしよう。これを**平行平板コンデンサ**と呼ぶ。

上側の導体平面を考える。導体を貫いて、図8のような円柱の領域 V を考える。前節と同様に、 $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ の両辺を領域 V で体積積分する。左辺は、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \iiint_V \text{div } \mathbf{D} dV \\ &= \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= (D_u + D_u) \Delta S = 2D_u \Delta S \end{aligned}$$

とできる。ここで、1行目から2行目へはガウスの定理を用い、2行目から3行目へは、電場(電束密度 \mathbf{D})は平板に垂直に導体外部に存在すること、 \mathbf{n} は領域 V から外向きになる単位ベクトルであること、また導体の上側と下側に同じ大きさの電束密度 D_u が生じていることを用いた。ただし、平板の端の効果は無視し、常に電場は平板に垂直に生じていると近似した。ここで、 ΔS は考えている円柱領域の底面積である。一方、右辺は、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \iiint_V \rho dV \\ &= \sigma \Delta S \\ &= \frac{Q}{S} \Delta S \end{aligned}$$

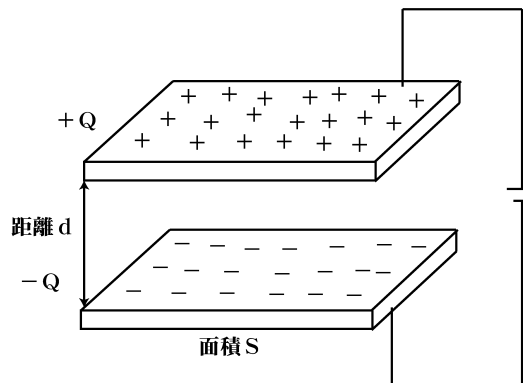


図 7:

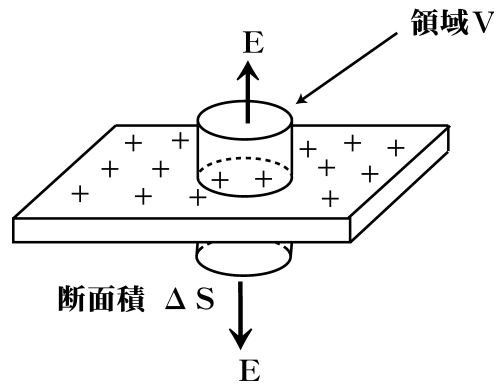


図 8:

となる。ここで、面電荷密度 σ は、(全電荷)/(面積) があるので、 $\sigma = Q/S$ となる。よって、

$$D_u = \frac{\sigma}{2} = \frac{Q}{2S}$$

と得られる。

同様に、下側の導体平板について考えよう。今度は、電場は導体に向かっていることに注意して

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV \\ &= \iint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= (-D_1 - D_1)\Delta S \\ &= -2D_1\Delta S \end{aligned}$$

と得られる。電場（電束密度）の向きと、考えている領域 V の円柱の底面からの外向き法線ベクトルの向きが反対であることに注意せよ。一方、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \iiint_V \rho dV \\ &= \sigma\Delta S \\ &= -\frac{Q}{S}\Delta S \end{aligned}$$

となるここで、面電荷密度 σ は、(全電荷)/(面積) だが、電荷が $-Q$ であった。結局、

$$D_1 = \frac{\sigma}{2} = \frac{Q}{2S}$$

となる。

上側の導体と下側の導体の作る電場（電束密度）の大きさは、符号を除いて同じであることがわかった。向きを考慮して両者を足し併せると、平板間の電束密度 D は

$$D = D_u + D_1 = \frac{Q}{2S} + \frac{Q}{2S} = \frac{Q}{S}$$

と得られる。また、平板間の外側では電場は打ち消し合い、零となる。以上から、平行平板コンデンサ内の電場の大きさ E は、蓄えられた電荷 Q 、導体平板の面積を S として、

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

となる。コンデンサ内に誘電率 ϵ の物体を詰めたときには、上記の真空の誘電率 ϵ_0 を誘電体の誘電率 ϵ に置き換えれば良い。

$$E = \frac{Q}{\epsilon S}$$

さて、平行平板コンデンサに電荷を蓄えるため、両平板間に電位差 $V (= \phi_u - \phi_l)$ を与えているとする。ここで、 $\phi_{u(l)}$ は上側（下側）の電位である。よって、

$$\begin{aligned} V &= \phi_u - \phi_l = \left| - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right| = Ed \\ &= \frac{Qd}{\epsilon S} \end{aligned}$$

となる。ここで、コンデンサの電場 E を用いた。こうして、平行平板コンデンサの電気容量 C を導入して、上式はコンデンサの電極間の電位差 V 、蓄えられる電荷 Q の関係として

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ C &\equiv \frac{\epsilon S}{d} \end{aligned}$$

と表わされる。すなわち、同じ電位差 V ならば、電気容量 C が大きいほど、コンデンサに蓄えられる電荷 Q は多くなるのがわかる。また、平行平板コンデンサの電気容量を大きくするには、 C の表式から、極板面積 S を大きくする、極板間隔 d を小さくする、極板間に誘電率 ϵ の大きな誘電体を詰めればよいことがわかる。

次に、コンデンサに蓄えられるエネルギーを考えよう。電荷 q に働く力 F は、 $F = qE$ であった。今、コンデンサに電位差を与え、電荷 q を距離 d だけ運ぶときに必要な仕事を行い、コンデンサに電荷を貯めていくことにする。このとき必要な仕事 W は、 $W = Fd = qEd = qV$ ($F = qE$ かつ電位差 $V = Ed$) と得られる。電位差 V に逆らって Δq だけ電荷を増したときに要する仕事を ΔW と書くと、今得られた仕事の式から、 $\Delta W = \Delta q \times V = \Delta q \cdot \frac{q}{C}$ となる。電荷を 0 から Q までコンデンサにためるのに必要な仕事 W は、 ΔW を 0 から Q まで加え（積分し）て

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

と得られる。これだけの仕事が必要だったので、コンデンサにはこの仕事分がエネルギーとして蓄えられている。 $Q = CV$ の関係を用いて、コンデンサに蓄えられた静電エネルギー W は

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

となる。

§ 3.2 定常電流と磁場

§§3.2.1 オームの法則

導体では §§15.1.2 で述べたように、外部から電場を加えると、導体内の電場を打ち消すように電荷が移動する。これは、導体中に自由電子が存在することにより実現される。電子が持つ電荷は $-e$ であるので、電子の流れが電流になるのではあるが、電子の電荷が負なので電子の流れと電流の向きは反対であるように定義されている。導体を構成する原子が周期的に並んでいると電子は散乱されずに進んでいくのであるが、実際には物質には不純物が存在したり、格子欠陥があったり、原子（イオン）の熱振動による散乱などがあり、電子は散乱

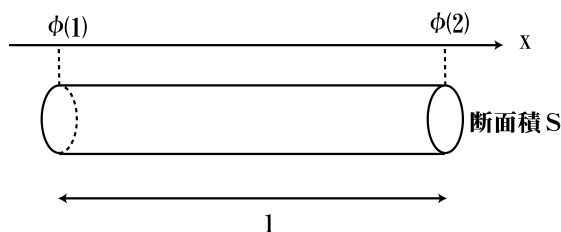


図 9:

されながら進むことになる。これが、**電気抵抗**となる。導体中には多数の自由電子が存在するので、電子の平均速度を v_D として、全ての電子が平均速度で運動していると単純化して考えよう。平均速度は $v_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$ と書かれる。ここで、 n は単位体積当たりの電子数とした。和は単位体積中の n 個の自由電子についてとるものとする。自由電子が単位時間に不純物等に衝突して散乱される回数は速度に比例するので、速度に比例した抵抗力 $-\frac{m}{\tau} v_D$ が働くと考えればよい。ここで、速度に比例した抵抗力の比例係数を m/τ とした。 m は電子の質量であり、時間の次元を持つ定数 τ (緩和時間) を用いた。こうして、自由電子に対する運動方程式は

$$m \frac{dv_D}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} v_D$$

と書ける。電子の電荷は $-e$ である。定常の流れになると、電子の平均速度 v_D は変化しなくなるので、運動方程式の左辺を 0 として、

$$-e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} v_D = 0$$

から、自由電子の最終的な平均速度が得られる。

$$v_D = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$$

電子は電荷を持つので、電子の流れが電流密度 \mathbf{j} となるが、電子の電荷が負であることを考慮して

$$\mathbf{j} = n(-e)v_D = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E}$$

と得られる。以上より、まとめて、

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \\ \sigma &\equiv \frac{ne^2\tau}{m} \end{aligned} \quad (3.1)$$

と得られる。すなわち、電流密度は電場に比例する。これを**オームの法則**と呼ぶ。また、比例係数として導入した σ を**電気伝導度**と呼ぶ。

次に、電流の方向のみを考え、その方向を x 方向としよう。電流密度の大きさ j は、電位 (スカラーポテンシャル) ϕ を用いて

$$j = \sigma E = -\sigma \frac{d\phi}{dx}, \quad (\mathbf{E} = -\nabla\phi)$$

と書けるので、 x 方向の導線の長さ l 、それに垂直な断面積 S で体積積分して

$$\iiint j dx dS = -\sigma \iiint \frac{d\phi}{dx} dx dS$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \int \left(\iint j dS \right) dx = \int I dx = Il, & \left(I = \iint j dS : \text{電流} \right) \\ \text{(右辺)} &= -\sigma \iint \left(\int \frac{d\phi}{dx} dx \right) dS = -\sigma \iint (\phi(2) - \phi(1)) dS = -\sigma S(\phi(2) - \phi(1)) = \sigma SV \\ & & (V = |\phi(1) - \phi(2)| : \text{電位差}) \end{aligned}$$

と変形されるので、両辺等しいことから

$$Il = \sigma SV$$

と表わすことができる。整理して、

$$\begin{aligned} V &= RI & (3.2) \\ R &= \frac{l}{\sigma S} \end{aligned}$$

と得られる。これもまた、**オームの法則**と呼ばれる。ここで導入した比例係数 R を**電気抵抗**、電気伝導度の逆数 $\frac{1}{\sigma}$ を**抵抗率**と呼ぶ。

§§3.2.2 ジュール熱

電気抵抗が存在すると、速度に比例した力が働くことで、エネルギーが散逸していくことがわかる。このエネルギーは熱として散逸される。電流が流れることにより発生する熱を考えよう。

速さ v_D の電子が Δt の時間に動く距離は $v_D \Delta t$ である。また、電場により電子が受ける力は $-eE$ である。したがって、仕事は、(力)×(移動距離)となるので、電場が自由電子1個にする仕事は $-eEv_D \Delta t$ となる。ここで、導線の単位体積当たりの電子数を n 、導線の断面積を S 、考えている導線の長さを l とすると、電子が動く導線に存在する電子数は nSl 個となる。よって、電場が導線内の電子にする仕事 ΔW は

$$\Delta W = -eEv_D \Delta t \cdot nSl = n(-e)v_D S \cdot El \cdot \Delta t = IV \Delta t$$

となる。ここで、 $-nev_D \equiv j$ は電流密度、 $jS \equiv I$ は電流、 $El \equiv V$ は電位差である。以上から、電場がする単位時間当たりの仕事、すなわち仕事率 W は

$$W = \frac{\Delta W}{\Delta t} = IV$$

と書ける。オームの法則を用いると、

$$W = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

とも書ける。電場がした仕事は熱として発生することになる。これを**ジュール熱**と呼ぶ。

電流密度 \mathbf{j} と電場 \mathbf{E} を用いて、ジュール熱は

$$W = IV = \iint \mathbf{j} dS \cdot \int dx \mathbf{E} = \iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV \quad (3.3)$$

と書けることに注意しよう。このとき、 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ が単位体積当たりのエネルギーになっていることがわかる。

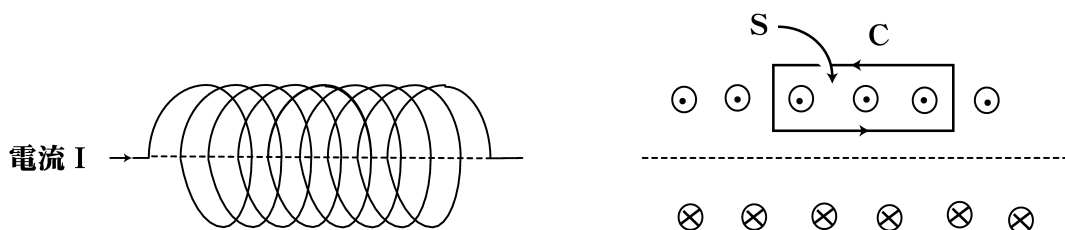


図 10:

§§3.2.3 コイルが作る磁場

ここでは、無限に長いソレノイド(コイル)の中のできる磁場を考えてみよう。電流密度の時間変化の無い定常電流のときには、マクスウェル方程式は

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

であり、図 10 の様な積分経路 C をとって両辺を積分する。左右両辺は

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \iint \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2H_u l \\ \text{(右辺)} &= \iint \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = nIl, \quad (n: \text{単位長さ当たりの導線の巻き数}) \end{aligned}$$

と得られる。ここで、 H_u は図 10 の S を囲む磁場の強さである。よって、両辺等しいと置くと

$$H_u = \frac{1}{2}nI$$

となる。同様に、下側を流れるところで積分経路をとると、下側の導線が作る磁場の大きさを H_l として、上側と同様に

$$H_l = \frac{1}{2}nI$$

が得られる。ソレノイドの外側では H_u 、 H_l の大きさは等しく向きが反対になるので、磁場は打ち消しあい、零となる。ソレノイドの内側では同じ向きになり、こうしてソレノイドの内側に生じる磁場の大きさ H は、

$$H = H_u + H_l = nI, \quad \text{または} \quad B = \mu nI$$

が得られる。したがって、ソレノイド内部の磁束密度を大きくするには、コイルの単位長さ当たりの巻き数 n を増やす、電流 I を強くする、透磁率 μ の大きな物質を入れる、といった方法が考えられる。

§§3.2.4 ビオ・サバルの法則

電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ が作る磁場を考えよう。ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を用いると、磁束密度 \mathbf{B} は $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ と表わされることを思い出そう。導体内では電場は存在しないので、 $\text{div } \mathbf{E}(= \rho/\epsilon) = 0$ である。オームの法則から、 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ であったので、

$$\text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sigma \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

が得られる。一方、Maxwell 方程式の、時間に依存しないマクスウェル・アンペールの法則から、

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

なので、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ より、

$$\mu \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \text{rot rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{grad div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

が得られる。ここで、最後の等式は、任意のベクトル場 \mathbf{V} に対して成り立つベクトル解析の公式 $\text{rot rot } \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \text{grad div } \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \nabla^2 \mathbf{V}(\mathbf{r})$ を用いた。今、

$$\text{div } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.4)$$

という条件を課しておくことにしよう⁸。そうすると、上式は

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu \mathbf{j}(\mathbf{r})$$

と簡単化される。式 (3.4) の妥当性は、後に確かめることにしよう。上の微分方程式はポアソン方程式と呼ばれており、解くことが可能である。その解は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'$$

となることが知られている。よって、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ が作る磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、ベクトルポテンシャルのローテーションをとることで、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \text{rot} \left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d^3 \mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (3.5)$$

として得られる。これを**ビオ・サバールの法則**と呼ぶ。

電流の小部分 $I d\mathbf{x}$ が作る磁場を考えよう。先ほど得られた (3.5) 式で、 $\mathbf{j} = j\mathbf{n}$ とする。 j は電流密度の大きさ、 \mathbf{n} は電流の流れる方向の単位ベクトルである。このとき、電流の流れる方向を $d\mathbf{x}$ 、それに垂直な断面を dS として、

$$d\mathbf{x} \iint \mathbf{j} dS = d\mathbf{x} \iint j n dS = d\mathbf{x} n I = I d\mathbf{x}$$

と変形できる。ここで、 $\iint j dS = I$ は電流であり、電流の流れる方向のベクトルは $d\mathbf{x} n = d\mathbf{x}$ となる。以上より、

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 \mathbf{r}' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \iint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \int d\mathbf{x}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

が得られる。これが、電流 I が作る磁束密度を与える。

§ 3.3 電磁誘導

§§3.3.1 相互誘導・自己誘導

今、ソレノイドを2つ、図 11 の様に配置したとしよう。1次コイルに電流 I_1 を流すと、1次コイルには I_1 に比例した磁場が生じる。磁場が電流 I_1 に比例するので、2次コイルを貫く磁束 Φ_2 もまた電流 I_1 に比例する。比例定数を M として、 $\Phi_2 = MI_1$ と表わされる。1次コイルに流れる電流が変化したとすると、2次コイルを貫く磁束が変化するので、電磁誘導の法則から起電力 V_2 が生じる。

$$V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

この現象を相互誘導と呼び、 M を相互インダクタンスと呼ぶ。

今度は、単一のソレノイドに電流 I が流れているとする。自分自身のソレノイドを貫く磁束を Φ とすると、 Φ は流れる電流に比例するので、比例定数を L として、 $\Phi = LI$ と表わされる。ここで、ソレノイドに流れる電流が時間変化したとしよう。すると、自分自身のソレノイド中の磁束が変化するので、自分自身のソレノイドに誘導起電力 V が生じることになる。すなわち、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

この現象を自己誘導と呼び、 L を自己インダクタンスと呼ぶ。

§§3.3.2 ソレノイドに蓄えられるエネルギー

ソレノイドを流れる電流 I_L が、時刻 $t = 0$ で $I_L = 0$ 、 $t = t_1$ で I になったとしよう。自己誘導からコイルに生じる起電力は $V = -L\frac{dI_L}{dt}$ であった。したがって、 Δt の時間に、この起電力に逆らって $\Delta Q \equiv I_L \Delta t$ の電荷を運ばないといけないので、このために必要な仕事 ΔW は、

$$\begin{aligned} \Delta W &= (\text{力}) \times (\text{移動距離}) = (\Delta QE) \times (\Delta x) = (\Delta Q) \times (E\Delta x) = (I_L \Delta t) \times (V) \\ &= I_L \Delta t \cdot L \frac{dI_L}{dt} \end{aligned}$$

となる。ここで、電場の大きさを E として必要な力は ΔQE 、移動距離を dx として電位差 V は $V = Edx$ である。よって、仕事 W は時間 $t = 0$ から $t = t_1$ まで積分し、

$$W = \int \Delta W = \int_0^{t_1} L \frac{dI_L}{dt} \cdot I_L dt = \int_0^I LI_L dI_L = \frac{1}{2} LI^2$$

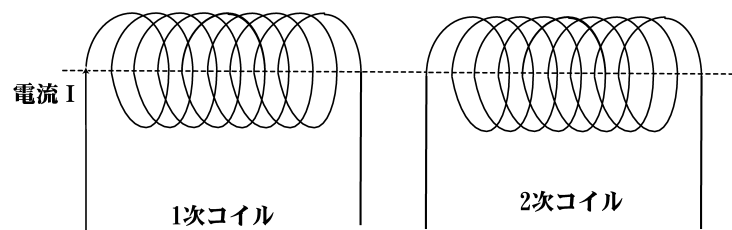


図 11:

§ゲージ変換の自由度 (??) を固定する条件の一つで、クーロンゲージと呼ばれる。

となる。こうして、これだけの仕事がソレノイドに蓄えられることになる。蓄えられたエネルギーは

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

と得られる。

§§3.3.3 LCR 回路

電気容量 C のコンデンサ、抵抗値 R の電気抵抗、自己インダクタンス L のソレノイドを直列に接続した電気回路を考えておこう。この回路に電流 I が流れているとする。コンデンサ、抵抗、ソレノイドの両端の電位差 V_C 、 V_R 、 V_L はそれぞれ

$$Q = CV_C, \quad V_R = RI, \quad V_L = L\frac{dI}{dt}$$

となる。よって、全電位差 V は

$$V = V_C + V_R + V_L = \frac{Q}{C} + RI + L\frac{dI}{dt}$$

である。ここで、電流と電荷の変化は

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

の関係があることに注意すると、上の電位差の式は

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V$$

と書き表すことができる。

この回路が交流電源 $V = V_0 \sin(\Omega t)$ に繋がれているとすると

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin(\Omega t)$$

となり、 $L \leftrightarrow m$ 、 $R \leftrightarrow \mu$ 、 $\frac{1}{C} \leftrightarrow k$ 、 $Q \leftrightarrow x$ とかくと、

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = V_0 \sin(\Omega t)$$

となって、摩擦のある場合の強制振動の運動 (§9.4 を見よ) と同じ方程式が得られる。こうして、この電気回路でも強制振動で見られた共鳴 (共振) 現象などが見られることがわかる。

4章 電磁波

§ 4.1 電磁波

真空中 ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) での Maxwell 方程式は、

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (4.4)$$

と書ける。式 (4.3) に rot を施して、 $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ となるベクトル解析の公式を用いると、(4.1) を使って

$$(\text{左辺}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

となる。一方、右辺は (4.4) を用いて

$$(\text{右辺}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

となる。両辺等しいと置いてまとめると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

が得られる。これは波動方程式であり、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は、速さ $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ で伝わる波動であることを意味している。

同様にして、(4.4) の両辺に rot を施し、(4.2) と (4.3) を用いると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

が得られる。この式はまた、磁束密度 \mathbf{B} 、または磁場 $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ は、速さ $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ で伝わる波動であることを意味している。

こうして、重要な結論が導かれる。すなわち電磁場は波動として伝わる。電磁場の波動を**電磁波**と呼ぶ。

電磁波の伝わる速さ c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (4.6)$$

となった。これは光速と一致しており、光（可視光）は電磁波の一種であると結論される。

§ 4.2 電磁波の進行方向

電磁場が z 座標と時間 t に依存しているとしよう。すなわち、 $\mathbf{E}(z, t)$ 、 $\mathbf{B}(z, t)$ とする。このとき、Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 &\quad \longrightarrow \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 &\quad \longrightarrow \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{pmatrix} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &\quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_0 \mu_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書かれる。上式の第 3、4 式の第 3 成分から

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

が得られる。よって、この式と $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ 、 $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ の式から、 E_z 、 B_z とともに z にも t にも依存しない定数であることがわかる。定常的な場は電磁波の伝播に影響しないので、 $E_z = B_z = 0$ と置いてよい。

電場の z 成分は $E_z = 0$ となったので、 \mathbf{E} は z 軸に垂直な平面に存在する。そこで、電場 \mathbf{E} が向く方向を x 方向にとろう。このとき、 $E_y = E_z = 0$ である。こうして、 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ と $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ の式の第 1、2 成分からそれぞれ、

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。上式の第 1 式と第 4 式から B_x は z にも t にも依存しない定数であることがわかるので、先ほどと同様に $B_x = 0$ として良い。こうして、

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E(z, t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B(z, t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は直交していることがわかった。

次に電磁波の進行方向を考察しよう。電場 \mathbf{E} は x 成分しか持たず、かつ z と t のみの関数であるので、波動方程式 (4.5) は、

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} = 0$$

となる。これは今考えている電場は z 方向に進行する波動であることを示している。 \mathbf{B} についても同様である。従って、電磁波は電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} の両方に直交した方向に進むことがわかる ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の方向)。

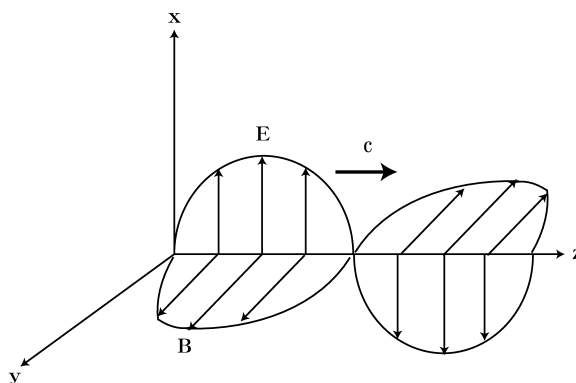


図 12:

§ 4.3 電磁場のエネルギー

電磁波は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ の方向に進むことがわかった (図 12)。そこで、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$) の発散を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ &= -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

ここで、1行目はベクトル解析の公式を用い、1行目から2行目へは Maxwell 方程式を用いた。ただし、ここでは $\rho \neq 0$ 、 $\mathbf{j} \neq 0$ としている。両辺を、ある空間領域で体積積分して、項の順序を変えると、

$$-\iiint \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV = \iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \iiint \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV$$

が得られる。ここで、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ に注意すると、左辺の被積分関数は

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \int_0^t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} dt' = \frac{d}{dt} \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = \frac{d}{dt} \int_0^{\mathbf{E}} \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 \right) \\ \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \int_0^t \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} dt' = \frac{d}{dt} \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \frac{d}{dt} \int_0^{\mathbf{H}} \mu \mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 \right) \end{aligned}$$

と式変形できる。また、右辺の最後の項はガウスの定理を用いて面積分に変えると、結局、

$$-\frac{d}{dt} \iiint \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 \right) dV = \iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV + \iint \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.7)$$

ただし $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

となる。この式の意味を考えよう。右辺第2項は §§15.2.2 の (3.3) 式で見たジュール熱である。従ってこの式はエネルギーに関する式である。また、右辺第2項は、 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ が電磁波の進行方向であることから、考えている体積領域からその表面を通して電磁場のエネルギーが流れ \mathbf{S} で逃げていると考えられる。従って、左辺は電磁場のエネルギーが時間とともに減少する時間変化の割合を与えていると考えられ、 $\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2$ は電磁場のエネルギー密度と理解される。また、 $\mathbf{S} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ はポインティングベクトルと呼ばれる。

5章 特殊相対性理論

§5.1 アインシュタインの特殊相対性原理と光速度不変の原理

前章では、電磁気学の基礎方程式であるマクスウェルの方程式から電磁波の方程式を導いた。すなわち、電場、磁場の時間変動は波動として伝わることを見た。そこでは、電磁波の速さ c が電磁波の満たす方程式に表れた。

しかし、速さは基準系を決めなければ決まらないのではないだろうか？ たとえば、時速 60 km/h で進むトラックの荷台から進行方向に時速 100 km/h で物を投げると、地面に静止している人には投げられた物は前方に時速 160 km/h で投げ出されたように見えるはずであろう ($160 = 100 + 60$)。では、基礎方程式から導出された電磁波の方程式に表れた光の速さ c は、どのような基準系に対する速さなのであるだろうか？

以下のことをまずは考察しておこう。一定の速度（速さと進む向きが変化しない）で滑らかに動いている乗り物の中にいるとすると、乗り物の中では、場所さえ許せばいつもと変わらずキャッチボールもできるし、窓の外の景色が後ろに流れていく以外は普段と変わったことはない。もし窓が無ければ、乗り物は動いているのか止まっているのか判らないだろう。乗り物は、静止している一つの慣性系に対して等速直線運動しているので、乗り物の中はまた慣性系である。こうして、全ての慣性系において物理法則は変わらず成り立つと考えて良さそうである。この、もっともらしい要請を、**(アインシュタインの) 相対性原理**と呼ぶことにしよう。

次に、静止している慣性系に対して速さ V [m/s] で動いている乗り物の中でじっとしている人が、この乗り物の中で発した光の速さを測ることを考える。ここで、乗り物の中に静止している人が測定した光の速さを c [m/s] としよう。この現象を乗り物の外にいる人も見ている。乗り物の外で静止している人がこの同じ光の速さを測るとどうなるだろうか。日常経験に照らし合わせて考えると、乗り物が進む方向の光の速さは $c + V$ [m/s]、反対方向は $c - V$ [m/s] になりそうだと思う。時速 60 km/h で進むトラックの荷台から進行方向に時速 100 km/h で物を投げると、地面に静止している人には投げられた物は前方に時速 160 km/h で投げ出されたように見えるはずであることは、先ほど述べたとおりである ($160 = 100 + 60$)。ところが、光の場合にはそうならないことが、実験で実証されている。動いている乗り物の中の人でも、乗り物の外で静止している人も、光の速さはいつも c となる。これは**実験事実**なので認めるしかない。この事実を**光速度不変の原理**と呼ぶ。すなわち、真空中では光の速さ c [m/s] は常に、

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

となっている。

光が伝わる現象も物理法則であると考えれば、すべての慣性系において、光の伝わる方法は同じであるはずなので、光の速さが有限で、その値が全ての慣性系で等しいということは、相対性原理の現れの一つと考えることもできる。

課題：光の速さが観測者（慣性系）によらず、一定値をとることは、19世紀の終わりに最初に行われたマイケルソンとモーレーによる実験で示された。この**マイケルソン・モーレーの実験**について調べてみよう。

§5.2 光速度不変の原理と同時刻の相対性

すべての慣性系にとって、光の速さが同じ値をとるという実験事実をもとにすると、たちどころに日常の経験的世界観を変更せざるを得なくなることがわかる。

今、2つの慣性系があり、お互いに相対的に、速さ V [m/s] で、ある方向に一樣に運動しているとしよう。運動方向に x 座標をとり、一つの慣性系を静止系 K と記すことにする。先ほどの例では乗り物に乗らずに静止している人の座標系に対応する。もう一つの慣性系は、静止系 K に対して x 方向に速さ V [m/s] で運動しており、この運動座標系を K' と記すことにする。先ほどの例では、乗り物の中で静止している人の座標系に対応する。図 13 のように、 K 系と K' 系の座標軸は互いに同じ方向を向いているとする。今、 K' 系で図 13 の A 点で光を灯したとしよう。 A 点から等しい距離にある B 点、 C 点に光が到達する時刻を考えてみる。光速不変の原理から、 K' 系では光源 A から運動方向に対して前方にある C 点へも、後方にある B 点へも、等しい速さで光は伝わっていくはずである。このとき、 AB と AC の距離が等しいので、 B 点、 C 点へ光が到達する時刻は同じになるはずである。つまり、慣性系 K' 系にいる観測者には、光が B 点、 C 点に到達するのは同時刻の出来事であると判断するだろう。

一方、この同じ現象を慣性系 K にいる観測者はどのように観測するだろうか。光が A 点を発した後、 x の正の方向（前方）へも負の方向（後方）へも、 K 系に静止した観測者には光は同じ速さで伝わる。これが光速不変の原理が主張する内容であり、光源の運動状態に依らずに光は同じ速さで伝わるということは実験事実であった。ところが、 K' 系は x の正の方向へ速さ V [m/s] で運動しているので、 B 点は光が発せられた点に近づいて来て、 C 点は遠ざかって行く。つまり、光が進まなければならない距離は明らかに後方にある B 点の方が短くなるであろう。すなわち、 K 系に静止している観測者には、 A 点で発せられた光は B 点に到達したのち C 点に到達したと判断するであろう。

こうして、 K' 系の観測者には同時刻に起きたできごとが、 K 系の観測者には同時刻に起きてはいないことになる。これは、光の速度が運動状態に依らずにすべての慣性系において等しいという光速不変の原理から導かれたことであり、どちらの観測者にとっても正しい事実である。

以上のことからわかることは、同時刻概念は慣性系ごとに決まる相対的なものであるということである。決して同時刻は全ての慣性系にとって同じではない。このことは**同時刻の相対性**と呼ばれる。こうして、時間はすべての慣性系において共通ではなく、慣性系に固有の量であることを認めなければならなくなった。

§ 5.3 ローレンツ変換

光速不変の原理から、慣性系ごとに時間を考えなければいけないことが、前の節でわかった。時間が異なるといっても、2つの慣性系で全く関係なく時間が流れているのだろうか。次に、2つの慣性系の間にはどのような関係が存在するのかを調べていこう。

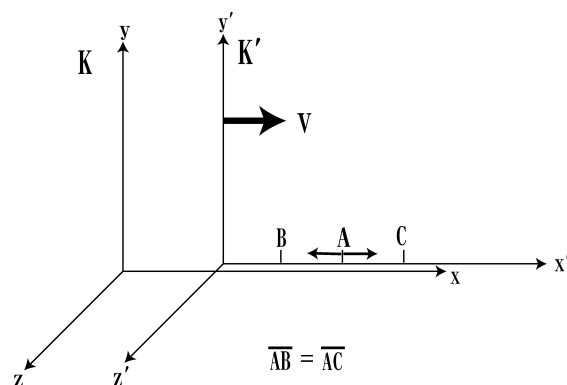


図 13:

今、 x 軸方向に互いに一様に運動している 2 つの慣性系を考える。前と同じように、静止系を K と記し、この K に対して K 系の x 軸の正の方向に速さ V [m/s] で一様に運動している慣性系を K' とする。それぞれの慣性系 K 及び K' の座標は、時間も含めてそれぞれ (x, y, z, t) 、 (x', y', z', t') と記すことにする。運動方向は x 、または同じことだが x' 方向であるので、運動方向に直交する座標は 2 つの慣性系で常に等しいとして良からう。すなわち、

$$y' = y, \quad z' = z$$

が成り立ちとする。

今、時刻 $t = t' = 0$ で座標の原点は重なっていたとしよう。このとき、 K 系で、時刻 $t = 0$ に原点から x 軸正の向きに出た光の先端の位置 x [m]、及び同じく光の先端を K' 系で観測した場合の位置 x' [m] は、

$$x = ct, \quad x' = ct' \quad (5.8)$$

となるはずである。ここで、 t 、 t' は K 系、 K' 系で測定した時刻で、光はどちらの座標系でも c [m/s] で進むので、(進んだ距離) = (速さ) × (かかった時間) ということである。

相対性原理から、 K 系で成り立つ事実は K' 系でも成り立つはずなので、(5.8) 式で、一方が成り立てばもう一方が成り立つためには

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

という関係式があれば良いことがわかる。ただし、 λ はこれから決定すべき定数であり、1 である必然性は無い。同様な考察から、 x 軸負の方向へ伝わる光に関しては

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

となっていれば良からう。ここに、 μ も未定の定数である。上の 2 式を辺々足したり引いたりすると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \rho ct, & ct' &= \gamma ct + \rho x \\ \text{ただし } \gamma &\equiv \frac{\lambda + \mu}{2}, & \rho &\equiv \frac{\mu - \lambda}{2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

と整理される。未知数 λ 、 μ のかわりに、 γ 、 ρ と書くことにした。式 (5.9) は、 K 系と K' 系の座標変換を表わしているとも見なせるので、 $x' = 0$ の点は (5.9) 式から

$$0 = \gamma x + \rho ct, \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{\rho}{\gamma} ct$$

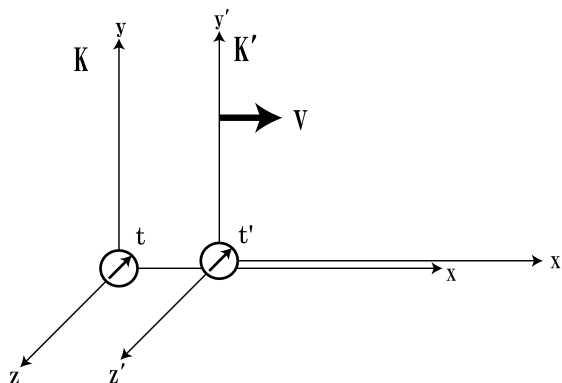


図 14:

と得られる。ここで、 K' 系の原点 $x' = 0$ は、 K 系に対して速さ V [m/s] で運動していることを思い出すと、 $x = Vt$ となるはずなので、両者を見比べると

$$\rho = -\frac{V}{c}\gamma$$

と、未定の定数を一つ減らすことができる。こうして (5.9) 式の、 $x' = \dots$ と $ct' = \dots$ の式から、上で導いた ρ を用いて ρ を消去すると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma \frac{V}{c} ct, \\ ct' &= \gamma ct - \gamma \frac{V}{c} x \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。

これらの (5.10) 式を逆に解いてみよう。実行すると

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{V}{c}\right)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} ct' \\ ct &= \frac{ct'}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{V}{c}\right)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} x' \end{aligned} \quad (5.11)$$

が得られる。この (5.11) 式が意味することを考えてみよう。これは K' 系に静止した人から K 系をみていることに対応しており、 K' 系を静止系、 K 系を K' 系に対して x' 軸負の方向に速度 $-V$ [m/s] で一様に運動している系として、これらの2つの座標系の変換とみなせる。したがって、(5.10) 式で、 $x' \leftrightarrow x$ 、 $ct' \leftrightarrow ct$ 、 $V \leftrightarrow -V$ としたものに他ならない。あらためて書いておくと

$$\begin{aligned} x &= \gamma x' + \gamma \frac{V}{c} ct' \\ ct &= \gamma ct' + \gamma \frac{V}{c} x' \end{aligned} \quad (5.12)$$

となる。つまり、(5.11) 式と (5.12) 式は同じ式であるべきだというわけである。よって、両者を比較することにより、未定であった γ を決定することができる。 $V = 0$ では $x = x'$ なので符号に注意して、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

となる。これをもとの (5.10) 式に戻すことで2つの慣性系を結ぶ関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ ct' &= \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned} \quad (5.13)$$

2つの慣性系を結ぶ変換 (5.13) をローレンツ変換と呼ぶ[¶]。

ところで、光の速さ c はおよそ秒速 30 万キロメートルであった。私達が日常経験する速さは光の速さに比べると十分すぎるほど遅いと言えよう。新幹線で時速 300 キロメートル (秒速 83 メートル) 程度、ジェット機

[¶]アインシュタインが導いたのだが、アインシュタイン変換とは呼ばれない。アインシュタインより前に同じ式をローレンツが導出していたのでこう呼ばれる。

で時速 1000 キロメートル (秒速 278 メートル) 程度、地球からロケットを打ち上げて、そのロケットが地球の重力を振り切って人工衛星にならずに宇宙空間へ飛んでいく時に必要な速さでさえ、秒速 11 キロメートル程度である。ということは、日常、私達が経験する速度では、(5.13) 式に現れる $\frac{V}{c}$ は 1 に比べて十分すぎるほど小さいと考えて良からう。こうして、 $\frac{V}{c} \rightarrow 0$ と近似したものが私達の日常をうまく説明してくれると考えられる。実際、(5.13) 式で $\frac{V}{c}$ を 0 とすると

$$x' = x - Vt, \quad t' = t \quad (5.14)$$

となる。つまり、全ての慣性系で時間は共通 ($t' = t$) であり、座標系の変換も、日常経験で納得できる形になっている。

§5.4 ローレンツ変換からの帰結

2つの慣性系をつなぐローレンツ変換が導いたので、そこから得られる簡単な帰結を紹介しておこう。

§§5.4.1 動いている慣性系の時間の遅れ

2つの慣性系 K 系と K' 系の原点 ($x = 0$, $x' = 0$) に固定された時計を考えよう。 K 系を静止系と見て、それに対して K' 系は x 方向に速さ V [m/s] で動いているとする。 K' 系の原点におかれた時計は K 系からみて、速さ V [m/s] で動くので、 K' 系の原点に置かれた時計の座標は K 系から見ると $x = Vt$ となっている。ローレンツ変換 (5.13) の時間の変換式に $x = Vt$ を代入すると

$$ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = ct\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

が得られる。こうして、 K' 系での時間 t' [s] と、 K 系での時間 t [s] の間には

$$t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (5.15)$$

の関係があることがわかる。今、 $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1$ なので $t' < t$ となっている。つまり、静止系に対して運動している慣性系の時間 t' は、静止慣性系の時間 t と比較して遅れる (ゆっくり進む) ことになることがわかる。

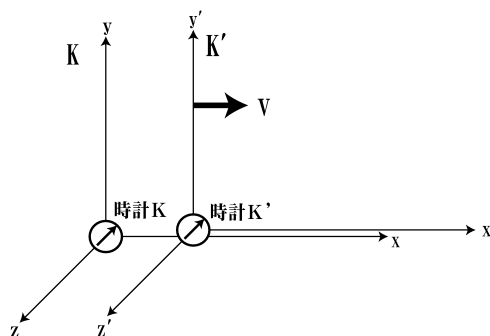


図 15:

発展課題：宇宙空間から色々な素粒子が地球に降り注いでいる。これらを宇宙線と呼ぶ。宇宙線中にはミュー粒子と呼ばれる素粒子も含まれている。ミュー粒子は $\tau = 2.20 \times 10^{-6}$ 秒（およそ2マイクロ秒）で、電子、ミューニュートリノ、電子反ニュートリノに崩壊してしまう。ミュー粒子が大気上空で作られ、光の速さ c [m/s] の99.99%の速さで地上に向かって飛来しても、 $0.9999ct \approx 660$ メートル程度進むと崩壊してしまうはずである。ところが、実際にはミュー粒子は地上に到達し、観測されている。なぜだろうか？

§§5.4.2 ローレンツ収縮

次に、 K 系に対して速さ V [m/s] で x 軸方向に運動している K' 系を考え、 K' 系に固定された長さ l_0 [m] の物体 AB を考えてみよう (図 16)。この長さ l_0 [m] は K' 系において測定されており、物体に対して静止した観測者が測定する物体の固有の長さであることがわかる。物体 AB の両端の位置は、 K' 系で見て、図 16 の様に x'_2 と x'_1 であり、 $l_0 = x'_2 - x'_1$ となる。

この物体の両端の座標を K 系で測定してみよう。 K' 系での座標値に対応して、 K 系ではそれぞれ x_2 、 x_1 であり、 K' 系に固定された物体 AB を K 系の観測者が測定した長さ l は、 $l = x_2 - x_1$ となる。ローレンツ変換 (5.13) から、 x'_1 と x_1 、 x'_2 と x_2 には関係があったので、それらの関係を使って $l_0 = x'_2 - x'_1$ を計算してみましょう。結果は

$$\begin{aligned} l_0 &= x'_2 - x'_1 \\ &= \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

が得られる。ここで、 $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1$ であるから、 $l < l_0$ ということになる。つまり、物体の長さは慣性系の運動により異なる値を持つことになる。動いている物体の長さを静止系から測る (l) と、物体固有の長さ (l_0) に比べて縮んで観測されることになった^{||}。この事実はローレンツ収縮と呼ばれる。

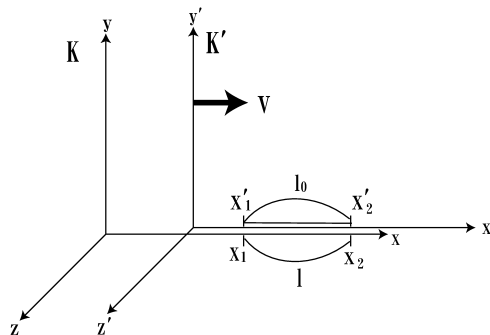


図 16:

^{||}物体が縮むというより、空間が縮んでいる。

§5.4.3 速度の合成則

さて、速度はどのように変換されるのであろうか (図 17)。本当に光の速さはどの慣性系でも同じなのだろうか。

今、 K' 系から K 系を見ると、 K 系は x の負の方向に速さ V [m/s] で進んでいるので、 K 系が K' 系に対して動く速度は、 $-V$ となる。ローレンツ変換 (5.13) 式で、 $x \leftrightarrow x'$ 、 $t \leftrightarrow t'$ 、 $V \rightarrow -V$ とすれば K 系と K' 系の役割を入れ替えることができるので、

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

としておくことができる。時刻 $t = t' = 0$ で原点 $x = x' = 0$ から物体が x 、 x' 軸の正の方向に進み、 K 系では時刻 t [s] に x [m] の位置に、同じ現象を K' 系から見ると物体は時刻 t' [s] に x' [m] の位置にいるとしよう。(5.16) 式の両辺を、辺々割り算すると、

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{x' + Vt'}{t' + \frac{V}{c^2}x'} \\ &= \frac{\frac{x'}{t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{x'}{t'}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 K 系から見た物体の速さ v [m/s] は $v = \frac{x}{t}$ であり、 K' 系から見た物体の速さ v' [m/s] は $v' = \frac{x'}{t'}$ であるので、

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} \quad (5.17)$$

という式が得られる。これが特殊相対性理論での**速度の合成則**になる。

通常は慣性系の速さ V [m/s] も、物体の速さ v' [m/s] も、光の速さ c に比べて十分に遅いので、速度の合成則 (5.17) の右辺の分母に現れる $\frac{V}{c}$ 、 $\frac{v'}{c}$ は 1 に比べて十分小さく、思い切って 0 にしてしまっても良いだろう。このときには十分な精度で、速度の合成則 (5.17) 式は

$$v = v' + V$$

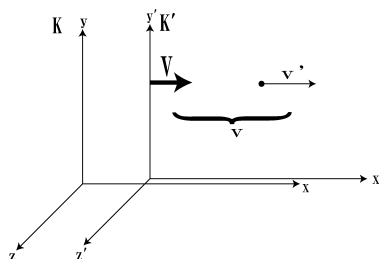


図 17:

と表せる。時速 60 キロメートル (V) のトラックから、トラックの進行方向に時速 100 キロメートル (v') で物体を投げ出したとき、地上に静止している人には物体は時速 160 キロメートル ($v = V + v'$) で動いているように (近似的に) 見えるわけである。

ところが、慣性系の速さ V か、物体の速さ v' のどちらか、あるいは両方が光の速さに近くなった状況では、このような近似はできない。たとえば、物体として光を考えてみよう。 K' 系での光の速さが c であれば、(5.17) 式に $v' = c$ を代入することになる。 K 系で見た光の速さ v は (5.17) 式から計算すると $v = \frac{c+V}{1+\frac{Vc}{c^2}} = c$ となり、 K 系で見た光の速さ v は確かに $v = c$ となることがわかる。すなわち、光速度は不変である。

§ 5.5 質量とエネルギーの等価性

光は、電磁波のところで見たとように、**波動**として振舞うが、1905 年のアインシュタインの光量子論以来、**粒子と波動の二重性**から、光も素粒子の一種であることが知られている。素粒子としての光を**光子**と呼び、エネルギーと運動量を持つ。光子の持つエネルギー E と運動量 p には

$$E = pc \quad (5.18)$$

の関係** がある。

さて、質量 M_1 の物体 1 と、質量 M_2 の物体 2 の 2 つの物体が、距離 $r_1 + r_2$ だけ離れて静止しているとしよう。ここで、2 物体の重心を原点に取り、図のように原点から左に r_1 の距離に質量 M_1 の物体 1 があり、右に r_2 だけ離れて質量 M_2 の物体 2 があるとす。重心 (慣性中心) の定義から

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 \quad (5.19)$$

が成り立っている。

今、質量 M_1 の物体 1 から、質量 M_2 の物体 2 に向けて光が放出されたとしよう。光が運動量 $p = E/c$ を右に運ぶので、運動量保存の法則から、質量 M_1 の物体 1 は運動量 p で左に動くはずである。しかし、質量 M_1 の物体 1 は左に進むので重心からの位置 r_1 が増大することから、質量 M_1 の物体 1 の質量が変わらなければ (5.19) 式に対応する重心の式が成り立たなくなる。このことは、最終的に光が右側の質量 M_2 の物体に吸収された瞬間を考えれば理解される。すなわち、右側の物体の位置は変わっていないが、左側の物体の位置は r_1 より大きくなっているの、そのままでは (5.19) 式は成り立たない。すなわち、物体 1 の重心からの距離 r_1 が大きくなることから、 M_1 は小さくならなければならない。

そこで、左の物体 1 の質量が $M_1 - m$ となったとしよう。質量が変わらないのであれば $m = 0$ となるだけなので、こう仮定しても問題はないだろう。

さて、もともと 1 の物体が光を放出したことにより得た左向き速さを V とすると、左の物体 1 の運動量保存則から、

$$(M_1 - m)V = p \quad (5.20)$$

**量子力学では、粒子としてのエネルギー E は波動としての振動数 ν と

$$E = h\nu,$$

粒子としての運動量 p は波動としての波長 λ と

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

の関係がある (アインシュタイン・ド・ブロイの関係)。ここで、 h は**プランク定数**と呼ばれる物理定数である。波の振動数と波長には $\nu\lambda = c$ の関係がある。ここで、 c は波の速さであり、光の場合には**光速**である。こうして、

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc$$

の関係が得られる。

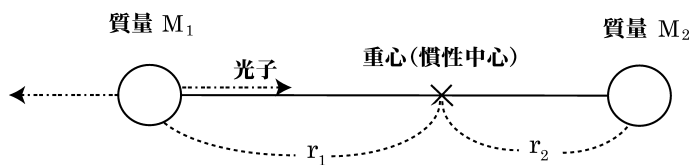


図 18:

となる。

質量 M_1 の物体 1 から放出された光が、質量 M_2 の物体 2 に到達した時間を t とすると光は光速 c で進むことから

$$ct = r_1 + r_2, \quad t = \frac{r_1 + r_2}{c} \quad (5.21)$$

となる。このときまでに、左の物体 1 は

$$Vt = \frac{V}{c}(r_1 + r_2) \quad (5.22)$$

だけ左に進んでいる。この時間 t が経過すると、放出された光は右に静止していた物体 2 の位置に到達し、物体 2 に吸収されてしまう。それでも、全体の運動量保存則から重心（慣性中心）の位置は変わらないので、時刻 t たった後の物体 1 の位置と物体 1 の質量の積は、物体 2 の位置と質量の積に等しいはずである。物体 1 が失った質量 m を物体 2 が得たとすると、運動量保存則により、2 物体の重心（慣性中心）は変化しないので

$$(M_1 - m) \left(r_1 + \frac{V}{c}(r_1 + r_2) \right) = (M_2 + m)r_2 \quad (5.23)$$

が成り立つはずである。ここで、 $V = p/(M_1 - m)$ を代入して

$$(M_1 - m)r_1 + \frac{p}{c}(r_1 + r_2) = (M_2 + m)r_2 \quad (5.24)$$

となるので、 $p = E/c$ であることを用いて整理して

$$E = mc^2 \quad (5.25)$$

が得られる。ここで、もともとの重心の位置の関係式 (5.19) を用いた。

すなわち、物体 2 は光を吸収することにより質量 $m = E/c^2$ だけ増加することを意味する。

こうして、質量とエネルギーは同じものであり、式 (5.25) は質量とエネルギーの等価性と呼ばれる。

§ 5.6 重力場による時間の遅れ

§§5.6.1 重力場による時間の遅れ

これまででは、力が何も働かない状況を考えていたが、最後に重力が働くところでの時間について考えてみよう。

重力（万有引力）は他の力と違って、特別な点がある。それは、重力の大きさが物体の質量に関係することから生じている。2 つの物体間にはそれぞれの質量の積に比例し、物体間の距離の 2 乗に反比例する引力が働くことが知られている。すなわち、2 つの物体の質量をそれぞれ m [kg]、 M [kg]、2 物体間の距離を r [m] とすると、物体にはそれぞれ

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

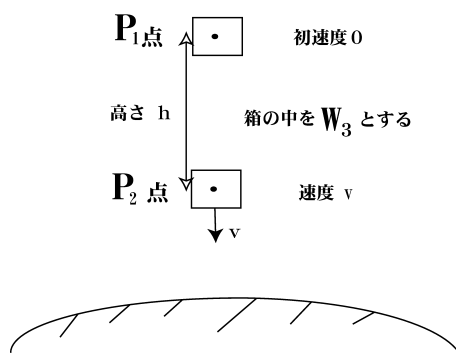


図 19:

という力 F が引力として働く。ここで、 G は万有引力定数と呼ばれる定数で、 $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ という値を持つ。これは**万有引力**または**重力**と呼ばれる力である。この重力で生じる物体の加速度を丁度打ち消すような加速度を持って運動している座標系では、局所的には、すべての物体に働く重力の効果を一旦消してしまうことが可能である。具体的には以下の通りである。ニュートンの運動法則によれば、力 F 、質量 m [kg]、加速度 a [m/s²] として

$$F = ma$$

という関係が与えられる。力として、質量 M [kg] の物体から受ける重力を考えると、

$$G \frac{mM}{r^2} = ma$$

となり、両辺から考えている物体の質量 m を落とすことができる。こうして、物体は加速度 a で運動しているが、逆に加速度 $-a$ で運動する座標系から見ると、物体は重力の影響なく運動しているように見えるはずである。逆に、重力場が無いところでも、一定の加速度 a で運動している座標系では、加速度の向きと反対向きに見かけの力を感じる。この見かけの力は先、ほどの重力と、私達には区別がつけられない。こうして、重力場の中の運動と加速度座標系での運動は区別できないことがわかる。これを**等価原理**と呼ぶ。

図 19 のように、重力場中で箱が自由落下している状況を考えてみよう。箱が P_1 点にあるとき、箱の速さは $V = 0$ であったとする。点 P_1 と箱の中 W_3 の相対速度は 0 であるので、両者は同じ慣性系にあると言える。よって、 P_1 点での時刻 t_1 [s] と、箱の中 W_3 での時刻 t_3 [s] の進み方は等しく、

$$t_1 = t_3 \tag{5.26}$$

が成り立つ。

続いて、箱が P_2 点に達したとき、重力により箱が加速されていて、箱の速さが V [m/s] になっているとしよう。箱の中に静止している人から見ると、 P_2 点は速さ $-V$ [m/s] で通り過ぎていくように見えるはずである。§§2.4.1 で説明された「時間の遅れ」を思い出すと、箱の中に静止している人に対して速度 $-V$ で動いている P_2 点の時刻 t_2 [s] (動いている座標系の時間なので t' に対応) は、箱の中の人の時刻の進み方 t_3 [s] (静止している座標系なので t に対応) より遅れている。式で表わすと

$$t_2 = t_3 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \tag{5.27}$$

という関係がついている。

(5.26) 式と (5.27) 式から t_3 を消去すると、 P_1 点での時間 t_1 と P_2 点での時間 t_2 の進み方を比べることが可能になる。

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1 \quad (5.28)$$

すなわち、重力が強い P_2 点の時間の進み方 t_2 は、重力場の弱い点 P_1 での時間より遅れることがわかる。重力が強いほど、時間の進み方はゆっくりになるということである。

発展課題： どんどん重力場を強くしていくと、時間の進み方はどうなるだろうか？ このような極限状態は、ブラックホールにおいて実現されます。ブラックホールについても調べてみよう。

§5.6.2 応用例：GPS 衛星

カーナビゲーションシステムや、携帯電話の位置情報などでは、“GPS(Global Positioning System)”を精度良く活用する必要がある。そのためには、実は相対性理論の知識は不可欠である。このことを以下に見ていこう。

GPS 衛星は高度 20200km の高さの軌道を、12 時間で地球を 1 周している。地球の半径はおおよそ 6400km なので、地表面に比べて GPS 衛星が感じる重力は弱く、地上の時間に比べて時間は進んでいるはずである (§5.6.1)。一方、GPS 衛星は動いているので、地上の時間に比べて GPS 衛星の時間は遅れるはずである (§5.4.1)。両者の寄与を合わせると、GPS 衛星の時計は、1 日あたりでは、GPS 衛星の“時間”は値所言うの私たちに対して、進んでいるのだろうか、遅れているのだろうか？ 今まで得た知識をもとに検討してみよう。

ひとまず、考えている物体の速さは光の速さに比べて十分小さいとして、重力場による時間の遅れ (5.28) 式、及び動く座標系での時間の遅れ (5.15) 式では、 $(1-x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{x}{2}$ という近似式を用いて

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \approx 1 - \frac{V^2}{2c^2}, \quad t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \approx t\left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right) \quad (5.29)$$

と近似しておこう (嫌だったら近似せずに数値を当ててみよう)。地球の半径は $R = 6.38 \times 10^6 \text{ m} = 6380 \text{ km}$ であり、GPS 衛星は高度 20200 km の高さにあるので、地球中心からは $R_{\text{GPS}} = 2.66 \times 10^7 \text{ m}$ となる。仮に、鉛直方向の運動を考えると、 R_{GPS} の高さにある物体が地表面で得る速さ $V \text{ [m/s]}$ は、力学的エネルギーの保存法則から

$$\frac{1}{2}mV^2 - G\frac{Mm}{R} = 0 - G\frac{Mm}{R_{\text{GPS}}}$$

により求められる。ここで、 $m \text{ [kg]}$ は考えている物体の質量、 $M \text{ [kg]}$ は地球の質量とした。すなわち

$$V^2 = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{\text{GPS}}}\right)$$

となる。(5.29) 式から、地上での時間 $t_{\text{地上}}$ と、GPS 衛星の時間 t_{GPS} の違いは、

$$\frac{t_{\text{地上}}}{t_{\text{GPS}}} \approx 1 - \frac{GM}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2 R_{\text{GPS}}} (< 1) \quad (5.30)$$

となり、地上の時間は GPS 衛星の時間に対して遅れることがわかる。遅れる割合として $-\frac{GM}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2 R_{\text{GPS}}}$ (< 0) が得られた。しかし、GPS 衛星は地球の周りを 12 時間で回転している。回転の角速度 ω_{GPS} は $\omega_{\text{GPS}} = 1 \text{ 回転} / 12 \text{ 時間} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ となる。角速度は単位時間に角度が変化する割合なので、高さ R_{GPS} のところ

にある衛星は $V_{\text{GPS}} = R_{\text{GPS}}\omega_{\text{GPS}}$ の速さで運動していることになる。地球は 1 日 1 回転しているので、角速度 $\omega_{\text{地球}}$ は $\omega_{\text{地球}} = 1 \text{ 回転} / 24 \text{ 時間} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ であり、簡単のために赤道上を考えると、 $V_{\text{地上}} = R\omega_{\text{地球}}$ の速さで動いていることになる。地球に対して遠方の時間を t とすると、動いていることによる時間の遅れは

$$t_{\text{地上}} \approx t \left(1 - \frac{R^2 \omega_{\text{地球}}^2}{2c^2} \right), \quad t_{\text{GPS}} \approx t \left(1 - \frac{R_{\text{GPS}}^2 \omega_{\text{GPS}}^2}{2c^2} \right)$$

と得られるので、両者の比をとると

$$\frac{t_{\text{地上}}}{t_{\text{GPS}}} \approx \frac{1 - \frac{R^2 \omega_{\text{地球}}^2}{2c^2}}{1 - \frac{R_{\text{GPS}}^2 \omega_{\text{GPS}}^2}{2c^2}} \approx 1 - \frac{R^2 \omega_{\text{地球}}^2}{2c^2} + \frac{R_{\text{GPS}}^2 \omega_{\text{GPS}}^2}{2c^2} \quad (> 1) \quad (5.31)$$

が得られる。ここで、 x が 1 に比べて十分小さいときの近似式 $\frac{1}{1-x} \approx 1+x$ を用いた。こうして、地上の時間は、GPS 衛星が地表面より早く動いていることにより、GPS 衛星の時間より進んでいることがわかった。その相違として $-\frac{R^2 \omega_{\text{地球}}^2}{2c^2} + \frac{R_{\text{GPS}}^2 \omega_{\text{GPS}}^2}{2c^2}$ (> 0) が得られた。重力場の違いによる GPS 衛星の時間の進みと、衛星が動いていることによる遅れを合わせると

$$\frac{t_{\text{地上}}}{t_{\text{GPS}}} \approx 1 - \frac{GM}{c^2 R} + \frac{GM}{c^2 R_{\text{GPS}}} - \frac{R^2 \omega_{\text{地球}}^2}{2c^2} + \frac{R_{\text{GPS}}^2 \omega_{\text{GPS}}^2}{2c^2} = 1 - 4.47 \times 10^{-10} \quad (5.32)$$

が得られる。1 日 ($24 \times 3600 = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$) 経てば、 $3.86 \times 10^{-5} \text{ 秒} \approx 39 \text{ マイクロ秒}$ ずれるというわけである。GPS 衛星の時計は、1 日あたりおよそ 39 マイクロ秒だけ地上の時間より進む。

計算するには地球の質量が必要だ？重力加速度 $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ の原因は地球の重力なのだから、 $G \frac{M}{R^2} = g$ という関係が成り立っていることを思い起こそう。

さて、GPS 衛星からの信号は光の速さで来るので、GPS 衛星と地上の時計が 1 日に 39 マイクロ秒も狂うと、39 マイクロ秒 $\times c \text{ m/s} \approx 12 \text{ km}$ も位置情報が狂うことになってしまい、位置情報を与えるナビゲーションシステムとしては役に立たないであろう。

実際には、この時間のずれを補正して、GPS は制度良く運用されているのである。