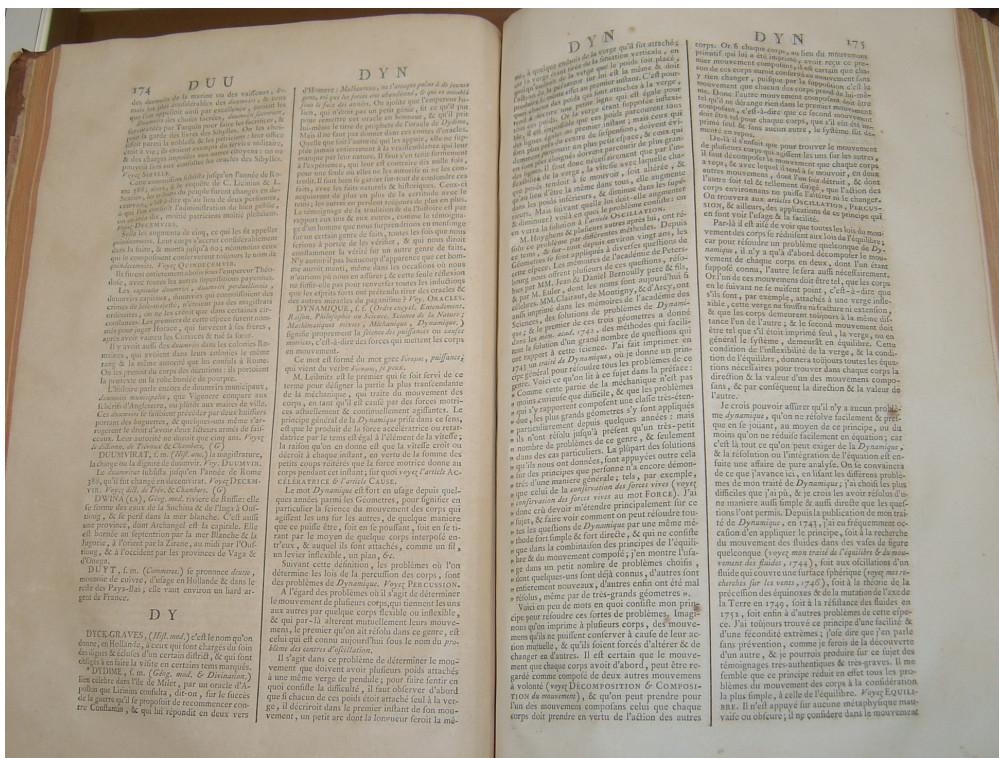


新・物理学概論



「百科全書（初版 1751-1780）」Dynamique（動力学）の頁（高知大学附属図書館蔵）

高知大学理工学部 数学物理学科物理科学コース

津江保彦*

*© Yasuhiko TSUE

ホームページは、<http://www.cc.kochi-u.ac.jp/~tsue/>

（別館も見てね）

目次

1章 道具としての数学：ベクトルと微分	2
§1.1 位置と座標系	2
§1.2 ベクトルの演算	3
§1.3 微分係数としての速度・加速度	5
§1.4 スカラー場の勾配、ベクトル場の発散・回転	5
§§1.4.1 スカラー場の勾配	5
§§1.4.2 発散と回転	6
2章 ニュートンの三法則	10
§2.1 ニュートンの三法則	10
§2.2 微分方程式としてのニュートンの第2法則—運動方程式—	11
§2.3 単位系	11
3章 地上物体の運動	13
§3.1 万有引力の法則	13
§3.2 地上付近での物体に働く重力	15
§3.3 地表付近での物体の上下方向の運動	16
§3.4 大気から速さ v に依存した抵抗を受けて自由落下する質点	16
4章 保存法則	18
§4.1 運動量保存則	18
§§4.1.1 運動量保存則	18
§§4.1.2 慣性中心	19
§4.2 中心力と角運動量保存則	19
§§4.2.1 中心力	19
§§4.2.2 角運動量保存則	19
§4.3 保存力と力学的エネルギー保存則	20
§§4.3.1 仕事と保存力	20
§§4.3.2 エネルギー保存則	21
5章 振動	22
§5.1 単振り子	22
§5.2 単振動	23
§5.3 強制振動と共鳴	24
6章 剛体の力学	27
§6.1 角速度	27
§6.2 剛体の角運動量と慣性モーメント	28
§6.3 剛体回転の運動方程式	29
§6.4 対称コマの自由回転	30
§6.5 剛体の釣り合い	30

7章 波動	32
§7.1 波動方程式	32
§7.2 振動数・波長	33
§7.3 波の屈折	34
§7.4 音波	36
8章 流体	38
§8.1 流体の運動方程式	38
§8.2 完全流体の場合	39
§§8.2.1 具体例	40
9章 気体分子運動論	41
§9.1 気体分子運動論と理想気体の状態方程式	41
§9.2 非理想気体の状態方程式—Van der Waals 方程式—	43
10章 熱力学の法則	45
§10.1 エネルギー保存則と熱力学第1法則	45
§§10.1.1 断熱過程	45
§10.2 熱力学第2法則とエントロピー	47
§10.3 エンタルピー	48
§10.4 ヘルムホルツの自由エネルギー	48
§10.5 ギブスの自由エネルギー	49
§10.6 マクスウェルの関係式	49
11章 電磁気学の基本	51
§11.1 マクスウェル方程式	51
§11.2 クーロンの法則	52
§11.3 単磁化の不在	53
§11.4 マクスウェル・アンペールの法則	54
§11.5 ファラデーの電磁誘導の法則	56
§11.6 歴史の断章	56
12章 電磁気学の応用	58
§12.1 オームの法則	58
§§12.1.1 オームの法則	58
§§12.1.2 ジュール熱	59
§12.2 電磁波	60
13章 相対性理論	62
§13.1 アインシュタインの特殊相対性原理と光速不変の原理	62
§13.2 光速不変の原理と同時刻の相対性	63
§13.3 ローレンツ変換	64
§13.4 ローレンツ変換からの帰結	66
§§13.4.1 動いている慣性系の時間の遅れ	66
§§13.4.2 ローレンツ収縮	67

§§13.4.3 速度の合成則	68
§13.5重力場による時間の遅れ	69
14章 質量とエネルギーの等価性	71
§14.1質量とエネルギーの等価性	71
§14.2太陽のエネルギー源と寿命	72
15章 量子科学	74
§15.1不確定性原理	74
§15.2 シュレーディンガー方程式とアインシュタイン・ド-ブロイの関係	77
§15.3シュレーディンガー方程式とエネルギーの離散化	78
§15.4トンネル効果	80
16章 まとめ	82

1章 道具としての数学：ベクトルと微分

自然を語る言葉 ... 数学

§ 1.1 位置と座標系

物体の運動を扱うには、物体が今 (時刻 t で) どこにいて (位置)、どの方向にどれだけの速さで動いているかを知らねばならない。その為には、物体の位置を時間の関数として表すことが、初めの第1歩となる。そこで、物体の位置を表す方法を考えよう。

基準点 O から、点 P へは、 $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ として、大きさと向きを持つ量、ベクトルで表す。ベクトルは太文字で表わすことにする*。基準点 O からある方向に x 軸をとり、それに垂直な方向に y 軸、さらに x 軸と y 軸に垂直に z 軸をとる。このとき右手の親指、人差し指、中指で3つの直交する軸を表したときに指の向く方向をそれぞれ x 、 y 、 z 軸の正の方向になるように取る (右手系)。これをデカルト座標系と呼ぶ。

長さ1の単位ベクトルをそれぞれの軸の正方向にとり、それらを \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z と書くと位置ベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

と記すことができる。ベクトルを“成分”で表すと、

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書ける。

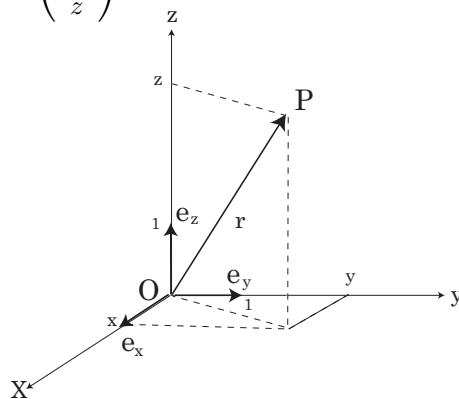


図 1:

*高等学校では \vec{a} 等と表わしていたものを、 \mathbf{a} と記す。

§ 1.2 ベクトルの演算

以下、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ 等とする。

- ベクトルの大きさ（長さ）

ベクトルの大きさは、ベクトルの長さのことである。三平方の定理を使うと、容易に

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

であることがわかる。

- ベクトルの加法・減法

2つのベクトルを足し合わせたベクトル

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

は、次の成分を持つ新しいベクトル

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

である。また、減法（引き算）のためには次の関係を知っていればよい。

$$-\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix}$$

こうして、

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) .$$

- ベクトルの内積（スカラー積）

2つのベクトルから、ある数を生じる次の演算を、ベクトルの内積と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= ab \cos \theta . \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで、 θ は2つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角である。

- ベクトルの外積（ベクトル積）

2つのベクトルから新しいベクトルを生じる次の演算を、ベクトルの外積と呼ぶ[†]。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} .$$

新しいベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を成分で書くと

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

[†]2つのベクトルから新たなベクトルを作る演算であるベクトルの外積は、またベクトル積とも呼ばれる。ここで記したようなベクトル積は3次元空間であることにより導入できる。2次元のベクトルではベクトル積は定義されない。次にベクトル積が定義できるのは7次元（7成分を持つベクトル）の時になる。これは、閉じた代数系として4元数が存在できることで、3次元空間でのベクトル積が定義でき、次に閉じた代数系としては8元数が定義できることから（1次元減じた）7次元空間でベクトル積が定義できることが知られている。

となる。ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が向いている方向は、ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} を含む平面に垂直で、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{e} の順に右手系をなす単位ベクトル \mathbf{e} の方向である。またベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは $ab \sin \theta$ となる。ここで θ は2つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} のなす角である：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{e} .$$

[註] 2つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} が含まれる平面に垂直に z 軸を取り、ベクトル \mathbf{a} の方向に x 軸をとる。2つのベクトルのなす角を θ とすると、それぞれのベクトルは成分表示で

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \cos \theta \\ b \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

とかけるので、内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \equiv ab \cos \theta + 0 \times b \sin \theta + 0 \times 0 = ab \cos \theta .$$

となることがわかる。同様にして、外積は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 - 0 \times b \sin \theta \\ 0 \times b \cos \theta - a \times 0 \\ ab \sin \theta - 0 \times b \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ab \sin \theta \end{pmatrix}$$

となり、確かに \mathbf{a} と \mathbf{b} を含む平面に垂直に z 軸をとったので、 z 成分しか残っておらず、 \mathbf{a} と \mathbf{b} に垂直で、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が右手系を為すような方向に $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が存在することがわかる。

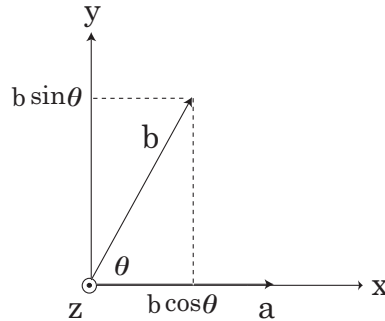


図 2:

(問) \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} を 3次元のベクトルとすると、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

§ 1.3 微分係数としての速度・加速度

次に、物体の運動を表すために、物体の速度を数学的に表すことを考えよう。ある時刻に質点が位置 $\mathbf{r}(t)$ にいたが、微小時間 Δt 経過後には $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ に到達していたとする。すなわち、質点は微小時間 Δt に $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ だけ移動している。3方向まとめてベクトルで表したが、 x 方向には $\Delta x \equiv x(t + \Delta t) - x(t)$ 、 y 方向には $\Delta y \equiv y(t + \Delta t) - y(t)$ 、 z 方向には $\Delta z \equiv z(t + \Delta t) - z(t)$ だけの距離を移動したということを示していることに注意しよう。このとき、時刻 t での質点の速度 $\mathbf{v}(t)$ は、移動距離 $\Delta \mathbf{r}$ をかかった時間 Δt で割り算して

$$\mathbf{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (1.3)$$

により表される。

デカルト座標では、ベクトル表示を成分で表して

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt} \quad (1.4)$$

と書ける。

さらに加速度 $\mathbf{a}(t)$ は速度 $\mathbf{v}(t)$ の変化率であるので、速度を導いたときと同様な考え方で

$$\mathbf{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad (1.5)$$

と導かれる。デカルト座標では、ベクトル表示を成分で表して

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} \quad (1.6)$$

と書ける。ここで、 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 等は時間 t についての2階微分である。

§ 1.4 スカラー場の勾配、ベクトル場の発散・回転

§§1.4.1 スカラー場の勾配

次に、空間に数やベクトルが散らばっている場合を考えよう。例えば、空間の各点に、数値としての温度が分布していることであり、水の流れを考えると各点で水の速度ベクトルが分布していたりする。このように、時空間に数値が分布しているとき、その数値の集まりをスカラー場と呼び、ベクトルが分布しているとき、それをベクトル場と呼ぶ。

まず、スカラー場、ベクトル場の微分を考えておこう。3次元空間で考える。空間にある数が分布しているとしよう。これらは場所 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の関数と見なされるので、 $\varphi(\mathbf{r})$ と表わそう。この関数は、 x 、 y 、 z の3変数に依存するので、導関数は、 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial z}$ の3つ存在する。これらを偏導関数と呼ぶ。偏導関数を導くための偏微分は、例えば x で微分する際には y と z は定数と見なして普通に x で微分すればよい。これらを纏めて、

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial z} \end{array} \right) \equiv \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

と記す。すなわち、偏微分により、スカラー場 $\varphi(\mathbf{r})$ からあらたにベクトル場が作られることになる。ここで、 ∇ は偏微分記号を並べて作った“ベクトル演算子”であり、ナブラと読む：

$$\nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (1.8)$$

また、grad はグラジエントと呼ばれ、勾配を意味する。

今、値の等しい等位面、すなわち $\varphi(\mathbf{r}) = (\text{一定})$ が成り立つ面が存在するとしよう。このとき、 \mathbf{r} の近傍 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ で φ の値は等しいので、 $\varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r})$ が成り立っている。左辺をテーラー展開[‡]すると

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &\approx \varphi(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial z} dz \right) \\ &= \varphi(\mathbf{r}) + \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

が得られるが、等位面では左辺が $\varphi(\mathbf{r})$ に等しいことから、

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が得られる。すなわち、勾配 $\nabla \varphi(\mathbf{r})$ から作られるベクトル場は、もとのスカラー場の等位面上のベクトル $d\mathbf{r}$ に直交していることがわかる。すなわち、勾配の方向は等位面に直交する方向であることがわかる。

§§1.4.2 発散と回転

次に、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x(\mathbf{r}), A_y(\mathbf{r}), A_z(\mathbf{r}))$ を考えよう。微分演算子 ∇ とベクトル場は、形式的に内積・外積の双方を考えることができる。もちろん、微分記号は微分されるべき関数の左に置かれる。

まず、内積を考えよう。

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x(\mathbf{r})}{\partial x} + \frac{\partial A_y(\mathbf{r})}{\partial y} + \frac{\partial A_z(\mathbf{r})}{\partial z} \equiv \text{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.9)$$

ここで、div はダイバージェンスと読み、発散を意味する。

次に、外積を考える。

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \equiv \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.10)$$

ここで、rot はローテーションと読み、回転を意味する。

発散と回転の物理的意味を見ておこう。図3のような2つのベクトル場

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

[‡]この章の最後の註を参照のこと。

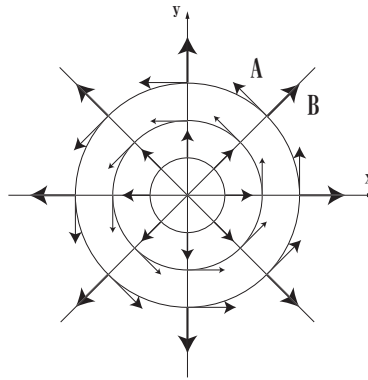


図 3:

を考えてみる。図 3 からわかるように、ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は原点を中心に x - y 面で渦を巻いている場であり、ベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は x - y 面上に原点近傍から湧き出しているベクトル場である。このとき、発散、回転を計算すると

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 2 \neq 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる。このように、渦を巻くのみで湧き出しのないベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対しては、回転は零でないが、発散は零となる。湧き出しのみあり、渦の無いベクトル場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ では、回転は零であるが発散は零でない。このように、発散はベクトル場の湧き出し（または吸い込み）を、回転はベクトル場の渦（回転）を特徴的に捉えるものと見て良からう。

(問) ϕ をスカラー場 $\phi(\mathbf{r})$ 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} をベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ として、勾配、発散、回転の絡む次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \mathbf{0}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

ここで、

$$\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義されている（ラプラシアンと言う）。

[註] 図4のように、ある関数 $f(x)$ の点 x での値を、 x_0 での関数値 $f(x_0)$ を用いて近似的に表すことを考えよう。まずは、 $f(x) \approx f(x_0)$ としてしまうことであるが、あまりにも粗い（これだと、任意の x で $f(x) = f(x_0) = (\text{一定})$ になってしまう）。そこで、図のように、関数 $f(x)$ の x_0 での接線の傾き、つまり微係数 $f'(x_0)$ $\left(= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \right)$ を用いて、 $f(x_0)$ の値から“持ち上げ”てみよう。 x_0 から x まで、 $x - x_0$ だけ進むと、関数は図のように（傾き） \times （ x 軸で進んだ長さ） $= f'(x_0) \times (x - x_0)$ だけ“持ち上”がる。こうして、

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot (x - x_0)$$

と近似できるであろう。近似の精度を上げるには、関数の“開き具合”（上に凸とか下に凸とか）を考慮して、2次関数で近似する。その時には $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$ という関数の“開き具合”を使い、

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} \cdot (x - x_0)^2$$

とする。右辺の2階微分の前の係数 $\frac{1}{2}$ は、左辺を2階微分した時に両辺が一致するために必要である。さらに近似を上げるには、3次関数、4次関数…としていけば良く、

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2f(x_0)}{dx^2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f(x_0)}{dx^3} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} (x - x_0)^n \end{aligned} \quad (1.11)$$

とすればよいことがわかる ($n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1$)。これをテーラー展開と言う。

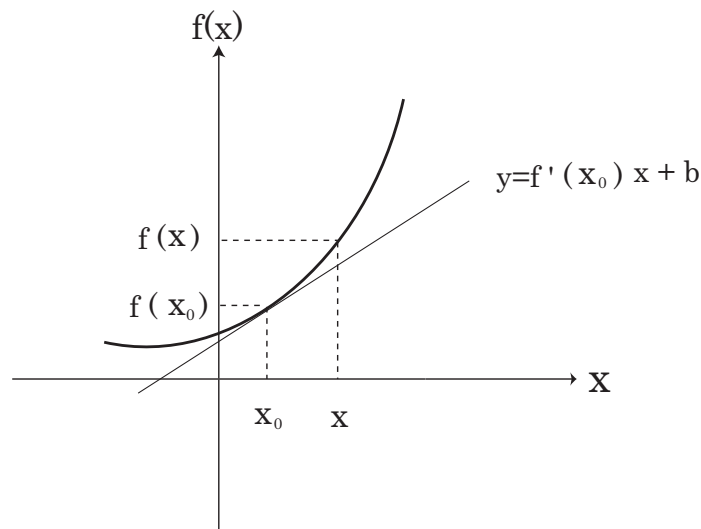


図 4:

§

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	グザイ(クシー)
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
E	ϵ, ε	イプシロン	P	ρ	ロー
Z	ζ	ゼータ(ジータ)	Σ	σ	シグマ
H	η	イータ	T	τ	タウ
Θ	θ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
I	ι	イオタ	Φ	ϕ, φ	ファイ
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ

§日本語や英語などの「自然言語」だけでは自然法則を精確に語り得ない。日常の言葉では伝えることがどうしてもできない。世界とは、その場に起こることのすべてである、かもしれないが、語りえぬことについては、沈黙しなくてはならない、かどうかは自明ではない。現時点で、何が語り得て、何が語り得ないかを見極めることこそ重要であろう。

2章 ニュートンの三法則

$$F = ma \quad (\text{ニュートンの運動方程式})$$

§ 2.1 ニュートンの三法則

まず、数学的定式化の第一歩として、ある物体の運動を記述するとき、その大きさが無視できる物体のことを考える。これを質点と呼ぶ。

アイザック・ニュートン(1642-1727)は、次の3つの法則を基本法則と考えた*。

第1法則 … (慣性の法則)	すべての物体は、外力によって強制されない限り、静止の状態、または直線上の様な運動の状態(等速直線運動)を続ける。
第2法則 … (運動の法則)	物体の運動(量)の変化は、作用する力の大きさに比例し、力の向きにおこる。 $F = m a$ (力) = (慣性質量) × (加速度)
第3法則 … (作用・反作用の法則)	作用には反作用を伴い、2物体相互の作用は常に大きさが等しく、逆向きである。

外から力が働かなければ、静止している物体は静止し続けたまま動かないし、動いている物体はその動きをやめないであろう(何もない宇宙空間で運動している物体を想像してみよう)。こうして、外力が働かない限り、運動状態は変化しないことがわかる。ここで、運動状態とは粒子の速度(正確には運動量。次節で導入する)で指定されていることに注意。この事実が第1法則の内容である。

では、運動状態を変化させるにはどうしたらよいだろうか。第1法則で除外されていた、力を作用させればよいことが直ちにわかる。力を作用させれば、運動状態が変化するということだ。では、運動状態が変化するのは? 運動状態は速度で指定されていた。その状態が変わったということは、速度が変化したということだ。速度の変化を加速度と呼ぶ。したがって、力と加速度(速度の変化。速度の向きの変化も含む)を結びつけるのが第2法則の内容である。経験的に、静止した重い物体[†]を動かす(速度を与える)には大きな力が必要である。そこで、力と加速度を結び付ける係数として物体の質量をとることが妥当であると考えられる[‡]。

2つの物体がお互いに力を及ぼすときには、第3法則に示されるように働く。法則3は法則1とあわせると、幾つかの物体からなる系の“慣性中心(重心)”は静止、または一様な直線運動をすることを示すことができる

* 「自然哲学の数学的諸原理(通称、プリンキピア)」(1687年)

[†] 重さは重力質量と呼ばれ、万有引力(3章で見る)の源になる量である。ここでは物体の動き難さを示す物理量である慣性質量があらわれる。しかしながら、すべての物体で慣性質量と重力質量の比は一定であるので、この比例係数を1にとるように単位をとって、重力質量と慣性質量を区別しないことにする。重力質量と慣性質量の比がすべての物体で等しいという事実をもとにすると、アインシュタインの一般相対性理論を構成することが出来る。

[‡] 力は英語で force、質量は mass、加速度は acceleration なので、それぞれの頭文字をとって、運動方程式は $F = ma$ と書かれる。

(4章)。体系内の物体同士の相対運動は慣性中心の運動に無関係であることを意味する。これは、ガリレイの相対性原理として知られている事実である。

§ 2.2 微分方程式としてのニュートンの第2法則—運動方程式—

ニュートンの第2法則を数式で表そう。質点に働く力を \mathbf{F} [N]、質点の質量を m [kg] とし、速度を \mathbf{v} [m/s] とする[§]。今、運動量 \mathbf{p} を次のように導入しておく。

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} . \quad (2.1)$$

すなわち、(運動量)=(質量)×(速度)である。加速度 \mathbf{a} は速度 \mathbf{v} の時間に関する微分、すなわち $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ であり、今、質量 m が時間に依存しないときには $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$ であるので、ニュートンの第2法則は次のように、時間に関する微分方程式として表される：

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \left(\text{または} \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \right) \quad (2.2)$$

質量 m が時間に依存しなければ[¶]、時間微分の前に出しておく。さらに、速度は質点の位置ベクトル \mathbf{r} の1階時間微分、 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ であることから、

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

と書ける。

§ 2.3 単位系

ここでは MKSA 単位系と呼ばれる単位系を用いる。まず、長さ ([L])、時間 ([T])、質量 ([M]) の単位を与える。

長さ (距離) :	メートル (m)
時間 :	秒 (s)
質量 :	キログラム (kg)

その他の力学量はこの3つの組み合わせで表せる。たとえば、

$$\begin{aligned} \text{速度} &: (\text{距離})/(\text{時間}) \cdots \text{m/s} \\ \text{加速度} &: (\text{速度の変化})/(\text{変化に要した時間}) \cdots \text{m/s}^2 \\ \text{力} &: \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \cdots \text{kg m/s}^2 \equiv \text{N} \end{aligned}$$

ここで、力の単位は、普通、 kg m/s^2 の代わりに、N (ニュートン) を用いる。

1秒は「セシウム 133 原子の基底状態における2つの超微細構造準位の間遷移に対応する放射の9192631770周期の継続時間」、1mは、「光が1/299792458秒間に真空中を進行する距離」、1kgは「フランスのセヴレ市にある国際度量衡標準局に保存されているプラチナ・イリジウム合金円柱の質量」と定義されている。

[§]以下では関数の引数 t をしばしば省略する。ここで、 t [s] は時間を表わす。

[¶]実は、運動量の時間微分が力と等しいという方程式が基本である。

電磁気現象では、長さ、時間、質量に加えて、電流の単位、アンペア ([A]) を用いる。1A は、「1m 離して真空中に平行おかれた導線に、同方向に流れる 2 本の直線電流間に働く力が導線 1m あたり 1N であるときの電流の大きさ」として導入される。

∥

∥ニュートンの 3 法則に辿り着くまでの歴史は見ておく価値があるが、科学史の講義ではないので割愛する。何年も何十年も何百年も何万年も前から、いや宇宙創成から物理法則は存在していたが、人はその法則を探し求め、400 年余りにニュートンが 3 法則にたどり着いた。第 1 法則はガリレオ・ガリレイ (1546-1642) が惜しいところまで発見していた慣性の法則を精密化したものである。第 3 法則は、ルネ・デカルト (1596-1650) が、2 物体の衝突の問題解明から気づいていたことである。ニュートンの第 2 法則は、物体の運動の速さが光速に比べて小さいときに精度よく成り立つが、光速に近い物体の運動では修正を受けることを 1905 年にアルベルト・アインシュタインが明らかにする。また、原子や素粒子などの微視的世界ではやはりニュートンの第 2 法則は変更される。これは 1925 年の量子力学により成し遂げられた。

3章 地上物体の運動

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (\text{万有引力の法則})$$

§ 3.1 万有引力の法則

まずは、空間の次元を制限して、力を考えてみよう*。空間が1次元しかない（1方向（とその反対方向）にしか広がっていない）世界を想像してみる。力には、力を産む源があると考えよう。電気だと電荷だし、万有引力だと質量である。力の源泉の強さを g としておく。この力は1次元のみの空間では、右に $\frac{g}{2}$ 、左に $\frac{g}{2}$ の効力を持って伝わると考えればよい。左右とも同等だから等しい効力が伝わり、合計は g のはずだ。このときには、力の源からの距離によらず、力は一定の効力 $\frac{g}{2}$ に比例する。つまり、空間が1次元しかないとき、力 F は

$$F = \sigma' \cdot \frac{g}{2}$$

の形を持つと結論できる。ここで、 σ' はある係数である。

次に、空間が2次元である世界を想像しよう。2次元平面である。中心の力の源の強さ g は四方へ伝わり、力の効力は力の源泉からの距離とともに薄くなる。中心から半径 r のところを考えると、半径 r の円周上にまで伝わった力の効力をすべて寄せ集めて足し上げると、もとの力の源泉 g になっているはずなので、半径 r のところで、力がどれだけ弱くなっているかという、半径 r の円周の長さは $2\pi r$ であることから、 $\frac{g}{2\pi r}$ のように、効力は半径 r とともに弱まっていると考えられる。なぜなら、すべての円周上での効力を足し合わせると、（薄まった力の効力） \times （円周すべての点の寄与） $= \frac{g}{2\pi r} \times 2\pi r = g$ となって、確かに力の源泉の大きさに戻るからである。こうして、空間が2次元しかなかったら、その2次元世界での力の法則は

$$F = k' \cdot \frac{g}{2\pi r}$$

のようになるはずである†。ここで k' はある比例定数である。こうして2次元世界では力は距離に反比例する。作用・反作用の法則を考えると、力を受ける物体も力の源泉としての物体に同等の力を及ぼすので、力を受ける側の力の源泉の大きさを g' とすると、上記の2次元世界での力の法則は

$$F = \frac{k}{2\pi} \cdot \frac{gg'}{r}$$

のようになる。ここで r は2物体間の距離であり、 k ($k' = kg'$) は定数である。

*この節の議論は、基本的な力についてのみを対象とする。重力、電磁気力、及びベータ崩壊を引き起こす弱い力（相互作用）、原子核の中で陽子・中性子に働く、あるいは陽子・中性子を構成するクォーク間に働く強い力（弱い相互作用）が基本的な4つの力（強い相互作用）である。抵抗力や摩擦力などは副次的な力なので、この節の議論の対象外である。

†無限に長い導線を考え、そこに電流 I を流す。電流に垂直な平面は、導線のどの点を中心にした平面も同等なので、導線方向には、なんら特殊性はなく、導線に垂直な2次元平面で物事を考えればよくなる。あたかも2次元世界が実現したかのようになる。電流はその周りに円環的に磁場を作ることが知られているが、無限に長い導線に電流 I を流すと、考えている平面内で導線からの距離 r のところで作られる磁場の大きさ H は、2次元的であるからただちに、

$$H = k \frac{I}{2\pi r}$$

となることがわかる。単位の取り方によって定数 k は決まるが、通常 $k = 1$ となる単位系を採用している。

では、空間3次元の私たちの世界では、一般に力の法則はどのように距離 r に依存するだろうか。中心の力の源の強さ g は四方八方へ伝わり、その効力は薄くなる。中心から半径 r のところを考えると、半径 r の球面上にまで伝わった力の効力をすべて寄せ集めて足し上げると、もとの力の源泉 g になっているはずだ。2次元で考えたときと同じことが起きているはずである。半径 r のところで、どれだけ弱くなっているかという、半径 r の球面の面積は $4\pi r^2$ なので、 $\frac{g}{4\pi r^2}$ に従って、効力は半径 r とともに弱まっていると考えられる。なぜなら、半径 r の球面上での効力をすべて足し合わせると、(薄まった力の効力) \times (球面すべての寄与) $= \frac{g}{4\pi r^2} \times 4\pi r^2 = g$ となって、確かに力の源泉の大きさが得られる。こうして、空間3次元の私たちの世界では、力の法則は

$$F = \frac{k'}{4\pi} \cdot \frac{g}{r^2}$$

のようになると期待される。ここで k' はある比例定数である。2次元世界で考えた時と同様に、作用・反作用の法則を考慮すると、互いに力を及ぼしあう2つの物体が持つ力の源泉の強さをそれぞれ g, g' とすると、力は

$$F = \frac{k}{4\pi} \cdot \frac{gg'}{r^2}$$

となる。

さて、質量を持つ物体は、必ず質量に起因した引力を及ぼしあうことが実験事実として認められている。この力は重力または万有引力と呼ばれる。力は質量に働くので、「力の源泉 g, g' 」を「質量 m_1, m_2 」と読み替え、定数 $\frac{k}{4\pi}$ を G と書くと

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

となる[‡]。ここで、 r は2物体間の距離、 G は万有引力定数と呼ばれる定数であり、

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg s}^2 \quad (3.2)$$

という値を持つ。重力は必ず引力であるので、一つの物体からもう一つの物体に向く、大きさ1のベクトル(単位ベクトル)を e_r と書くと、向きまで含めて

$$\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} e_r \quad (3.3)$$

と書ける。これを万有引力の法則と呼ぶ[§]。

[参考] 素粒子の中でも、陽子や中性子等はクォークと呼ばれる基本粒子から構成される。しかしながら、単独ではクォークを取り出すことが出来ない。クォーク間には「色電荷」と呼ばれる力の源を持つ(「色」とついているが、実際の色とは無関係)。電磁気学で見るように、電荷間には「電気力線」がのびていると考えても良いが、電気力線は四方八方へと拡がる。このことが力が2物体間の距離の2乗に反比例する原因であった。ところが、クォークの色の電荷間に伸びる「色力線」は、図5のように、チューブ状、1次元方向に絞られてる。これは強い相互作用における真空の性質(完全反誘電性と呼ばれる)なのだが、兎に角、1次元的に

[‡]歴史的には、このように次元性から力の法則が導かれたわけではない。ニュートンは、ケプラー(1571-1630)が発見していたケプラーの三法則を説明するために万有引力の法則を見出した。ケプラーの三法則とは、(I)すべての惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を運動している(1609年)。(II)太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃いていく面積は一定である(1609年)。(III)惑星の公転周期の2乗は軌道の大きさ(楕円の長径)の3乗に比例する(1619年)。

[§]電気力では、物体のもつ電荷の間に力が働く。一方の物体の電荷を q_1 、もう一方の電荷を q_2 とすると

$$\mathbf{F} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} e_r$$

となる。これは電荷に関するクーロンの法則として知られている(キャヴェンディッシュ(1773年)、クーロン(1785年))。同種の電荷間では斥力、異種の電荷間では引力になる。

しか力は伝播しない。ということは、クォーク間に働く力は、あたかも空間が1次元しかないように考えてよいということであり、力は、1次元の空想世界で見たように、 $F = \frac{\sigma'}{2}g$ のように、距離に依存しない。そこで、改めて $\sigma \equiv \frac{\sigma'}{2}g$ と定数を書き直すと

$$F = \sigma$$

となる。さて、クォークと（反）クォークがくっついているとして、この力に抗してクォークを取り出そうとしよう。一方のクォークを引っ張てやればよからう。しかしながら、常に力 F に抗して引っ張らないといけないので、クォークを取り出そうとすると無限に一定の力を加え続けなければならないことになる（距離とともに弱くならないので）。後に（4章で）見るように、必要なエネルギーは、（力）×（移動距離）として与えられるので、クォークを取り出して無限遠方に単独で置くために、我々が必要なエネルギーは

$$F \times (r \rightarrow \infty) = \infty$$

となって、無限のエネルギーが必要になる。この事実はクォークの閉じ込めと呼ばれる[¶]。

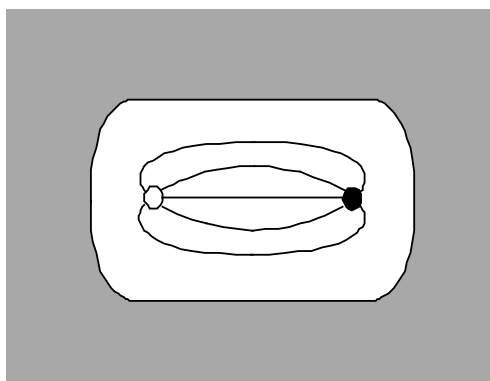


図 5:

§ 3.2 地上付近での物体に働く重力

地球を一様な球とし、その質量を M [kg]、半径を R [m]、地表から物体までの距離を h [m] とすると、質量 m [kg] の地上物体に働く力の大きさは $f = G \frac{mM}{(R+h)^2}$ である^{||}。地表から物体までの距離 h [m] が地球の半径 R [m] に比べて十分小さいとすると、分母の h は R に対して無視して良いであろう。この力 f [N] により物体は力を受けて加速度が生じるとすると、その加速度を g [m/s²] と書くことにして、

$$mg = f \approx G \frac{mM}{R^2}, \quad \text{すなわち} \quad g = G \frac{M}{R^2}. \quad (3.4)$$

よって、重力の法則から、地表付近では物体に依らず、物体は一定の加速度 g のもとで鉛直下向きに $f = mg$ の力を受けて運動することが言える。この g が重力加速度である。その値はおおよそ $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ である。

[¶]君の心を閉じ込めておく方法は、寡聞にして知らない。

^{||}距離の2乗に反比例する力の場合には、一様な球が、球の外に置かれた物体に及ぼす力は、力の原因（重力の場合には質量）が球の中心に集中していると考えて計算すればよいことが（少しの積分などを用いて）示すことができる。ここでは、その結果を使おう。

§ 3.3 地表付近での物体の上下方向の運動

鉛直下向きに z 軸をとろう。重力加速度を g [m/s²] とし、物体は下向きに力 mg [N] を受けるので、運動方程式 (2.3) の z 成分は

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) = mg$$

となる。両辺 m で割っておいてから時間について 1 回積分すると

$$v_z \equiv \frac{dz(t)}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) dt = \int g dt = gt + v_0 .$$

ここで、 v_0 [m/s] は時刻 $t = 0$ での速度であり、“初速度”と呼ばれる。さらに時間について積分すると

$$z(t) = \int \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) dt = \int (gt + v_0) dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 .$$

ここで、 z_0 は $t = 0$ での質点の位置である。

v_0 、 z_0 をそれぞれ、速度、位置の初期条件という。ニュートンの運動方程式は時間に関して 2 階微分方程式なので、2 回積分することにより 2 つの積分定数が現れるが、それは初期条件により決められる。今の場合、初速度 $v_0 = 0$ のとき、質点は自由落下するという。このとき、質点の進む距離は、 $\frac{1}{2}g$ を単位にして、 $t = 0 \sim 1$ 、 $1 \sim 2$ 、 $2 \sim 3$ 、 $3 \sim 4$ 、 \dots に対して、1、3、5、7、 \dots である。これはガリレイが発見した落体の等加速度運動に他ならない**。

§ 3.4 大気から速さ v に依存した抵抗を受けて自由落下する質点

空気中での物体の運動は、空気から抵抗力を受けているはずである。ここでは、(i) 速さに比例する抵抗力 μv (μ は定数) を受ける場合、及び (ii) 速さの 2 乗に比例した抵抗力 γv^2 (γ は定数) を受ける場合、の 2 つの場合について††、重力と抵抗力が釣り合ったときの速度を求めておこう。

鉛直下向きに z 軸をとる。重力加速度を g と書くと、運動方程式は、(i)、(ii) の場合それぞれについて

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v, & \text{for (i)} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2, & \text{for (ii)} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 z 方向の速度成分を v と書いた。重力と抵抗力が釣り合った状況では、質点に実質的に力は働かず、速度は変化しない。すなわち、上記の運動方程式の左辺の加速度は零である。左辺の加速度 $\frac{d^2 z}{dt^2} = 0$ から、

$$\begin{aligned} mg &= \mu v, & \text{for (i)} \\ mg &= \gamma v^2, & \text{for (ii)} \end{aligned}$$

**1638 年「新科学対話」。実験は 1604 年頃から行っていたようである

†† 物体の速さが小さいときは、大気からの抵抗力を速度の大きさに展開して、第 1 項が速度の 1 乗、第 2 項が速度の 2 乗、以下… のようになると思われるが、以下で見るとある程度の大きさの物体は速度の 2 乗に比例した抵抗が主要となる。速度の 1 乗に比例した抵抗は粘性抵抗と呼ばれ、大気の粘性による抵抗であり、物体の接線方向に働く。一方、速度の 2 乗に比例する抵抗は慣性抵抗と呼ばれ、大気中の分子が物体表面に垂直に衝突することによって生じる抵抗力である。物体が速さ v [m/s] で運動していると、物体の静止系から見て大気中の分子は速さ v で物体に衝突してくる。大気の密度を ρ [kg/m³] とすると、単位体積あたり運動量 $p = \rho v$ [kg m/s/m³] を持って衝突してくる。この運動量をすべて物体が受けるとすると、単位時間・単位面積あたり物体から v [m³/(sm²)] まで離れた領域中の分子が物体に衝突するので、このとき物体が受ける単位時間・単位面積あたりの運動量は $p v$ [kg m/s/(sm²)] となる。微小時間 Δt [s] に物体が受ける単位面積あたりの運動量 Δp は $\Delta p = p v \Delta t = \rho v^2 \Delta t$ となり、単位面積あたり物体が受ける力 f は $f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho v^2$ となり、速さの 2 乗に比例することがわかる。また、慣性抵抗と粘性抵抗の比をレイノルズ数と呼び、流体力学で重要な量となる。一般にレイノルズ数 Re は、物体の典型的な大きさを l 、速度を u 、媒質の密度を ρ 、粘性係数を η とし $Re = \frac{\rho u l}{\eta}$ と表わされる。

が得られる。よって、その時の速度—これを終端速度と呼ぶ—をそれぞれ v_1 、 v_2 と書くと、それらは、鉛直下向きで、それぞれ

$$v_1 = \frac{mg}{\mu}, \quad \text{for (i)}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}, \quad \text{for (ii)}$$

となることがわかる。

4章 保存法則

$\mathbf{P} = (\text{一定})$	(運動量保存則)
$\mathbf{L} = (\text{一定})$	(角運動量保存則)
$E = (\text{一定})$	(エネルギー保存則)

時間にかかわらずある量が一定値を取り続けるとき、その物理量に対して保存法則が存在すると言い、その物理量を保存量と呼ぶ。以下では2つの質点系で話をすすめるが、 N 個の質点系でも同様なことを示すことができる。

§ 4.1 運動量保存則

§§4.1.1 運動量保存則

2つの質点(1, 2とする)を考え、それぞれの質量を m_1 [kg]、 m_2 [kg] とし、質量は時間とともに変化しないとする。質点1に働く力は質点2から及ぼされており、これを \mathbf{F}_{12} [N] と書こう。逆に質点2に働く力は作用・反作用の(ニュートンの第3)法則から、質点1から及ぼされており、これを \mathbf{F}_{21} [N] と表す。作用・反作用の法則から、お互いに及ぼしあう力は大きさが同じで向きが反対であるので、ベクトルで表すと

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (4.1)$$

と書ける。さて、運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} \quad (4.2)$$

となる。ここで、質点1, 2の位置を \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 で表した。この2式を辺々それぞれ足し合わせ、作用・反作用の法則 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) を用いると、右辺の和は消えて

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

が得られる。今、前に定義し、導入しておいた運動量ベクトル

$$\mathbf{p}_i \equiv m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \quad (i \text{ は質点を区別する番号、今は1または2})$$

を用いると、 $m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}$ となるので、上式は

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{0},$$

積分して $\mathbf{P} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (\text{時間に依らない定ベクトル}) \quad (4.4)$

となる。これは、質点1, 2の運動量のベクトル的な和は時間にかかわらず一定値をとることを意味している。これを、運動量保存則と呼ぶ。また \mathbf{P} は系の全運動量である。

§§4.1.2 慣性中心

慣性中心のベクトル、 \mathbf{R} を次のように導入しよう：

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.5)$$

このとき、慣性中心の速度は、慣性中心の座標を時間で微分することにより

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}$$

と得られる。全運動量 \mathbf{P} 、及び全質量 $M \equiv m_1 + m_2$ を用いると、上式は

$$\mathbf{P} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad (4.6)$$

と表される。したがって、全運動量 \mathbf{P} は、系の全質量 (M) \times 慣性中心の速度 $\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)$ という、期待される形を持っている。また、全運動量は保存する $\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}\right)$ ので、慣性中心は全運動量が保存するときあたかも質量 M を持った、力を受けない 1 個の質点と同様な運動をすることがわかる。すなわち、質点間相互の運動が解ければ、そのあと全系の慣性中心の慣性運動を重畳すればすべての運動がわかったことになる。

§ 4.2 中心力と角運動量保存則

§§4.2.1 中心力

互いに力を及ぼす 2 つの質点間を結ぶ方向に、その力の向きが向いているとき、この力を中心力と呼ぶ。要するに、質点を結ぶ線と力が平行であるということである。

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 // \mathbf{F}_{12}, \quad \text{または} \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

§§4.2.2 角運動量保存則

互いに力を及ぼし合う 2 質点を考える。このとき力は中心力であるとする。運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21}.$$

となる。第 1 式の両辺に \mathbf{r}_1 との外積を取り、第 2 式の両辺には \mathbf{r}_2 との外積をとる：

$$\mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}, \quad \mathbf{r}_2 \times m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}.$$

この両式の辺々足し算をし、作用・反作用の法則、及び力が中心力であることを用いて計算していこう：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ここで、右辺第1行目から2行目へは作用・反作用の法則 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) を使い、2行目から3行目は力が中心力であることを用いた。さらに、 $\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) - m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$ と変形できるが、同じベクトルの外積は常に $\mathbf{0}$ であること、 $\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{0}$ 、に注意すると、上式の左辺は書き直されて

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{r}_1 \times \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right) + \mathbf{r}_2 \times \left(m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) \right] = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

の様に表すことができる。これは左辺の $[\dots]$ の量が時間に依存していないことを示している。ここで、質点1、2の角運動量 \mathbf{L}_1 、 \mathbf{L}_2 及び系の全角運動量 \mathbf{L} を次のように定義し、導入しよう：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &\equiv \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 \left(= m_1 \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right), & \mathbf{L}_2 &\equiv \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \left(= m_2 \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right), \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

これを用いると先ほどの式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \text{積分して、} \quad \mathbf{L} = (\text{時間に依存しない定ベクトル}) \quad (4.10)$$

となる。これを角運動量保存則と言う。

§ 4.3 保存力と力学的エネルギー保存則

§§4.3.1 仕事と保存力

力 \mathbf{F} [N] が作用しているもとの、質点のある微小な位置変化 $d\mathbf{r}'$ [m] を考えよう。力 \mathbf{F} と位置変化 $d\mathbf{r}'$ のなす角を θ [rad] とすると、力 \mathbf{F} の、 $d\mathbf{r}'$ 方向の成分は、 $|\mathbf{F}| \cos \theta$ である。この力の成分によって質点はその方向に $|d\mathbf{r}'|$ だけ動くので、その積は、内積を使って

$$|\mathbf{F}| \cos \theta |d\mathbf{r}'| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

となる。これを、力 \mathbf{F} によって為された仕事と呼ぼう。位置 \mathbf{r}_0 から \mathbf{r} まで質点が力 \mathbf{F} のもとので運ばれたとすると、為された仕事 W は、すべての微小な仕事の和をとって、

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' \quad (4.11)$$

と書ける。

さて、このとき、力 \mathbf{F} の為した仕事が途中の道筋に依らず、あるスカラー関数（これをポテンシャルエネルギーという）の始点と終点における値の差で書けるとき、この力 \mathbf{F} を保存力と言う。すなわち、力 \mathbf{F} が保存力の時、位置 \mathbf{r} の関数であるポテンシャルエネルギーを $V(\mathbf{r})$ として、

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}) \quad (4.12)$$

と書くことができる*。逆に、力 \mathbf{F} が保存力の時には、上式の両辺を座標で微分し、ポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad (= -\text{grad } V(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})) \quad (4.13)$$

*実際、途中で、位置 \mathbf{r}_1 に寄り道してみよう。このとき、仕事は

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' = (V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}_1)) + (V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r})) = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

となり、確かに道筋（途中どこかに寄り道するとか）に依らない。

と、ポテンシャルエネルギーの勾配（に負号をつけたもの）で表すことができる。もちろん、成分を纏めて書いたので、成分ごとに書くと

$$F_x = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial z} \quad (4.14)$$

である。

§§4.3.2 エネルギー保存則

力学的エネルギー E として、次の量を定義し、導入しよう：

$$E \equiv \frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + V(\mathbf{r}). \quad (4.15)$$

右辺第1項は、**運動エネルギー**と呼ばれる。第2項は前節のポテンシャルエネルギーである。ポテンシャルエネルギーがあからさまに時間に依存しないとしよう。ただし、質点の位置 \mathbf{r} を通して時間に依存している。このことに注意して、 E を時間で微分してみよう：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \left(m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F} \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここで、1行目中辺へは、 V が \mathbf{r} を通して時間に依存しているので、 $\frac{dV(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ であることを使った。第1行目から2行目へは、保存力とポテンシャルエネルギーの関係 $\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$ を使い、2行目から3行目へはニュートン方程式を用いた。こうして、力学的エネルギー E の時間微分は0であること、すなわち力学的エネルギーは時間に依存しない保存量であることがわかった。このことを、**力学的エネルギー保存則**と呼ぶ[†]。

(問) 力が万有引力(重力)のとき ($\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$, 但し \mathbf{e}_r は \mathbf{r} 方向の単位ベクトルである。) ポテンシャルエネルギー $V(r)$ を求めよ。
(答え : $V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$)

(問) ニュートン方程式の両辺に速度 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ との内積を取り、その後、両辺を時間で積分することによって、力学的エネルギー保存則を導け。ただし、力は保存力とする。

[†] 変わらないものとして、この章では運動量、角運動量、エネルギーが保存することを見たが、その際にニュートンの第2、第3法則を用いた。しかしながら、これらの保存則は、時空間の対称性に直接結びついている。空間に特別な場所はなく、座標系の原点をどこにとっても良いであろう。言い換えれば、空間をどの方向にずらしても物理法則は変わらないということだ。これを**空間並進対称性**と呼び、空間並進対称性から直ちに運動量保存則が成り立つことがいえる。また、空間に特別な方向はない。座標軸の方向をどこに選んでも自然記述は変わらないだろう。空間に特別な方向がないことを**空間回転対称性**が存在すると言い、空間回転対称性からただちに角運動量保存則が導かれる。さらに、時間の原点をどこにとっても自然の記述は変わらない。時間に特別な点はないと言うことで、**時間並進対称性**と呼ばれる。時間並進対称性からただちにエネルギー保存則が導かれる。このような、対称性と保存則の関係は、一般的にネーターの定理として知られている。後に出てくる**電荷**と呼ばれる量も保存する。背後には、自然界は**ゲージ対称性**と呼ばれる対称性があり、その対称性が存在することにより、ただちに**電荷保存則**が導かれるのである。

5章 振動

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} \quad (\text{フックの法則})$$

§5.1 単振り子

3章では地上物体の運動の例を見たが、別の例として、単振り子を見ておこう。質量の無視できる長さ l [m] のひもの先に、重りとして質量 m [kg] の質点がついていて、振り子運動をしているとする (図6)。ただし時刻 $t = 0$ で重りは鉛直から測った角度 θ_0 [rad] にあり、初速度は0とする。また、重力加速度を g [m/s²] とする。重りが動く方向 (接線方向) のみを考えよう。 Δt の微小時間に角度 $\Delta\theta$ だけ重りは動いたとすると、重りの動いた長さ Δr は $\Delta r = l\Delta\theta$ である。よって、接線方向の重りの速度 v は $v = l\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow v = l\frac{d\theta}{dt}$ となる。ここで $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとって、微分に置き換えた。こうして接線方向の加速度 a は $a = \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ となる。ここで θ [rad] は鉛直から反時計回りの方向を正として測ったひもの角度である。重りに働く接線方向の力 F は、図から $F = -mg\sin\theta$ と読み取れる。負号は、角度 θ が鉛直から反時計回りに測られていることによる。こうして、運動方程式は、

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \quad (5.1)$$

となることがわかる。

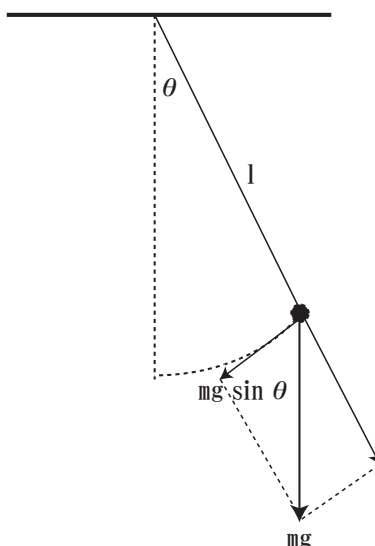


図 6:

今、振れ幅が小さいとすると、角度 θ は微小だから三角関数を近似して $\sin\theta \approx \theta$ とできる*。このとき運動

*1章で見たテーラー展開を用いる。 $x \rightarrow \theta$, $x_0 \rightarrow 0$, $f(x) \rightarrow \sin\theta$ として展開の1次まで取る。

方程式は

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mg\theta \quad , \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l}\theta \quad (5.2)$$

と書ける。2階微分して負号がついて（係数を除いて）元に戻る関数は三角関数であるので、この運動方程式の解としては、一般に

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha \right) \quad (5.3)$$

が得られる。ここで、 A 、 α は初期条件で決められるべき定数である。時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ としたので、 $A \cos \alpha = \theta_0$ が得られる。また速度は $v = l \frac{d\theta}{dt} = -lA \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \alpha \right)$ より、 $t = 0$ で $v = 0$ から $-A\sqrt{lg} \sin \alpha = 0$ が得られる。これより $\alpha = 0$ 、よって $A = \theta_0$ となるので、最終的に求める解は

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}}t \right) \quad (5.4)$$

である。

振り子が一振れして元に戻ってくるまでに要する時間 T [s] は、上で求めた解より、三角関数がもとの値に戻る時間であるので

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T = 2\pi \quad , \quad \text{すなわち} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (5.5)$$

となる。この T を振り子の周期と呼ぶ。今扱ったように振れ幅が小さいとした範囲では、周期は振れ幅に依存せず、ひもの長さ（と重力加速度）にのみ依存する。これが、ガリレイの発見した振り子の等時性と呼ばれることである[†]。

§5.2 単振動

ここでは1次元の運動のみを考え、1次元の座標を q と記すことにする。系がつり合いの状態にあり、静止することが可能であれば、必ずポテンシャルエネルギー $V(q)$ [J] に極小の位置 q_0 があり、そこでは質量 m [kg] の質点には力が働かない。力が働けば加速度を持って動き出すはずなので、釣り合いではありえないからである。力が保存力の時、力 F [N] はポテンシャルエネルギーの座標微分に負号を付けたものであったので、 $V(q)$ の極小点では

$$F = - \left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} = 0$$

である[‡]。こうして、ポテンシャルエネルギーを極小点 q_0 の周りで（テーラー）展開しよう。

$$V(q) = V(q_0) + \left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots$$

ここで、安定点としての極小点 q_0 からの変位 $q - q_0$ を、あらためて x [m] と書くことにしよう。また、極小点であるので右辺第2項 $\left(\left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} \right)$ は0、右辺第1項は単なる定数であるので運動には影響を与えないこ

[†]発見はガリレオ・ガリレイ 19歳の時と言われている。イタリアはフィレンツェのピサの斜塔の隣の礼拝堂で、高い天井から吊り下げられているシャンデリアが揺れるのを見て、発見したと言われている。スマホの画面を見て、ぼーっとしてちゃあ、いかん。

[‡]極大点では不安定なつり合いになってしまう。

とから、エネルギーの基準点を覚えて、 $V(q_0) = 0$ としよう。さらに、右辺第 2 項の係数を $\left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0} \equiv k$ と書くことにする。もちろん極小点は時間とともに変化しないので、 $\frac{dq_0}{dt} = 0$ である。こうして、ポテンシャルエネルギー $V(q)$ は、変数を x と変換して

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \dots \quad (5.6)$$

と、かなり一般的に書ける[§]。安定点（釣り合いの位置） q_0 からの変位である $x = q - q_0$ が小さいとして x^3 以上の項を無視しよう。このとき、質量 m [kg] の質点に働く力 F [N] は

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = -kx \quad (5.7)$$

と、変位に比例することがわかる。これはフックの法則と呼ばれることがある。運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (5.8)$$

となり、整理すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.9)$$

と書ける。こうして、一般に、安定点の周りの運動は、振幅が十分に小さいとしたときの（単）振動の方程式 (5.2) と同じになる。 $\theta \rightarrow x$ 、 $\frac{g}{l} \rightarrow \omega^2$ とすればよい。ここで導入した ω [1/s] を角振動数と呼ぶ。この方程式は、§5.1 の単振り子の運動で見たのと同じ運動方程式を与えるので、解は、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.10)$$

となることが見て取れる。この振動は単振動、または調和振動と呼ばれる。ここで、 A と α は初期条件で決まる定数である。 A は振動の振幅である。

(問) 時刻 $t = 0$ で、単振動のつりあいの位置からの変位が x_0 、速度が 0 であった。このとき、上式の A と α を決めて、単振動の解を完成せよ。

([答え] $A = x_0$, $\alpha = 0$)

(問) 単振動の力学的エネルギーを求めよ。

([答え] $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$)

§ 5.3 強制振動と共鳴

単振動をしている質点に、外部から強制的に力 $F(t)$ を加える状況を考えよう。ニュートン方程式は、(5.8) にさらに外力 $F(t)$ を加えることで

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) + F(t) \quad (5.11)$$

と得られる。変位に比例した復元力 kx が単振動を引き起こすが、そこに時間に依存した外力 $F(t)$ が作用している系の運動方程式である。整理して、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t), \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.12)$$

[§]釣り合いの位置での 2 階微分 $\left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0}$ が零になるような特殊な場合はこの限りではない。

が得られる。この運動方程式によって引き起こされる振動を強制振動と呼ぶ。

外力としての関数型は制限されていないが、ここでは

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) \quad (5.13)$$

で振動している場合を扱ってみよう。このとき、運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta) \quad (5.14)$$

と書ける。この方程式の左辺は求めたい関数 $x(t)$ の 1 次であるが、右辺は x の 0 次であり、数学的には非同次線形微分方程式と呼ばれる。この場合には、この非同次線形微分方程式の解を（何でもいから）一つ見つけ（特解）、その解に右辺を 0 とおいた同次方程式の一般解を加えることで求めたい非同次線形微分方程式の一般解が得られることが知られている。特解を探すために、 $x = B \cos(\gamma t + \beta)$ とおいて上の運動方程式に代入してみると、 $-B\gamma^2 + \omega^2 B = \frac{f}{m}$ が得られるので、未知の B が $B = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}$ と得られる。外力を零とおいた同次方程式の一般解は単振動の解としてすでに知っている ($x(t) = A' \cos(\omega t + \alpha')$) ので、求めたい一般解として、

$$x(t) = A' \cos(\omega t + \alpha') + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t + \beta) \quad (5.15)$$

が得られる。このままでは $\omega = \gamma$ のときに発散するように見えるので、特解の B と外場の位相 β を用いて、積分定数 A' 、 α' の代わりに $A' \cos \alpha' \equiv A \cos \alpha - B \cos \beta$ 、 $A' \sin \alpha' \equiv A \sin \alpha - B \sin \beta$ として A 、 α を導入すると、最終的に

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\} \quad (5.16)$$

と変形できる。ここで、 A 、 α は初期条件により決まる定数である。

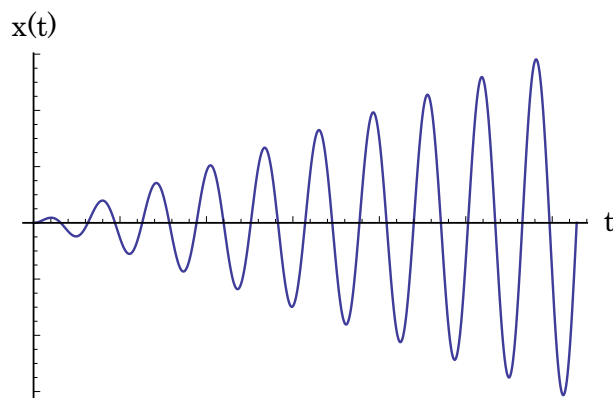


図 7: (5.17) で、 $A = 0$ 、 $\beta = 0$ の場合の概略図

さて、強制力の角振動数 γ が、系の持つ固有の角振動数 ω に等しくなる場合を考えよう。このときには上の解で $\gamma \rightarrow \omega$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{(\omega + \gamma)(\omega - \gamma)} \{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\} \\ &= A \cos(\omega t + \alpha) - \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega + \gamma} \frac{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)}{\gamma - \omega} \\ &\rightarrow A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} \cdot t \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (5.17)$$

となる。ここで、2行目から3行目は微分の定義を利用した[¶]。こうして、第2項の振幅 $\frac{ft}{2m\omega}$ は時間 t とともに増大していくことがわかる^{||}。この現象を、共鳴と呼ぶ。

¶

$$\lim_{\gamma \rightarrow \omega} \frac{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)}{\gamma - \omega} = \frac{d}{d\omega} \cos(\omega t + \beta) = -t \sin(\omega t + \beta)$$

^{||}初めはそっとそっと揺れ始めるが、振幅は時間とともに、時間に比例して増大する。実際には、摩擦や抵抗が働き、無限に振幅が増大することは無かろう。

6章 剛体の力学

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad (\text{剛体の運動方程式})$$

§6.1 角速度

質点相互間の距離が不変であるような質点の集まりを剛体という。全く変形しない理想化された物体である。普通には、堅くて変形しない、拡がりを持った物体を思い浮かべればよい。

剛体が回転する場合を考えていこう。剛体が、ある回転軸のまわりに、小さな角度 $d\varphi$ だけ回転したとしよう。この回転に伴って剛体内の各点は、 $d\mathbf{r}$ だけ動いたとする。このとき、動いた距離 $dr = |d\mathbf{r}|$ は、

$$dr = r \sin \theta d\varphi \quad (6.1)$$

となっている。ここに角度 θ は、回転軸と、剛体内の考えている点の位置ベクトルがなす角である。

今、回転軸の方向を示すために、回転軸方向を向いていて、大きさが回転角 $d\varphi$ に等しいベクトル $d\varphi$ を導入すると、前式は向きまで含めて

$$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r} \quad (6.2)$$

と、ベクトル積（外積）を用いて書けることがわかる。

回転が微小時間 dt の間に起こったとすると、剛体内の点の速度は、上式の両辺を dt でわり算して、 $dt \rightarrow 0$ の極限を取ることで

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (6.3)$$

$$\text{但し } \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (6.4)$$

と表される。ここで $\boldsymbol{\Omega}$ を角速度と呼ぶ。式から明らかなように、角速度の大きさは、回転の角度が時間的に変化する割合である。また、角速度の方向は回転軸方向にある。

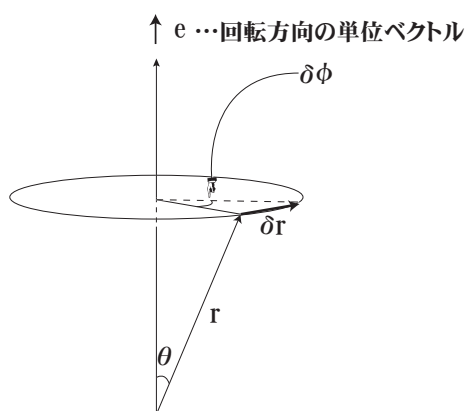


図 8:

§ 6.2 剛体の角運動量と慣性モーメント

質量 m の質点が x - y 平面内で回転運動しているとしよう。このとき、図 9 より

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \\ v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, & v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (6.5)$$

となる。角運動量は z 軸方向を向いていて、その大きさ L_z は、 $p_x = mv_x$ 、 $p_y = mv_y$ を用いて、

$$L_z = xp_y - yp_x = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (6.6)$$

となる。また、 r は x - y 面内にあるので、 $r^2 = x^2 + y^2$ であり、回転角 θ は z 軸周りの角度であるので $\theta \equiv \varphi_z$ と書くと、結局

$$L_z = m(x^2 + y^2) \frac{d\varphi_z}{dt} \quad (6.7)$$

と表せる。これが、 z 軸周りを回っている質量 m の質点のもつ角運動量である。同様に、 x 軸周り、 y 軸周りの角運動量は

$$\begin{aligned} L_x &= m(y^2 + z^2) \frac{d\varphi_x}{dt} \\ L_y &= m(z^2 + x^2) \frac{d\varphi_y}{dt} \end{aligned} \quad (6.8)$$

と書ける。要するに、(角運動量の α 成分) = (質量) \times (回転軸からの距離の 2 乗) \times (角速度の α 成分) の形をしていることがわかる。

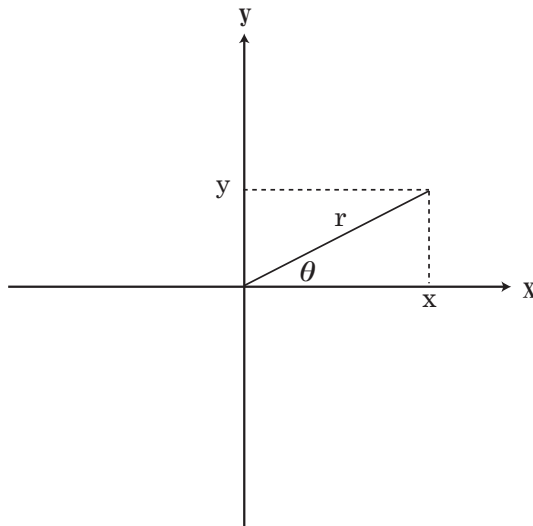


図 9:

ここからは、剛体に結び付けた座標系をとることにして、 (x, y, z) のかわりに (x_1, x_2, x_3) と書くことにしよう。添え字 1 と書くと x 成分をとっていると読む。

さて、物体が連続的に広がりを持っているとすると、上式の角運動量の表式で、質点の質量を、広がりを持った物体の質量密度 (ρ) と微小体積 (dV) の積に置き換えて

$$m \longrightarrow \rho(\mathbf{r})dV \quad (6.9)$$

として、すべての質点（質量分布）について和をとれば良いことになる。角速度はどの点でも同じなので、結局

$$\begin{aligned} L_1 &= \iiint \rho(\mathbf{r}) \cdot (y^2 + z^2) dV \cdot \frac{d\varphi_x}{dt} \\ L_2 &= \iiint \rho(\mathbf{r}) \cdot (z^2 + x^2) dV \cdot \frac{d\varphi_y}{dt} \\ L_3 &= \iiint \rho(\mathbf{r}) \cdot (x^2 + y^2) dV \cdot \frac{d\varphi_z}{dt} \end{aligned} \quad (6.10)$$

となる。ここで、主慣性モーメントと呼ばれる I_1 、 I_2 、 I_3 を

$$I_1 = \iiint \rho(\mathbf{r}) \cdot (y^2 + z^2) dV, \quad I_2 = \iiint \rho(\mathbf{r}) \cdot (z^2 + x^2) dV, \quad I_3 = \iiint \rho(\mathbf{r}) \cdot (x^2 + y^2) dV \quad (6.11)$$

と定義する。このとき、角運動量の各成分は

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3, \quad \text{ここで} \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \quad (6.12)$$

と書ける。一般に、角運動量ベクトル \mathbf{L} と角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は同じ向きを向かない ($\mathbf{L} \neq \boldsymbol{\Omega}$) ことに注意しよう。

§ 6.3 剛体回転の運動方程式

剛体の角運動量 \mathbf{L} は、剛体のすべての構成要素（添え字 a で表そう）の角運動量をベクトル的に足したものである。 $\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ である。両辺を時間で微分すると、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \mathbf{p}_a + \sum_a \mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{p}_a}{dt} \quad (6.13)$$

となるが、第1項は、速度 $\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$ と運動量 $\mathbf{p}_a = m\mathbf{v}_a$ が同じ方向を向いていることに注意すると、外積の性質から $\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \mathbf{p}_a \propto \mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_a = \mathbf{0}$ より $\mathbf{0}$ になることがわかる。一方、第2項の運動量の時間微分は、ニュートンの運動法則から、剛体内のこの部分に働く力 \mathbf{f}_a を用いて書き直せる。結局、剛体回転の運動方程式は、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K}, \quad (6.14)$$

$$\text{ここで} \quad \mathbf{K} = \sum_{a=\text{質点}} \mathbf{r}_a \times \mathbf{f}_a \quad (6.15)$$

となる。ここで、 \mathbf{K} は力のモーメントと呼ばれる。剛体内の質点同士に作用しあう力は、作用・反作用の法則によって、すべて打ち消しあってしまい、 \mathbf{K} には効いてこない。よって、 \mathbf{f}_a としては、その質点に働く外力だけを考えればよいことに注意しておこう。こうして、力のモーメントは剛体に働く外力 \mathbf{F} のみを用い、その作用点を考えて $\mathbf{K} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$ のように簡単に書ける。

さて、運動方程式 (6.14) に戻ろう。同じ力のモーメント \mathbf{K} が働いたとしても、角運動量の成分は主慣性モーメントと角速度の成分を掛けたものなので、主慣性モーメントが大きいと角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の時間変化は小さくなることがわかる。したがって、主慣性モーメントは、剛体の回転のしにくさ（回転に対する慣性）を表していることがわかる。

§ 6.4 対称コマの自由回転

剛体が対称軸 (x_3 軸とする) を持っているとしよう。このとき、慣性主軸系と呼ばれる、剛体に結び付けたうまい座標系をとれば

$$I_1 = I_2 \quad (6.16)$$

とできる*。剛体に外力が働いていないときには、力のモーメント \mathbf{K} は $\mathbf{0}$ となるので、剛体回転の運動方程式から

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}, \quad (6.17)$$

すなわち、剛体の角運動量は保存することがわかる。角運動量ベクトル \mathbf{L} と剛体の対称軸 (x_3 軸) を含む平面に垂直に x_2 軸をとると、 $L_2 = 0$ から、 $\Omega_2 = \frac{L_2}{I_2} = 0$ であることがわかる。すなわち、 \mathbf{L} 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 x_3 軸はともに x_2 軸に垂直な x_1 - x_3 平面上にあり、かつ常に同じ平面内にあることがわかる。コマの対称軸は $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ の速度を持って動くが、コマの対称軸上のベクトル \mathbf{r} は x_3 軸に平行なので、この \mathbf{v} は $\boldsymbol{\Omega}$ とも、対称軸 x_3 軸とも垂直であるので、コマの対称軸は常に \mathbf{L} 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 x_3 軸が含まれる平面に垂直に動いていこうとする。すなわち、“コマは対称軸のまわりを回転しながら、対称軸は保存する角運動量ベクトル \mathbf{L} のまわりを一様に回転する”という状況が実現される。コマの対称軸のこのような動きを、歳差運動と呼ぶ†。

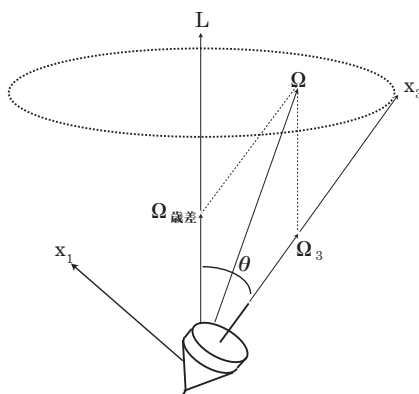


図 10:

§ 6.5 剛体の釣り合い

剛体に力が働いているにもかかわらず、剛体が動かないための条件は、まず剛体に働く力が釣り合っていて、合力が $\mathbf{0}$ となっていないなければならないことである。さらに、力のモーメントも釣り合っていて、全体として $\mathbf{0}$

* $x_3 (= z)$ 軸が対称軸なので、この軸に垂直などの軸の周りの剛体の回転しにくさも同じである。剛体の回転しにくさが慣性モーメントであった。

† 今は、力のモーメントの働かない自由回転を考えたが、力のモーメントが働く場合にも歳差運動が見られる。地上でコマを回すと重力が働き、力のモーメントが存在するが、歳差運動（コマの軸の首振り運動）が見られることの経験はあるだろう。地球は赤道方向にやや膨らんだ回転楕円体であり、宇宙空間で地軸のまわりに自転しているが、太陽や月、他の惑星から力のモーメントを受けている。そのため、地軸は歳差運動を行っており、その周期はおよそ 2 万 6000 年である。地軸の先に北極星 (Polaris) があり、現在はこぐま座のしっぽあたりの、こぐま座 α 星 A であるが、現在から 1 万年後には地軸の先は白鳥座の白鳥の羽の先の星辺りになる。1 万 3000 年後にはこと座の α 星 (ベガ) が地軸の先にあることになる。すなわち、1 万 3000 年後 (1 万 3000 年前にも) 全天の星はベガを中心に回るように見えるだろう。こうして、現在の北極星 (Polaris) は、暫くすると「北極星」でなくなる。さよならポラリス。

になっていなければ剛体は回転してしまう。これらの両条件を表すと、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \sum_a \mathbf{F}_a = \mathbf{0}, & \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0} \right) \\ \mathbf{K} &= \sum_a \mathbf{K}_a = \mathbf{0}, & \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

剛体が他の物体に接触していて釣り合っているときには、接触する他の物体から及ぼされる力も考慮に入れなければならない。すなわち、抗力や摩擦力まで考えないといけなくなる。

(例) 質量 m の一様な長さ $2l$ の棒を、水平な床の上から鉛直な壁に立てかける。棒を傾けていくとき、水平と作る角 θ がどれだけになると滑り出すか？ 棒と床、棒と壁の間の静止摩擦係数をそれぞれ μ_A 、 μ_B とする。但し滑り始めるとき、摩擦力の大きさ F は垂直抗力の大きさ N と $F = \mu N$ の関係がある。また、重力加速度を g とする。

(答え) 最大摩擦になったとき、力の大きさの関係として、 $F_A = \mu_A N_A$ 、 $F_B = \mu_B N_B$ がある。

水平方向の力のつりあい： $N_B = F_A$ ($\mu_A N_A$)

垂直方向の力の釣り合い： $N_A + F_B = Mg$ ($N_A + \mu_B N_B = mg$)

点 A のまわりの力のモーメントの釣り合い：

$$N_B 2l \sin(\pi - \theta) + \mu_B N_B 2l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mgl \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

以上から、垂直抗力 N_A 、 N_B を消去すると

$$\tan \theta = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2\mu_A}$$

が得られる。

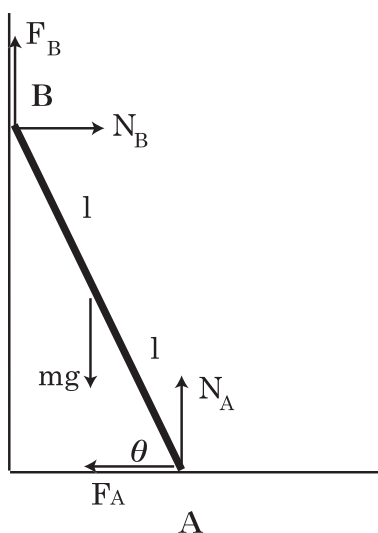


図 11:

7章 波動

$$\frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}^2} = 0 \quad (\text{波動方程式})$$

§7.1 波動方程式

連続体を示す現象として波を見ておこう。

時刻 t_0 での波の形（流体表面の“山”“谷”の形）が関数 $f(x)$ で表されたとする。この波が x 軸に沿って正の向きに進んでいるとしよう。時刻 $t_0 + t$ では、波の形は変わらず関数 f で表されるが、波が移動したので $f(x - vt)$ と書ける。波の各点は距離 vt 進んだので、 x が vt だけ大きいところが t_0 での元々の波の形と同じになっているからである。よって波動 ξ は、 x 軸正の向きに進むときには

$$\xi(x, t) = f(x - vt) \quad (7.1)$$

となり、負の向きに進むときには、速度の向きが異なるので v を $-v$ として

$$\xi(x, t) = g(x + vt) \quad (7.2)$$

というように、空間 x 、時間 t に対する依存性を持つ。

波を表す方程式を考えてみよう。方程式が時間の1階微分を含むとすると、“右”(x 軸正の向き)に動く波では $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f(x - vt)}{\partial t} = \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \cdot \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = \frac{df(x - vt)}{d(x - vt)} \cdot (-v) = -v \frac{d\xi}{d(x - vt)}$ と、 $-v$ が現れる。一方、“左”(x 軸負の向き)に動く波では $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v \frac{d\xi}{d(x + vt)}$ と、 $+v$ が現れる*。右に進むか左に進むかという人為的なもの（“右”と“左”は座標の取り方で変わる人為的なもの）で結果が変わるのはおかしいので、基礎方程式としては時間に関して2階微分を含むことが必要になる $((-v) \times (-v) = v \times v = v^2)$ 。もう一度具体的に微分を

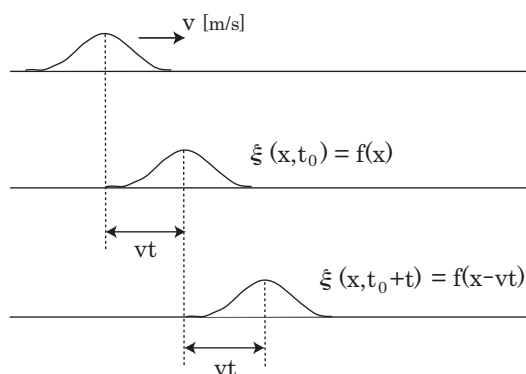


図 12:

* $f \rightarrow g$ として $v \rightarrow -v$ とすれば良い。

実行すると、 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{df(x-vt)}{d(x-vt)} \cdot (-v) \right) = -v \frac{d^2 f(x-vt)}{d(x-vt)^2} \cdot \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v \frac{d^2 f(x-vt)}{d(x-vt)^2} \cdot (-v) = v^2 \frac{d^2 f(x-vt)}{d(x-vt)^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{d(x-vt)^2}$ となり、他方、 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 \xi}{d(x+vt)^2}$ が得られる。一方、座標 x での微分も同様に計算され、“右”に進む波も、“左”に進む波も、 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d(x \pm vt)}$ 、 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \xi}{d(x \pm vt)^2}$ が得られる。こうして、左右に進む波に関係なく、波動 $\xi(x, t)$ が従う方程式として

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (7.3)$$

が得られる。

今は波動の進行する方向を x 軸方向に限定したが、一般には空間は 3 次元であるから、空間微分を $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (= \nabla^2)$ に置き換えて

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = 0 \quad (7.4)$$

とすれば良い。これを波動方程式と呼び、波という現象を記述する基礎方程式である。ここに現れた v は、導出から明らかなように波の進行する速さである。

§ 7.2 振動数・波長

波の簡単な例として、正弦波を考えてみよう。

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(-k(x - vt)) \quad , \quad \text{但し } v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \quad (7.5)$$

は、1次元波動方程式 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$ の解である。実際、代入して確かめてみればよい。

x を $x + \frac{2\pi}{k}$ としても、 $\xi(x, t)$ の形は全く変わらない。ここで、

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{2\pi}{k} & : \text{波長} \\ k & : \text{波数} \end{aligned} \quad (7.6)$$

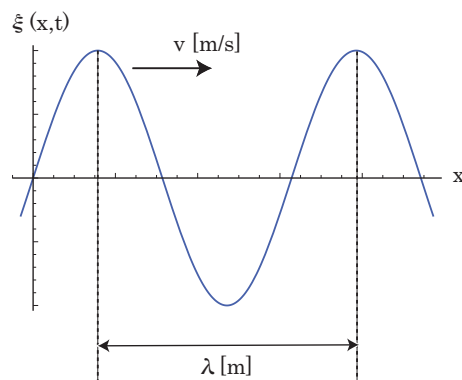


図 13:

と呼ぶ。波長は波の山（谷）から山（谷）までの長さ、波数は長さ 2π の中に含まれる波（の山または谷）の数である。

時間 t を $t + \frac{2\pi}{\omega}$ としても、 $\xi(x, t)$ の形は全く変わらない。ここで、

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} & : & \text{周期} \\ \nu &= \frac{1}{T} & : & \text{振動数} \end{aligned} \quad (7.7)$$

と呼ぶ。周期は波の山（谷）から次の山（谷）がやってくるまでの時間、振動数は単位時間あたりやってくる波の数である。 $\omega = 2\pi\nu$ の関係があり、 ω を角振動数と呼ぶ。

また、波の速さ v と角振動数 ω 、波数 k の間には $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ の関係があった。よって、

$$v = \lambda\nu \quad (7.8)$$

の関係が成り立っていることがわかる。

§ 7.3 波の屈折

水の波の速さを考えてみよう。水深が浅い場合の状況のみ考えよう。水深を h [m] とする。水は地球に引かれているから、水の波の速さは重力加速度 g [m/s²] に関係する。この2つの量から速さの次元、m/s の形になる組み合わせを考えると、 \sqrt{gh} が候補になる。実際、 $\sqrt{\text{m/s}^2 \cdot \text{m}} = \text{m/s}$ になる。こうして、浅い水深の場所で伝わる水の波の速さ v は

$$v = \sqrt{gh} \quad (7.9)$$

と考えられる。これは係数（ここでは1）まで含めて正しい[†]。

さて、波が、その速さの速い（深い）側から遅い（浅い）側に進むとする。波の振動数 ν は変わらないので、速さ v が変化するという事は、(7.8) より、波長 λ が変わっているということになる。速い側では波長が長

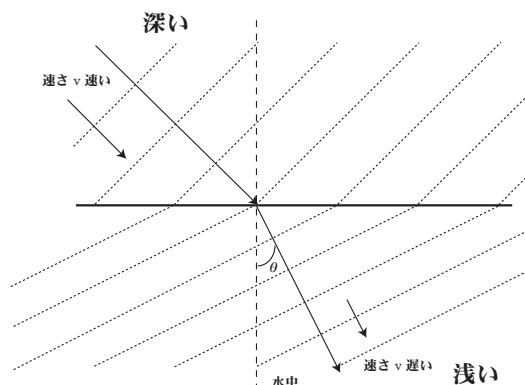


図 14:

[†]詳しい計算では、水の波の速さは

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}$$

となる。ここで、 λ は水の波の波長である。この式で、水深が波長に比べて浅い ($h \ll \lambda$) として近似 ($\tanh x \approx x$ for $x \ll 1$) すると、本文の v が得られる。

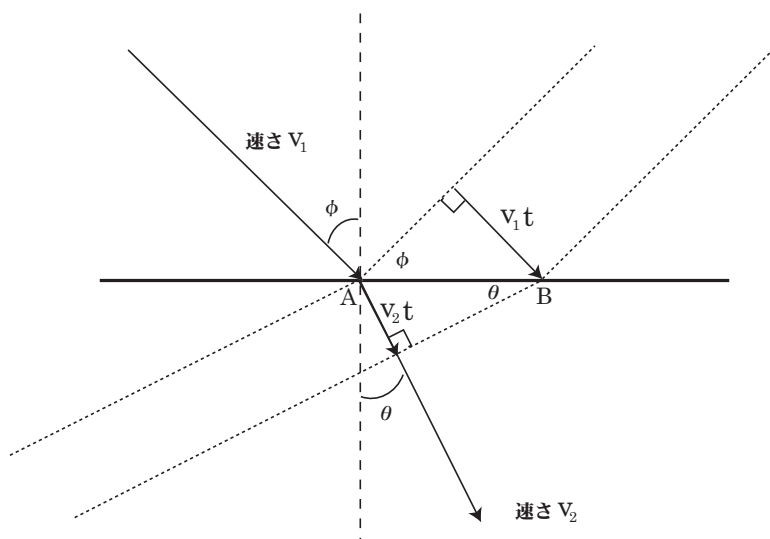


図 15:

く、遅い側では波長は短くなる。図 14 に記した状況を考えよう。図中の点線は波の山だと思おう。水深の深い側では水の波の速さは速く、波の山から山までの長さ、すなわち波長は大きい。水深の浅い側に入ると波長は短くなるので、図のように、水深の境界に斜めに進行してきた波は、境界で進行方向が曲げられる。この現象を屈折と呼ぶ。境界面に垂直方向から測って、角度 ϕ で入射した波は、屈折を起こして角度 θ で進行していくとしよう (図 15)。波の速さの速い方の速さを v_1 、遅い方を v_2 とすると、時間 t の後、図 15 のように、波面が進行していく。図から明らかなように

$$\sin \phi = \frac{v_1 t}{AB}, \quad \sin \theta = \frac{v_2 t}{AB} \quad (7.10)$$

である。ここで AB は AB 間の長さである。こうして、屈折が起きる場合、入射角 ϕ と屈折角 θ には

$$\frac{\sin \phi}{\sin \theta} = \frac{v_1}{v_2} (\equiv n_{12}) \quad (7.11)$$

の関係が得られる。これをスネルの法則と呼び、 n_{12} を屈折率という[‡]。

水の波は水深の深い方から浅い方へ、図 14 のように屈折して曲げられる。たとえば、実際の海の波打ち際には、深さは連続的に浅くなって海岸線に来るが、深いところで斜めに進んでいた波は、海岸線に近づくにつれ曲げられ、最後はとうとう海岸線に垂直に向かってやってくることになる[§]。これが遠浅の海岸で見られる現象である。

[‡]11 章で見るように電磁波は文字通り波であるが、光は電磁波の一種であるので波として伝わる。光の速さは水中より空気中の方が速いので、図 14 で「深い」方を空気、「浅い」方を水と見直せば、光は同じように屈折する。真空中から空気への光の屈折率は、1.000292(0°C、1 気圧)なので、ほぼ 1、真空中から水中への光の屈折率はおおよそ 1.3334 である。したがって、空気と水での屈折率はおおよそ 1.33 である。屈折に加え、波は回折と呼ばれる現象をも示す。たとえば、障害物があっても、それよりも波長が長ければ、波は障害物の後ろにも回りこむことができる。さらに、波は干渉という現象も引き起こす。波は単純に足しあわせることができ、これを波の重ね合わせと呼ぶが、波の山と山が足しあわされれば大きな振幅になり、一方、山と谷が重なれば波は互いに打ち消しあってしまう。光が波であって、干渉を示すことは、簡単な実験で理解できる、今、両手の人差し指を、爪を自分の側に向けてくっつけておこう。両指の隙間から向こうを見る。くっつけた指の力をゆっくり抜いていって、向こうがかすかに見える程度に隙間を空ける。そうすると、明暗の縞が縦に交互に見えるだろう。これは光の山と山が重なったところは明るく、山と谷が重なったところが暗く見えているからである。光の干渉縞が見えているわけだ。よって、光は波動として伝わるのがわかる。

[§]きらめく波が砂浜を潤していくことになる。

§ 7.4 音波

音は空気の疎・密が伝わる波動現象である。

空気の密度を ρ [kg/m³]、考えている空気柱の断面積を S [m²]、注目している空気の部分の幅を Δx [m]、1 及び 2 の面に働く圧力を P_1 [Pa]、 P_2 [Pa]、空気の変位を ξ [m] と書く（図 16 を参照）と、ニュートン方程式は、図から

$$\rho S \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P_1 - P_2) S \quad (7.12)$$

と書けることがわかる。時間 Δt [s] の間に、注目している 1 と 2 の面で挟まれた空気の体積変化 ΔV が起きたとしよう。この体積変化は 2 の面と 1 の面の移動した距離の差 $v_2 \Delta t - v_1 \Delta t$ に断面積 S を掛けたものになる。ここで、 v_1 [m/s]、 v_2 [m/s] は 1、及び 2 の面が動く速度である：

$$\Delta V = (v_2 \Delta t - v_1 \Delta t) S \quad (7.13)$$

よって

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S(v_2 - v_1) = \frac{V}{\Delta x} (v_2 - v_1) = V \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (V = S \cdot \Delta x) \quad (7.14)$$

が得られる。

空気の疎密の変化は熱量の変化無く早く行なわれる（断熱変化）。断熱変化では気体の体積 V と圧力 P の間には

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (7.15)$$

という関係があることが知られている（「熱力学」で習う）。ここで、 γ は“定圧熱容量” C_P と“定積熱容量” C_V の比で、 $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ である。(6.5) 式から、断熱変化での体積の変化 ΔV と圧力の変化 ΔP の関係は、

$$\Delta P = \Delta \left(\frac{\text{一定}}{V^\gamma} \right) = -\gamma \frac{\text{一定}}{V^{\gamma+1}} \Delta V = -\gamma \frac{P}{V} \Delta V \quad (7.16)$$

として得られる。

さて、(7.12) 式に戻ると、右辺は圧力の変化 $\Delta P = P_2 - P_1$ が表れているので、整理しておく

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\Delta P \quad (7.17)$$

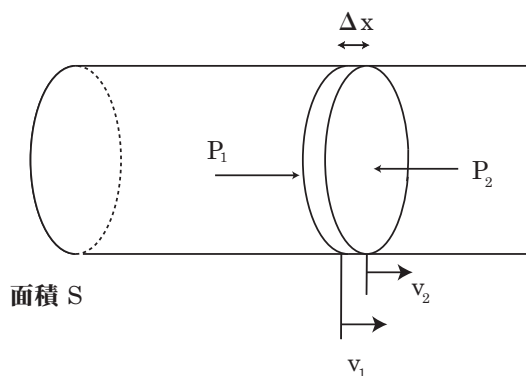


図 16:

となるが、断熱変化での圧力変化を代入して

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\Delta P}{\Delta x} = \gamma \frac{P}{V} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \gamma \frac{P}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (7.18)$$

となる。ここで (7.14) 式を上式に代入し、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとって微分で書く。このとき、速さ v は変位 ξ を使って $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ であることから、上の式は

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \gamma P \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma P \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma P \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (7.19)$$

が得られる。最終的に整理して

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \gamma \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (7.20)$$

となる。これは波動方程式 (7.3) であり、空気の疎密は波動として伝わるのがわかる。これが音波である。また波としての音の速さ v は波動方程式から

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (7.21)$$

であると読み取れる。

[註] 空気中を伝わる音速を概算してみよう。空気は窒素（分子量 28）と酸素（分子量 32）が 4 対 1 で混合しているの、空気の密度は $0.8 \times 28 + 0.2 \times 32 = 28.8$ g/mol。1 モルあたり気体は 22.4 リットル占めるので

$$\rho = \frac{28.8 \times 10^{-3} \text{ [kg/mol]}}{22.4 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/mol]}} = 1.29 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

酸素も窒素も 2 原子分子なので、定積熱容量は $C_V = \frac{5}{2}R$ 、定圧熱容量は $C_P = \frac{7}{2}R (= C_V + R)$ である。ここで R は気体定数。こうして、

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1.4$$

温度 0 °C で大気の圧力 P は

$$P = 1.013 \times 10^5 \text{ [N/m}^2\text{]} (= \text{[Pa]})$$

よって、音速 v は

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{1.4 \times \frac{1.013 \times 10^5}{1.29}} = 332 \text{ [m/s]}$$

8章 流体

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = \text{時間} \cdot \text{空間に依存せず、一定} \quad (\text{ベルヌイの定理})$$

§ 8.1 流体の運動方程式

水や空気等の流体を扱ってみよう。流体内の微小な部分を考えて、この部分の質量密度を $\rho(\mathbf{r})$ [kg/m³]、単位体積に働く力を \mathbf{f} [N/m³] とすると、ニュートン方程式は

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (8.1)$$

と書ける。ここで、 \mathbf{a} [m/s²] は流体内の注目している点での流体の加速度である。流体内の注目している点に働く力 \mathbf{f} を考えよう。まず、近傍の2点 x と $x + \Delta x$ を考え、そこでの圧力を $p(x)$ [Pa]、及び $p(x + \Delta x)$ とする。圧力は単位面積あたりの力であるので、圧力差に起因する力 F [N] は

$$F = (p(x) - p(x + \Delta x))S \quad (8.2)$$

となる。ここで、 S は x 軸に垂直な面積である。単位体積あたりの力が f であったので、 $F = f \times S\Delta x$ より、

$$f = \frac{p(x) - p(x + \Delta x)}{\Delta x} \rightarrow -\frac{\partial p(x)}{\partial x} \quad (8.3)$$

と書ける。力の各方向の成分は

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.4)$$

となる。すなわち、圧力 (単位面積あたりに働く力) の差に起因する力 (圧力の勾配) $-\nabla p$ が得られる。

ほかに、粘性による力 $\mathbf{f}_{\text{粘性}}$ 、外力によるもの $-\rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}$ がある。ここで、 ϕ [J/kg] は単位質量当たりの外力によるポテンシャルエネルギーである。こうして、流体の考えている微小部分に働く力は、

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{f}_{\text{粘性}} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}. \quad (8.5)$$

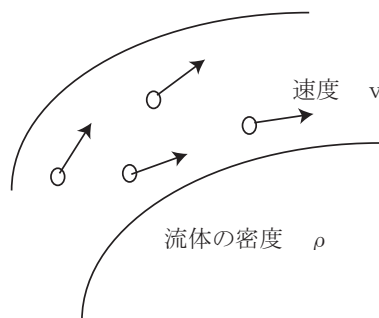


図 17:

と得られる。

次に、流体粒子の加速度を求めよう。近傍の2点 P_1 と P_2 を考え、点 P_2 は点 P_1 から、時間 Δt だけ後に流体粒子が到達した点とする。これら2点での速度の変化は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(P_2) - \mathbf{v}(P_1) &= \mathbf{v}(x', y', z', t') - \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ &= \mathbf{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ &\approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t \end{aligned}$$

となる。ここで、 Δt は微小としてテーラー展開を行った。両辺を微小時間 Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、点 P_1 での速度の変化率、すなわち加速度が求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(P_2) - \mathbf{v}(P_1)}{\Delta t} \\ &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ &= \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

よって、流体を記述するための基礎になる運動方程式として、この節の最初に記したニュートン方程式より、加速度 \mathbf{a} 、力 \mathbf{f} を代入して、

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{f}_{\text{粘性}} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.7)$$

が得られる*。

§ 8.2 完全流体の場合

粘性による力が無視できる ($\mathbf{f}_{\text{粘性}} \approx 0$) 簡単な場合を考えてみよう。今導いた運動方程式 (7.1)) は

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \quad (8.8)$$

となる。ここで、左辺第2項は

$$\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \quad (8.9)$$

と書き直せることに注意せよ ($\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$)。今、一様な流体 ($\rho = \text{一定}$)、かつ定常流 ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$)、さらに渦無し ($\text{rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$) の場合を考える。このときには運動方程式は、 ρ で割り算しておく、さらに簡単に

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \right) = \mathbf{0} \quad (8.10)$$

* ずれ粘性率 η 及び体積粘性率 ζ が座標に依存しない定数である時、粘性による力 $\mathbf{f}_{\text{粘性}}$ は $\mathbf{f}_{\text{粘性}} = \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$ と計算される。ここで、 $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}$ 、 $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ である。こうして、

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad div } \mathbf{v} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}}$$

が得られる。これは、粘性率が座標に依存しない場合のナビエ・ストークス方程式を構成している。

と書いてしまう。時間にあからさまに依存しない定常流 ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$) であったことと、上式を空間変数で積分してしまふことにより、

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = (\text{時間} \cdot \text{空間に依存せず、一定}) \quad (8.11)$$

が得られる[†]。これはベルヌイの定理と呼ばれる[‡]。すなわち、外力のポテンシャル ϕ が等しいところでは、速さ v が小さいと圧力 p は大きく、逆もまた然り、ということがわかる。

§§8.2.1 具体例

外力としての重力を考えない場合には、 $\phi = 0$ として、

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = (\text{一定}) \quad (8.12)$$

として、流速 v と圧力 p を考えればよい。地表面と山の頂上での気圧の差を考えるとときなどは、流速はともに 0 として、単位質量当たりの重力のポテンシャルエネルギーとして、高さを z とすると、 $\phi = gz$ を考えればよい。このときには

$$p + \rho gz = (\text{一定}) \quad (8.13)$$

として考えればよい。(8.12) を用いると、図 18 左図のように、飛行機の揚力の説明ができる。[§] また、図 18 右図のように、ボールに回転をかけて投げるとボールが曲がることの部分的な説明にも用いられよう。(8.13) の例としては、地上と山頂での気圧の違いや、水に潜っていった時にかかる水圧の計算に応用できる。

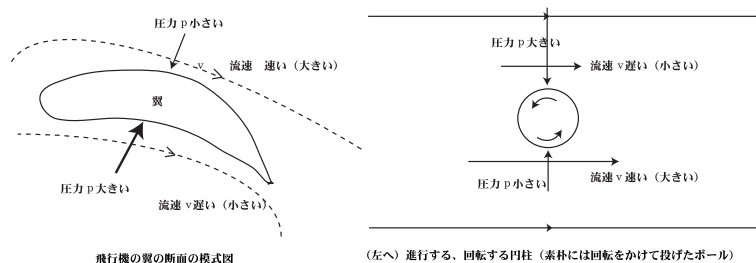


図 18:

[†](8.11) の左辺は、単位質量あたりのエネルギーになっていることに注意しよう。質量密度 ρ が時間に依存しないので、エネルギー保存則から左辺は時間に依存しないことになる。

[‡]ダニエル・ベルヌイ (1700-1782) により定式化された (Hydrodynamica(1738 年))。父ヨハンも伯父ヤコブも著名な数学者で紛らわしい。父ヨハンは微積分の (ド・) ロピタルの定理を発見している。ヨハンはどうやら息子のダニエルの能力を妬んでいた節がある。1734 年のパリ・アカデミー大賞の天文学の問題に応募し、ダニエルとヨハンは同時受賞となるが、父は息子と学問的に同等と見なされたことに立腹したようだ。さらには、ダニエルの著書「Hydrodynamica」を盗用して、タイトルだけ変えて出版に至っている。

[§]翼の上側の流速に比べて、翼の下側の流速が遅くなると、図のようにベルヌイの定理で飛行機の揚力は得られるが、何故下側の流速が遅くなるのかは良く解っていないようだ。軍用機で上下を逆にしたまま、長時間、逆さ飛行のできる飛行機があり、翼の形状をもとにして「上側の流速」が速い、という理由がわからなくなった (同じ翼の形状のまま逆さ飛行すると、「下側の流速が速い」ことになって、飛行機はすぐに失速する)。飛べてしまうことが問題。

9章 気体分子運動論

$$PV = Nk_B T \quad (\text{理想気体の状態方程式})$$

§9.1 気体分子運動論と理想気体の状態方程式

ここでは多数の粒子からなる系を考える。粒子が膨大な数存在するので、一つ一つの粒子に対して運動方程式を立てて、それを解くということは不可能である*。そこで、平均操作を行い、統計的に運動を扱う。そのことにより、初めて新たに見えてくることが多い。

分子の大きさを無視し、分子間に働く力も無視した理想気体を考えよう。まず、気体の圧力 P は単位面積当たりに働く力であるので、力を F 、面積を A として

$$P = \frac{F}{A} \quad (9.1)$$

と書ける。気体を箱に閉じ込めたと考え、気体分子が箱の壁に及ぼす力の平均を考えよう。ある方向 (x 方向とする) のみを考える。単位時間中に一つの壁に当たる分子数 n' は

$$n' = \frac{n}{2} v_x A \quad (9.2)$$

となるであろう。ここで、 n は、単位体積あたりの分子数であり、その内の半数が x の正方向にある一つの壁に向かっている。また、 v_x は分子の x 方向の速度、 A は壁の面積であり、 $v_x A$ は、単位時間に壁に当たる分子が含まれている体積を示している。分子は壁に当たり、その運動量を変化させる。完全に跳ね返されるとし、分子の質量を m とすると、初めの運動量 mv_x が壁との衝突後、 $-mv_x$ に変化する。運動量変化が壁に及ぼす力 f に等しいので

$$f = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x \quad (9.3)$$

である。よって、壁にあたる全分子の寄与を足し合わせると、気体分子が一つの壁に及ぼす力 F は

$$F = n' f = \frac{n}{2} v_x A \cdot 2mv_x \quad (9.4)$$

となるので、圧力 P は

$$P = \frac{F}{A} = nmv_x^2 \quad (9.5)$$

となる。分子はすべて同じ速さを持っているわけではないので、 v_x^2 をその平均で置き換えよう。平均量を $\langle \dots \rangle$ で表す。さらに、 x 、 y 、 z 方向の速度の平均は等しいはずなので、

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (9.6)$$

である。ここで、 $\langle v^2 \rangle$ は速度の大きさの2乗の平均値 ($v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$) である。以上より、圧力 P は

$$P = nm \langle v_x^2 \rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle \quad (9.7)$$

*粒子数として、およそ 10^{23} 個の集団を日常的に扱うことになる。ひとつづつ、1秒につき一つ数えていくと、 10^{23} 個数え終わるのに、3170兆年かかる。宇宙ができてから、未だ138億年である。

と求まる。さらに、両辺に箱の体積 V をかけ、体積 V 中に含まれる分子数を $N = nV$ と書くと、

$$PV = \frac{2}{3}N \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle \quad (9.8)$$

となる。

さて、箱を2つの部分、1、2に分け、動く壁で仕切ったとしよう。平衡では仕切りの壁は動かず、すなわち両部分系で圧力 P は等しいはずなので、それぞれの系の量に添え字 1、2 を付けて区別すると、(9.7) から

$$n_1 \left\langle \frac{1}{2}mv_1^2 \right\rangle = n_2 \left\langle \frac{1}{2}mv_2^2 \right\rangle . \quad (9.9)$$

が成り立っているはずである。ところが、もし、 $v_1 \gg v_2$ 、 $n_1 \ll n_2$ でこの式が成り立っていたとすると、 v_1 の分子が (n_1 が小さいので) 時々仕切り壁に当たりそれを大きく動かして2の分子に運動エネルギーを与えて2の分子は速くなり、それによって1の分子自身は遅くなることが考えられる。時間が経てば結局 $\langle v_1^2 \rangle \sim \langle v_2^2 \rangle$ となるであろう。よって、平衡では $n_1 \sim n_2$ であり、かつ

$$\left\langle \frac{1}{2}mv_1^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv_2^2 \right\rangle \quad (9.10)$$

が成り立つと考えられる。こうして、平衡状態で等しい量として、温度 T を導入することにしよう。

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}k_B T . \quad (9.11)$$

ここで、比例定数 k_B を導入した。エネルギーと温度の換算として、定数 k_B は

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} . \quad (9.12)$$

という値が与えられ、ボルツマン定数と呼ばれる。

以上から、(9.8) 式と (9.11) 式から、

$$PV = Nk_B T \quad (9.13)$$

と導かれる。これは理想気体の状態方程式と呼ばれる。

さて、各方向の速度の2乗は、平均として $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ であったので、一方向あたり $\frac{1}{2}k_B T$ ($\langle \frac{1}{2}mv_x^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}mv_y^2 \rangle = \langle \frac{1}{2}mv_z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$) の運動エネルギーの平均が割り当てられていると考えられる。この事実をエネルギー等分配の法則と呼んでいる。

また、理想気体の状態方程式 (9.13) から、すべての理想気体は、同じ温度 (T)、同じ圧力 (P)、同じ体積 (V) のもとで、同数の分子 (N) を含んでいることがわかる。この事実をアボガドロの法則と呼ぶ。

理想気体の内部エネルギー E は、1粒子当たりの運動エネルギーの平均が N 個あるので、

$$E = N \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}Nk_B T \quad (9.14)$$

となる。こうして、単位温度上げるのに必要なエネルギー (熱容量と呼ばれる) C は

$$C = \frac{dE}{dT} = \frac{3}{2}Nk_B \quad (9.15)$$

と求まってしまう。

さらに、(9.11) から、気体分子の運動エネルギーの平均が温度 T であったので、温度は負の値をとることはできないことがわかる。すなわち、絶対零度が存在することがわかる。[†]

[†] 温度の単位として、水の3重点の温度の $1/273.16$ を 1K (ケルビン) と定義する。通常使う摂氏温度 (t_c °C) とは、

$$T = t_c + 273.15 \quad (9.16)$$

の関係がある。

§ 9.2 非理想気体の状態方程式—Van der Waals 方程式—

実在の気体を扱う際には、分子に大きさがあること、及び分子間引力を考慮しなければならないかもしれない。分子が動ける体積 V' は、箱の体積 V から分子自身が占める体積 Nb (b が分子 1 個の体積の目安) を引いたものであろう。こうして、理想気体の状態方程式は変更を受け、体積 V の代わりに $V - Nb$ を代入した

$$P(V - Nb) = Nk_B T \quad (9.17)$$

となることが予想される。すなわち、

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} \quad (9.18)$$

と書き直される。次に分子間引力を考慮しよう。箱の十分内部では、注目する分子は周りの分子から等しく引力を受けるので、その効果は打ち消される。しかしながら、箱の表面にある分子では注目している分子に分子間引力を及ぼす分子は箱の内側にしか存在しないので、箱の壁の反対側からだけ分子間引力を受けることになり、分子が箱の壁に及ぼす圧力は減少するであろう。箱の壁際(表面)にある分子数は、粒子数密度 $\frac{N}{V}$ に比例するはずである。また、注目している分子に分子間引力を及ぼす(箱の内側の)分子数も、粒子数密度に比例するであろう。こうして、 a を分子間引力を表すある定数として、圧力 P は $a(N/V)^2$ だけ減少しているとみなせる。よって、状態方程式は、上式からさらに変更されて

$$P = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \left(\frac{N}{V} \right)^2 \quad (9.19)$$

と圧力が減少する。整理して

$$\left(P + a \left(\frac{N}{V} \right)^2 \right) (V - Nb) = Nk_B T \quad (9.20)$$

が得られる。この状態方程式をファン・デル・ワールズ方程式と呼ぶ。

ファン・デル・ワールズ方程式を、さほど大きくない温度 T が一定の場合に描いてみると、図 19 のようになる。こうして、 T - V 面で等温曲線を描いた際には、 $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T > 0$ となる領域 CD が現れるが、物理的に考えて、体積を大きくしたのにも関わらず圧力が増すということは許されない状態であろう。体積を大きい側から圧縮していき、体積 V_{II} の B 点まで圧縮されたとしよう。等温曲線は物理的に許されない DC 間をさけて、B

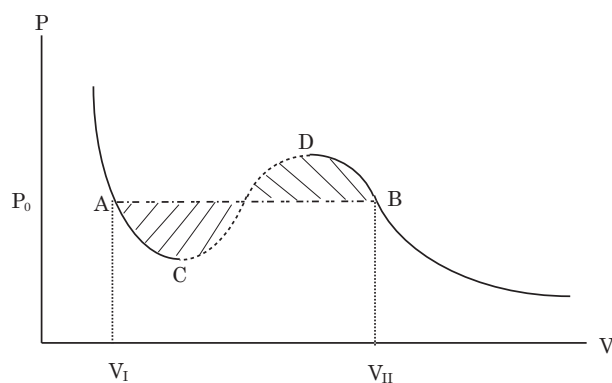


図 19:

から A まで圧力一定で体積が圧縮され、A 点に達するように状態変化を起こす[‡]。これを相転移と呼ぶ。A 点に到達した後にさらに圧縮すると、圧力は上昇していく。例えば、気体を圧縮すると、ある圧力・体積で液化を始め、A 点ですべて液体になるような状況が実現される。

良く知られた相転移としては、固体（固相）から液体（液相）、液体から気体（気相）への転移が挙げられよう。固体は、それを構成する分子の熱運動が小さく、分子が規則的に並んだ状態と考えられる。液体は分子の熱運動は中くらいで、分子は規則正しくは並ばないが分子間引力で凝集している状態と考えられる。気体は分子の熱運動が小さく、バラバラに運動している状態と考えられよう。

[‡]詳しいことを学べば、図 19 で斜線を付けた面積が等しいよう BA 間の状態変化が起きることを示すことが出来る。これをマクスウェルの規則（または等面積則）と呼ぶ。

10章 熱力学の法則

$$dE = TdS - PdV \quad (\text{熱力学第1法則})$$

$$dS \geq 0 \quad (\text{熱力学第2法則})$$

§10.1 エネルギー保存則と熱力学第1法則

熱とは、エネルギーの移動形態の1つのことであり、異なる温度の2物体を接触させたときに移動するエネルギーの形態である。

エネルギー保存法則により、エネルギーは形を変えても総量はいつも一定である。力学的エネルギー保存則を4章で導いたが、これにエネルギーの移動形態としての熱を加えておこう。すなわち、ある系に熱を加え、それに仕事をすれば、系のエネルギーは加えられた熱と為された仕事の分だけ増加することになると言える。今、内部エネルギー*の増分を dE 、系に加えた熱を dQ 、系にした仕事を dW と書くと、エネルギー保存則は

$$dE = dQ + dW \quad (10.1)$$

と書ける。これを熱力学第1法則と呼ぶ。エネルギーの移動形態として熱を含むエネルギー保存の法則である。

系が為された仕事 dW の例として、気体または液体で考えてみよう。系に圧力 P を加えると、圧力は単位面積に働く力であるので、系に加えた力は PS となる。ここで、 S は圧力を及ぼす面の面積である。系に為す仕事は、(仕事)=(力)×(移動距離)であることから、圧力 P を及ぼすことにより系の境界面が移動した距離を dr とすると

$$dW = PS|dr| = P|dV|$$

と書ける。ここで、 $dV = Sdr$ は、気体（または液体）の体積変化となる。外から系に仕事をするとき体積は減少 ($dV < 0$) するが、このときに系に為された仕事は正であるので、気体が為された仕事は、

$$dW = -PdV \quad (10.2)$$

と書ける。

§§10.1.1 断熱過程

内部エネルギー E を、温度 T と体積 V の関数と考える。温度と体積の微小な変化 dT 、 dV に対して、熱力学第1法則より

$$\begin{aligned} dQ &= dE + PdV \\ &= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + P\right] dV \end{aligned} \quad (10.3)$$

*系全体の並進や回転のエネルギーを除いたものを内部エネルギーと呼ぶ。

が得られる。ここで、体積を一定に保った時に単位温度上昇させるのに必要なエネルギーを定積熱容量 C_V 、圧力を一定に保った時に単位温度上昇させるのに必要なエネルギーを定圧熱容量 C_P と定義する。

$$\begin{aligned} C_V &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V, \\ C_P &= \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P \end{aligned} \quad (10.4)$$

ここで、微分の右下の文字は、その量を一定に保ったまま（偏）微分することを意味する。こうして、(10.3) を dT で割って、圧力一定のまま $dT \rightarrow 0$ をとって微分に直すと

$$\begin{aligned} C_P &= C_V + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + P \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P, \\ \text{すなわち} \quad \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_T + P \right] &= (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \end{aligned} \quad (10.5)$$

が得られる。この関係を再び (10.3) に代入すると

$$dQ = C_V dT + (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P dV \quad (10.6)$$

が得られる。

今、断熱過程を考えよう。断熱過程では熱の移動が無いので、 $dQ = 0$ である。こうして、(10.6) で $dQ = 0$ とし、両辺 dT で割ってから $dT \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned} C_V + (C_P - C_V) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{\text{断熱}} &= 0, \\ \text{すなわち} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{\text{断熱}} &= -\frac{C_P - C_V}{C_V} \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P \\ &= -(\gamma - 1) \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P, \\ \text{ただし} \quad \gamma &= \frac{C_P}{C_V} \end{aligned} \quad (10.7)$$

が得られる。

ここで、理想気体の状態方程式 $PV = Nk_B T$ より

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P = \frac{T}{V} \quad (10.8)$$

となるので、(10.7) 式は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_{\text{断熱}} = -(\gamma - 1) \frac{T}{V} \quad (10.9)$$

となる。積分すると、積分定数を A と書いておくと†

$$\begin{aligned} \ln T &= -(\gamma - 1) \ln V + A = \ln V^{-(\gamma-1)} + A, \\ \text{すなわち} \quad TV^{\gamma-1} &= e^A (= \text{定数}) \end{aligned} \quad (10.10)$$

†

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

を積分し、積分定数を A とすると

$$\ln T = -(\gamma - 1) \ln V + A = \ln V^{-(\gamma-1)} + A$$

ここで再び理想気体の状態方程式を用いて、 $T = \frac{PV}{Nk_B}$ より、 Nk_B は一定の数であるので右辺の (定数) に含めて

$$PV^\gamma = (\text{一定}) \quad (10.11)$$

が得られる。この関係は既に「§7.4 音波」の所で利用した。

§ 10.2 熱力学第 2 法則とエントロピー

次に、系のエントロピー変化 dS として、系に加えた熱量とその時の温度を用いて

$$dS \equiv \frac{dQ}{T} \quad (10.12)$$

と定義する。このエントロピー変化を用いると、熱力学第 1 法則は

$$dE = TdS - PdV \quad (10.13)$$

と書き直せる。よって、エントロピー S を導入し、

$$\int_{\text{最初}}^{\text{最後}} dS = \int_{\text{最初}}^{\text{最後}} \frac{d'Q}{T} = S_{\text{最後}} - S_{\text{最初}} \quad (10.14)$$

としよう。ただし、古典論の範囲内ではエントロピーの絶対値は決まらない。上式で $S_{\text{最初/最後}} \rightarrow S_{\text{最初/最後}} + \alpha$ と、任意の定数 α ずらしても引き算で相殺してしまい、上式の結果は変わらない。そこで、

$$\text{任意の物体のエントロピーは絶対零度で 0 になる} \quad (10.15)$$

ということを要請しよう。これは熱力学第 3 法則と呼ばれる[‡]

さて、(熱) エネルギー $Q_h + Q$ を持つ温度 T_h の物体から、熱エネルギー Q_l を持つ温度 T_l ($T_h > T_l$) の低温の物体に、熱量 Q が流れていく場合のエントロピー変化 (ΔS) を考えよう。自然にこの過程は起きるが、逆の過程は起きないことに注意を払おう。物体は大きくて、熱量のやり取りでの温度の変化は無視できるとしよう。このとき、エントロピー変化 ΔS は

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_{\text{最後}} - S_{\text{最初}} \\ &= \left[\frac{Q_l + Q}{T_l} + \frac{Q_h}{T_h} \right] - \left[\frac{Q_l}{T_l} + \frac{Q_h + Q}{T_h} \right] \\ &= \frac{T_h - T_l}{T_l T_h} Q > 0 \quad (T_h > T_l) \end{aligned} \quad (10.16)$$

となることがわかる。こうして、自然に進む過程のエントロピーは増大する方向であると言えよう。これをエントロピー増大の法則、または熱力学第 2 法則と呼ぶ。上の例では、高温と低温の物体間では熱をやり取りしても良いが、2 つ併せた全系は孤立しており、外との熱のやり取りは無かった。すなわち

$$\text{断熱された系で状態変化が起きると、エントロピーは増大する} \quad (10.17)$$

別の例として、気体の自由膨張を考える。断熱壁 (熱を遮断する壁) でできたシリンダに閉じ込められた気体が、真空中に向かって準静的に (ゆっくりと) 膨張する場合のエントロピー変化は、熱力学第 1 法則 (10.1) を用いて

$$\Delta S = \int_{\text{初期状態}}^{\text{終状態}} dS = \int_{\text{初}}^{\text{終}} \frac{dQ}{T} = \int_{\text{初}}^{\text{終}} \frac{dE + PdV}{T} \quad (10.18)$$

[‡]正当性の議論のためには統計力学の知識と量子論が必要である。

と表される。ここで、温度は変化しないので、内部エネルギーの変化は無いことに注意しよう。内部エネルギーと温度は (9.11) で結びついていたので $dE = d\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}k_B dT = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{\text{初}}^{\text{終}} \frac{P}{T} dV = Nk_B \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} dV \quad (PV = Nk_B T \text{ を使った}) \\ &= Nk_B [\ln V]_{V_i}^{V_f} \\ &= Nk_B \ln \frac{V_f}{V_i}\end{aligned}$$

ここで、最初の気体の体積を V_i 、膨張後の気体の体積を V_f とした。また、気体は理想気体として、理想気体の状態方程式 (9.13) をもちいた。気体は膨張したので、もちろん、 $V_f > V_i$ である。よって、

$$\Delta S = Nk_B \ln \frac{V_f}{V_i} > 0 \quad (10.19)$$

となり、確かにエントロピーは増大していることがわかる。

§ 10.3 エンタルピー

エネルギー保存則としての熱力学第 1 法則は (10.13) の形に得られた。そこでは、内部エネルギー E は S と V の関数となっている。そこで、体積 V の代わりに圧力 P を独立変数とする関数 H を考えよう。 H を次のようにして導入する。

$$H = E + PV \quad (10.20)$$

この熱力学関数をエンタルピーと呼ぶ。このとき、微分をとり、(10.13) を用いると

$$\begin{aligned}dH &= dE + PdV + VdP \\ &= TdS + VdP \quad (= dQ + VdP)\end{aligned} \quad (10.21)$$

が得られる。確かに、 S と P を独立変数とすることがわかる。こうして、

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_S \quad (10.22)$$

が得られる。ここで、偏微分の右下の添え字は、一定にする量である（例えば、 $\left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_P$ は P を一定にして S で微分するという意味する）。

エントロピーが一定のまま進む断熱過程を考えよう。このとき $dQ = TdS = 0$ である。さらに、過程が圧力一定のまま進行する定圧変化であるとする。このとき $dP = 0$ でもあるので、断熱かつ等圧過程では

$$H = \text{一定} \quad (10.23)$$

である。

§ 10.4 ヘルムホルツの自由エネルギー

(10.13) から、先ほどまでは、内部エネルギー E はエントロピー S と体積 V の関数であった。今度は、独立変数が温度 T と体積 V であるような熱力学関数を導入しよう。次の関数 F を導入する。

$$F = E - TS \quad (10.24)$$

この熱力学関数 F をヘルムホルツの自由エネルギーと呼ぶ。微分を取り、(10.13) を用いることで

$$\begin{aligned} dF &= dE - TdS - SdT \\ &= -PdV - SdT \end{aligned} \quad (10.25)$$

が得られる。こうして、

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad (10.26)$$

となる。

温度が一定で変化が起こる等温過程で物体に為される仕事 dW を考えよう。等温過程であるので、温度の変化はない。すなわち $dT = 0$ が満たされる。こうして、

$$dW = dE - TdS = d(E - TS) = dF \quad (10.27)$$

となる。したがって、等温過程で物体に為される仕事は、そのヘルムホルツの自由エネルギーの変化分に等しいことがわかる。また、(10.24) から $E = F + TS$ と書ける。一方、(10.26) から S は F の T 微分で得られることがわかっているのので、

$$E = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{F}{T}\right)_V \quad (10.28)$$

と、内部エネルギーがヘルムホルツの自由エネルギーから得られることが直ちにわかる。

§ 10.5 ギブスの自由エネルギー

引き続き、独立変数を温度 T と圧力 P に持つ熱力学関数を考える。次の熱力学関数 G を導入しよう。

$$G = F + PV (= H - TS = E + PV - TS) \quad (10.29)$$

これをギブスの自由エネルギーと呼ぶ。微分を取り、(10.25) を用いると

$$dG = -SdT + VdP \quad (10.30)$$

が得られ、確かに T と P の関数であることがわかる。こうして、

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P, \quad V = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T \quad (10.31)$$

が得られる。

§ 10.6 マクスウェルの関係式

(10.23) から

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V, \quad P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \quad (10.32)$$

がえられるので、直ちに

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \quad (10.33)$$

が得られる。同様に、(10.22)、(10.26)、(10.31) より

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S &= \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P, \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V &= \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T &= -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\end{aligned}\tag{10.34}$$

が得られる。(10.33)、(10.34) は併せて、マクスウェルの関係式と呼ばれる。

11章 電磁気学の基本

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}, t) \\
 \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\
 \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\
 \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}
 \end{aligned}
 \quad (\text{マクスウェル方程式})$$

§ 11.1 マクスウェル方程式

電磁気学の基礎方程式はマクスウェル方程式と呼ばれる。幾つかの実験事実から、この基礎方程式系が導かれるのであるが、ここでは電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式を与えておいて、実験事実が再現されることを見る。

(素) 粒子には電荷と呼ばれる性質が付与されている。電荷には、正、負の両方が存在する。たとえば、陽子は e 、中性子は 0 、電子は $-e$ といった具合である。ここで、 e は素電荷と呼ばれ、観測される粒子の電荷は、素電荷 e の* 整数倍に量子化されている†。陽子と中性子から原子核が構成され、陽子の個数と等しい電子が原子核に束縛されて原子が作られている。こうして、原子は電氣的に中性である。

3章の脚注ですでに与えられたように、2つの電荷間にはクーロンの法則と呼ばれる形で、お互いの電荷の積に比例し、2つの粒子の距離の2乗に反比例した力が働く。一方の電荷に注目すると、この電荷は他方の電荷が作る電場により力を受けると考えられる。クーロンの法則では

$$\mathbf{F} = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \equiv q_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = k \cdot \frac{q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.1)$$

と考え、 \mathbf{E} を、電荷 q_2 が作る電場と考える。電荷が連続的に分布しているときには、電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ を考える。すなわち、電荷密度は電場を産む。

一方、荷電粒子の流れは電流となる。荷電粒子の流れを平均したものを考える。これを電流密度 ($\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$) と呼ぶ。ここで、 n_i を i 粒子の単位体積あたりの粒子数、 q_i を i 粒子の電荷、 \mathbf{v}_i を i 粒子の速度、 $\langle \dots \rangle$ を \dots の平均として、電流密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j} = \sum_{i=\text{粒子}} n_i q_i \langle \mathbf{v}_i \rangle = \rho(\mathbf{r}, t) \langle \mathbf{v} \rangle \quad (11.2)$$

と得られる。電流密度を、その流れる方向 (単位ベクトルを \mathbf{n}) の断面積 (dS) で積分したものが電流 ($I(t)$) である。

$$I = \iint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS \quad (11.3)$$

*後に単位が決定されるが、ここで用いられる単位系で $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C] である。

†基本粒子であるクォークの電荷は、 $\frac{2}{3}e$ や $-\frac{1}{3}e$ などという分数電荷を持つ。

電荷密度は電場を生み出したが、電流密度は磁束密度を生じる。

電場、磁束密度が存在する空間では、電荷を持つ粒子は電磁相互作用を受ける。その強さは粒子の持つ電荷 q により与えられる。速度 \mathbf{v} で運動する電荷 q の荷電粒子には、ローレンツ力

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.4)$$

が働く。ここで、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} はそれぞれ、電場、磁束密度である。荷電粒子に働く力のうち、速度に依存しない部分から電場を、速度に依存する部分から磁束密度を定義したと考えればよい。電磁相互作用の強さは q で表されている。

電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ が時間・空間の分布として与えられていると、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ が生み出されるが、それらを決定するのがマクスウェル方程式である。[‡]。電磁気学の基方程式であるマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}, t), \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (11.5)$$

とまとめられる[§]。ここで、 ϵ は誘電率、 μ は透磁率と呼ばれる量であり、物質によって異なる。真空中では誘電率を ϵ_0 と書き、真空の誘電率、または電気定数と呼び、 $\epsilon_0 = 8.854187817 \times 10^{-12} [\text{F/m}]$ という値を持つ。また真空中の透磁率を μ_0 と書き、真空の透磁率、または磁気定数と呼び、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{N/A}^2]$ という値を持つ。これらが電磁気学の基本方程式系である[¶]。

§ 11.2 クーロンの法則

真空中のマクスウェル方程式で

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}, t) \quad (11.6)$$

を考えよう。この式の意味するところは、(時) 空間に単位体積あたりの電荷が $\rho(\mathbf{r}, t)$ で分布しているとき、そこから電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ が“湧き出して”くるということである*。電荷量が正の時は湧き出し、負の時は吸い込みである。電場の湧き出し、または吸い込みは、電荷が存在している物質の誘電率（の逆数）に比例している。

電荷 Q を持った点粒子が、真空中で原点に静止して存在しているとしよう。点電荷が原点にあるとして、点電荷（原点）から電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は湧き出してくる ($Q > 0$ のとき)。その結果、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.7)$$

という電場が得られる。実際、原点から半径 r のところすべての電場を足し合わせると、球の表面積は $4\pi r^2$ であることに注意して

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (11.8)$$

[‡]ここでは、電場と磁束密度を基本的な電磁場の量にとる。このような流儀を E - B 対応と呼ぶ。

[§]ジェームズ・クラーク・マクスウェル (1831-1879) の 1864 年の業績。

[¶]電流の単位はアンペア ([A]) であり、2 章でみたように、1A は、「1m 離して真空中に平行におかれた導線に、同方向に流れる 2 本の直線電流間に働く力が導線 1m あたり 1N であるときの電流の大きさ」として導入されている。電流とは荷電粒子の流れであったので、電流により電荷が運ばれている。1A の電流が 1 秒間に運ぶ電荷を 1 C (クーロン) と定義する。真空の誘電率に現れた F (ファラッド) という単位はコンデンサのところで頻繁に出てくるが、 $1\text{F} = 1\text{C}^2/\text{J}$ の次元を持つ。

* $\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ はベクトル場の発散であった。1 章 §§1.4.2 を思い出そう。

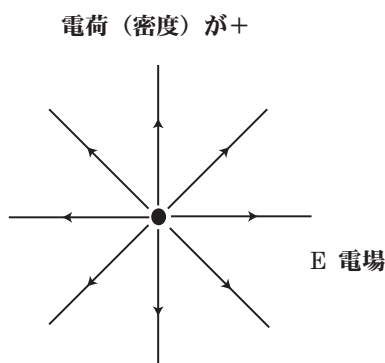


図 20:

となり、確かに電場の源 Q を真空の誘電率で割った形になる。こうして、静止した点電荷が作る電場は、距離の 2 乗に反比例し、大きさは点電荷の大きさに比例することがわかる。また電場の向きは電荷が正であれば電荷から発散する外向き、負であれば吸収される内向きになることがわかる。これをガウスの法則と呼ぶ。

点電荷 Q が作る電場のもとで、他の点電荷 q が Q から距離 r の点に置かれたとする。2 番目の電荷 q を持つ荷電粒子が受ける力は \mathbf{f} 、ローレンツ力の表式から

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (11.9)$$

と得られる。これはクーロンの法則に他ならない。ここで、単位ベクトル \mathbf{e}_r は 2 つの点電荷を結ぶ外向きの単位ベクトルであるので、同種の符号を持つ荷電粒子間 ($qQ > 0$) には斥力、異符の荷電粒子間 ($qQ < 0$) には引力が働くことがわかる。

さて、4 章 §4.3 で見たように、(力) \times (移動距離) で仕事、すなわち、ポテンシャルエネルギーが計算できた。そこで、単位電荷 ($q = 1$ [C]) あたりのポテンシャルエネルギーを考え、これを電位と呼ぶ。電位を $\phi(\mathbf{r})$ と書くと、(13.7) から、

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}_0) - \phi(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_0}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2} dr' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} - \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (11.10)$$

となるので、電位として、 $r \rightarrow \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ とおくと

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (11.11)$$

と得られる。こうして、電場 \mathbf{E} は逆に

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}} \quad (11.12)$$

と表される。

§ 11.3 単磁化の不在

磁束密度 \mathbf{B} に関するマクスウェル方程式

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (11.13)$$

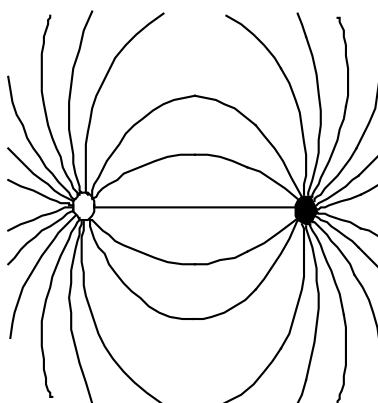


図 21:

を電場に関するマクスウェル方程式 $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ と比較すると、右辺に電荷密度に対応する“磁化密度”が現れていないことがわかる。すなわち、N 極だけ、あるいは S 極だけといった単磁化は存在しない。磁束密度は必ずわき出しがあれば吸い込みもあり相殺する。すなわち、任意の領域の中に単磁化が存在し、 $\text{div} \mathbf{B}$ が 0 にならないといった状況は起こりえないことがわかる。

§ 11.4 マクスウェル・アンペールの法則

前小節では“単磁荷”が存在しないことを述べた。従って、電荷密度が電場を産むように、磁荷密度が磁場（磁束密度）を生み出すことは無い。では、磁束密度はどのようにして生じ得るのか[†]。

今、時間に依存しない場合を考察する。このとき、電流密度の入ったマクスウェル方程式は

$$\text{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (11.14)$$

となる。電場 \mathbf{E} の時間変化は無いとしている。この式は、電流密度 \mathbf{j} が存在すれば、それを取り囲むように磁束密度 \mathbf{B} が生じ[‡]、その強さは電流密度が存在する物質の透磁率 μ に比例するということを主張する。生じた磁束密度の方向は、電流の進む方向に対して右ねじの回転方向になる[§]。

今、無限に長い直線電流を考えると、電流に垂直な平面はどこでも同等であり、電流に垂直な 2 次元平面を考えればよかった (§3.1 の脚注)。対称性から、磁場は直線電流 I からの距離 r のみの関数であり、直線電流を取り囲むような磁場を発生させる。よって、

$$B(r) = \mu \frac{I}{2\pi r} \quad (11.15)$$

となる。こうして、無限に長い直線電流の周りには、それを取り囲む様に、大きさ $B(r)$ の磁束密度が生じることがわかる。

時間に依存する場合には、電流密度 \mathbf{j} に、電場の時間変化に誘電率を掛けたもの、 $\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ が電流密度と同じ

[†]素粒子には固有の磁気モーメントと呼ばれる量が付随しており、微小な磁石のように考えられる。これらが一方向に揃うと巨視的に磁化が生じ、磁場を発生させ得る。例えば、永久磁石の様なものである。物質の磁性を理解するには量子力学の知識が必要となるので、この講義の範囲を超える。

[‡] $\text{rot} \mathbf{A}$ はベクトル場 \mathbf{A} の“回転”であり、これは円環状であったことを思い出そう (§§1.4.2)。

[§]電流の流れる方向に右手の親指を立てると、残りの 4 本の指で包み込むような方向に磁束密度が生じる。

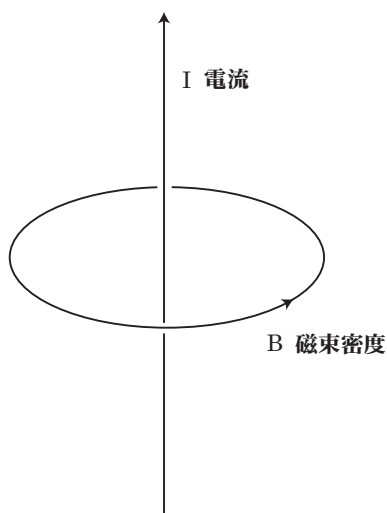


図 22:

寄与を与え、磁場が生じる。この寄与を変位電流と呼ぶ場合がある[¶]。時間に依存する場合の方程式

$$\text{rot } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

をマクスウェル・アンペールの法則と呼ぶ。

次に、磁束密度が電流に及ぼす力を求めておこう。磁束密度 \mathbf{B} が存在するとき、電荷 q 、速度 \mathbf{v} の荷電粒子が受ける力 \mathbf{f} は、ローレンツ力 (11.4) より

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (11.16)$$

であった。よって、単位体積当たりの荷電粒子数を n 、電流の流れる導線の断面積を S 、考えている部分の導線の長さを l とすると、電流を流れる導線には nSl 個の荷電粒子が存在することになる。導線中を流れる荷電粒子が受ける力の合力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = nSl\mathbf{f} = nSlq\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} = nqS\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}l \quad (11.17)$$

となる。ここで、荷電粒子の速度を平均の速度 \mathbf{v}_D に置き直した。また、 $nq\mathbf{v}_D$ は電流密度 \mathbf{j} 、 $nqS\mathbf{v}_D$ は電流 \mathbf{I} になるので、

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}l \quad (11.18)$$

が得られる。今、無限に長い直線電流 I_1 が作る磁束密度 \mathbf{B}_1 が、それに平行に置かれて同じ方向に流れる無限に長い直線電流 I_2 に及ぼす力 \mathbf{F}_2 を求めよう。上式から、

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}_1 l = I_2 B_1 l \mathbf{e} \quad (11.19)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{e} は 2 つの導線に直交しており、2 つの導線を結ぶ内向きの方向である。電流 I_1 が作る磁束密度 B_1 はアンペールの法則より、

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r} \quad (11.20)$$

[¶]変位電流と呼ばれる項は、次小節で見るファラデーの電磁誘導の法則と全く対応した項である。

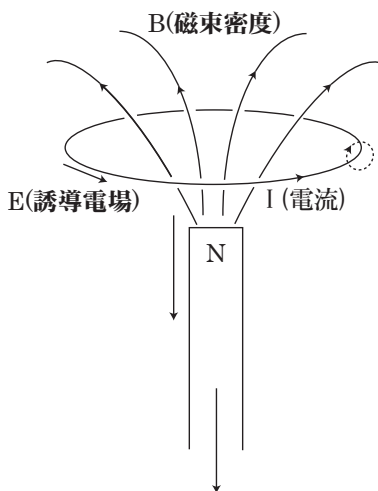


図 23:

である。ここで、 r は 2 つの導線間の距離である。よって、力 F_2 の大きさ F_2 は

$$F_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r} \quad (11.21)$$

となる。

§ 11.5 ファラデーの電磁誘導の法則

マクスウェル方程式

$$\text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (11.22)$$

を考える。この式の意味するところは、磁束密度の変化が、電場を生じるということであり、電場は、変化する磁束密度を取り囲むように円環状に生じるというものである^{||}。変化する磁束密度を取り囲むように導線を置いておくと、導線の内部に電場 \mathbf{E} が生じるということなので、電場によって導線内の荷電粒子は力を受けて円環状導線内を一方方向に動き始める。移動する電荷は電流であったので、磁束密度を変化させると電流が流れるということである。起電力が発生したともいう。これをファラデーの電磁誘導の法則と呼ぶ。起電力が生じて円環状の導線に電流が流れた時、前節のマクスウェル・アンペールの法則によって、電磁誘導で流れた電流により新たに磁束密度が生じる。円環内の磁束密度の変化を打ち消すように、新たに磁束密度を発生させる向きに、誘導された電流は流れる (図 23)。これは、マクスウェル方程式 (11.22) の右辺の負号に現れている。電流の流れる方向が円環内の磁束密度の変化を打ち消す方向であるという現象は、特にレンツの法則と呼ばれる。

§ 11.6 歴史の断章

マクスウェルは「マクスウェル方程式」の発見に際して、力学的なモデルを考えて導出し、その後、その足場を取り去って、美しい理論体系を残した。ファラデーの場の概念をもとに、どのように電場や磁場 (磁束密度) の満たす方程式を構築したらよいかの試行錯誤で、「エーテルの力学」を考えたようだ**。

^{||}rot \mathbf{A} はベクトル場 \mathbf{A} の回転であることに注意。

**「エーテル」とは波動としての光を伝える架空の媒質のこと。アインシュタインの相対性理論 (12 章) により、その存在は否定される。

少しだけ、彼の発想を追ってみよう。磁石の周りに砂鉄をまいた時に見られるように、磁束密度は磁力線として可視化できる。そこで、「磁力管」を考え、これは自分自身の周りに回転していると考えた(図24の左図)。磁力管が回転すると遠心力で膨らみ、隣の磁力管を(互いに)押す。この圧力は応力である^{††}。磁力管は回転で膨らむので、体積の保存から長さが縮まなければならない。これが、NとSの間に走る磁力管(磁力線)が縮まることによる、N極とS極間の引力と考えた。また、磁力管の半径を r 、回転の角速度を Ω とすると、磁場 \mathbf{H} は $\mathbf{H} = r\Omega$ と表されると考える。磁束密度 \mathbf{B} と磁場には $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ の関係がある。そうするとファラデーの電磁誘導の法則は

$$\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} \quad (11.23)$$

と書ける。 $\mathbf{H} = r\Omega$ だったので、左辺は角速度の時間微分、回転の運動方程式と見なされ、右辺は力のモーメントと見なされる。こうして、透磁率 μ を「エーテルの質量密度」と考えたようである。

次にマクスウェル・アンペールの法則を取り上げてみよう。図24の右図は、想像上の、隣り合う2つの磁力管を、上から見たところである。左右の磁力管はそれぞれ自分自身の周りを回転しているが、磁力管が接触していれば滑らかに回転できないであろう。そこで、磁力管の間に「ボールベアリング」が入っていると考える。図ではボールベアリングが右向き(時計回り)に回転すれば、2つの磁力管は滑らかに回転できる。しかし、2つの磁力管の回転の角速度が異なればどうなるであろうか。右の磁力管の回転より、左の磁力管の回転が速ければ、ボールベアリングは図で上方向に移動するであろう。マクスウェルはこれを「電流」と考えた。磁力管の回転($\text{rot } \mathbf{H}$)により電流 \mathbf{j} が得られるのである。こうして、 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ が得られる。さらに、時間変化で「エーテル」が「ひずむ」。このひずみを $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ と書き、ここでの \mathbf{D} は電場と $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ の関係を持つ。こうして、今でいうところの誘電率 ϵ を「エーテルの弾性率」と見なしていたようだ。こうして、マクスウェル・アンペールの式

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (11.24)$$

が得られる。 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} の間の関係を代入すると正しい式が得られることがわかる。電磁気学の基礎方程式を現在のマクスウェル方程式に纏めたのはマクスウェル自身ではなく、マクスウェルが20個の方程式で示した方程式系をヘヴィサイド(1850-1925)が1884年に4つに纏めたのである。

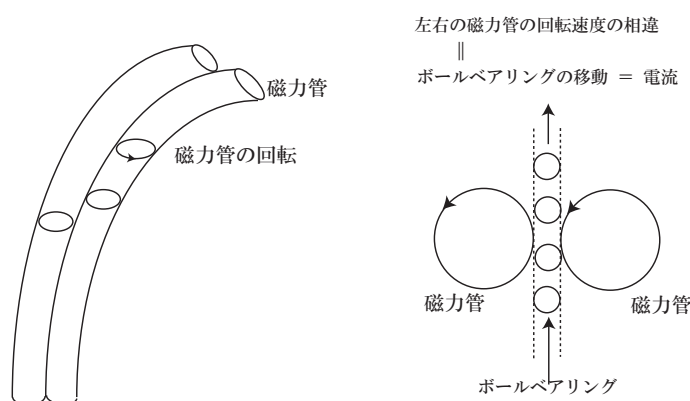


図 24:

^{††}現代的にはマクスウェルの応力と呼ばれる。

12章 電磁気学の応用

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{オームの法則})$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (\text{真空中での電磁波の速さ (光速)})$$

§ 12.1 オームの法則

§§12.1.1 オームの法則

導体と呼ばれる物質では、外部から電場を加えると、電荷が移動する。これは、導体中に自由電子が存在することにより実現される。電子が持つ電荷は $-e$ であるので、電子の流れが電流になるのではあるが、電子の電荷が負なので電子の流れと電流の向きは反対であるように定義されている。導体を構成する原子が周期的に並んでいると電子は散乱されずに進んでいくのであるが、実際には物質には不純物が存在したり、格子欠陥があったり、原子（イオン）の熱振動による散乱などがあり、電子は散乱されながら進むことになる。これが、電気抵抗となる。導体中には多数の自由電子が存在するので、電子の平均速度を v_D とし、全ての電子が平均速度で運動していると単純化して考えよう。平均速度は $v_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$ と書かれる。ここで、 n は単位体積当たりの電子数とした。和は単位体積中の n 個の自由電子についてとるものとする。自由電子が単位時間に不純物等に衝突して散乱される回数は速度に比例するので、速度に比例した抵抗力 $-\frac{m}{\tau} \mathbf{v}_D$ が働くと考えればよい。ここで、速度に比例した抵抗力の比例係数を m/τ とした。 m は電子の質量であり、時間の次元を持つ定数 τ （緩和時間）を用いた。こうして、自由電子に対する運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}_D \quad (12.1)$$

と書ける。電子の電荷は $-e$ である。定常の流れになると、電子の平均速度 \mathbf{v}_D は変化しなくなるので、運動方程式の左辺を 0 とし、

$$-e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}_D = 0 \quad (12.2)$$

から、自由電子の最終的な平均速度が得られる。

$$\mathbf{v}_D = -\frac{e\tau}{m} \mathbf{E} \quad (12.3)$$

電子は電荷を持つので、電子の流れが電流密度 \mathbf{j} となるが、電子の電荷が負であることを考慮して

$$\mathbf{j} = n(-e)\mathbf{v}_D = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} \quad (12.4)$$

と得られる。以上より、まとめて、

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \\ \sigma &\equiv \frac{ne^2\tau}{m} \end{aligned} \quad (12.5)$$

と得られる。すなわち、電流密度は電場に比例する。これをオームの法則と呼ぶ。また、比例係数として導入した σ を電気伝導度と呼ぶ。

次に、電流の方向のみを考え、その方向を x 方向としよう。電流密度の大きさ j は、電位 ϕ を用いて

$$j = \sigma E = -\sigma \frac{d\phi}{dx}, \quad (\mathbf{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{r}}) \quad (12.6)$$

と書けるので、 x 方向の導線の長さ l 、それに垂直な断面積 S で体積積分して

$$\iiint j dx dS = -\sigma \iiint \frac{d\phi}{dx} dx dS \quad (12.7)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \int \left(\iint j dS \right) dx = \int I dx = Il, \quad \left(I = \iint j dS : \text{電流} \right) \\ (\text{右辺}) &= -\sigma \iint \left(\int \frac{d\phi}{dx} dx \right) dS = -\sigma \iint (\phi(2) - \phi(1)) dS = -\sigma S (\phi(2) - \phi(1)) = \sigma SV \\ &\quad (V = |\phi(1) - \phi(2)| : \text{電位差}) \end{aligned}$$

と変形されるので、両辺等しいことから

$$Il = \sigma SV \quad (12.8)$$

と表わすことができる。整理して、

$$\begin{aligned} V &= RI \quad (12.9) \\ R &= \frac{l}{\sigma S} \end{aligned}$$

と得られる。これもまた、オームの法則と呼ばれる。ここで導入した比例係数 R を電気抵抗、電気伝導度の逆数 $\frac{1}{\sigma}$ を抵抗率と呼ぶ。

§§12.1.2 ジュール熱

電気抵抗が存在すると、速度に比例した力が働くことで、エネルギーが散逸していくことがわかる。このエネルギーは熱として散逸される。電流が流れることにより発生する熱を考えよう。

速さ v_D の電子が Δt の時間に動く距離は $v_D \Delta t$ である。また、電場により電子が受ける力は $-eE$ である。したがって、仕事は、(力)×(移動距離) となるので、電場が自由電子1個にする仕事は $-eE v_D \Delta t$ となる。ここで、導線の単位体積当たりの電子数を n 、導線の断面積を S 、考えている導線の長さを l とすると、電子が動く導線に存在する電子数は nSl 個となる。よって、電場が導線内の電子にする仕事 ΔW は

$$\Delta W = -eE v_D \Delta t \cdot nSl = n(-e)v_D S \cdot El \cdot \Delta t = IV \Delta t \quad (12.10)$$

となる。ここで、 $-nev_D \equiv j$ は電流密度、 $jS \equiv I$ は電流、 $El \equiv V$ は電位差である。以上から、電場がする単位時間当たりの仕事、すなわち仕事率 W は

$$W = \frac{\Delta W}{\Delta t} = IV \quad (12.11)$$

と書ける。オームの法則を用いると、

$$W = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (12.12)$$

とも書ける。電場がした仕事が熱として発生することになる。これをジュール熱と呼ぶ。

電流密度 \mathbf{j} と電場 \mathbf{E} を用いて、ジュール熱は

$$W = IV = \iint \mathbf{j} dS \cdot \int dx \mathbf{E} = \iiint \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV \quad (12.13)$$

と書けることに注意しよう。このとき、 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ が単位体積当たりのエネルギーになっていることがわかる。

§ 12.2 電磁波

真空中 ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) でのマクスウェル方程式は、

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.14)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12.15)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (12.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (12.17)$$

と書ける。式 (12.16) に rot を施して、§1.4.2 で記した $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ となるベクトル解析の公式を用いると、(12.14) を使って

$$(\text{左辺}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad \left(= -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} \right) \quad (12.18)$$

となる。一方、右辺は (12.17) を用いて

$$(\text{右辺}) = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (12.19)$$

となる。両辺等しいと置いてまとめると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.20)$$

が得られる。これは7章で見た波動方程式 (7.4) そのものであり、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は、速さ $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ で伝わる波動であることを意味している。

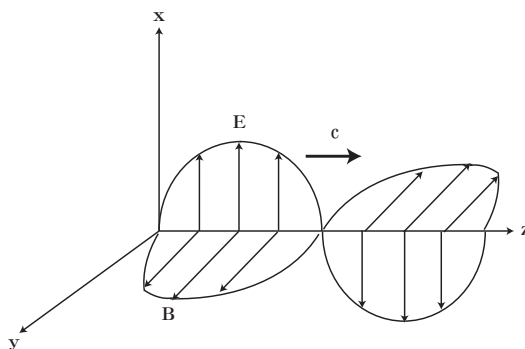


図 25:

同様にして、(12.17)の両辺に rot を施し、(12.15) と (12.16) を用いると、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} \quad (12.21)$$

が得られる。この式はまた、磁束密度 \mathbf{B} は、速さ $c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ で伝わる波動であることを意味している。

こうして、重要な結論が導かれる。すなわち電磁場は波動として伝わる。電磁場の波動を電磁波と呼ぶ。電磁波の伝わる速さ c は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (12.22)$$

となった。これは光速度と一致しており、光（可視光）は電磁波の一種であると結論される。

電磁波の進む方向と、電場、磁場の向きを考えよう。今、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (12.23)$$

と置いてみよう。電磁波の進行方向は \mathbf{k} 方向である。また、 \mathbf{E}_0 、 \mathbf{B}_0 はそれぞれ電場、磁束密度の方向を向く定ベクトルである。(12.14) に (12.23) の電場 \mathbf{E} を代入すると、 $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ に気を付けて

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = 0 \quad (12.24)$$

が得られる。従って

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0, \quad \text{すなわち } \mathbf{k} \text{ と } \mathbf{E} \text{ は直交する} \quad (12.25)$$

すなわち、電場は電磁波の進行方向に直交している。同様に、磁束密度に関しては (12.15) から

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (12.26)$$

が得られるので、磁束密度と電磁波の進行方向も直交していることがわかる。さらに (12.16) から

$$\text{左辺} = \text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

$$\text{右辺} = \omega \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (12.27)$$

が得られる。波動では波の速さを v として、 $\omega = kv$ の関係があった (§7.2 参照のこと)。電磁波の速さは光速 c であるので、 $\omega = kc$ であるので

$$\frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = c \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (12.28)$$

が得られる。すなわち、磁束密度は \mathbf{k} とも \mathbf{E} とも直交している。すなわち、 \mathbf{k} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} は互いに直交していることがわかった。電場、磁束密度は電磁波の進行方向に直交する方向に振動している。振動方向が波の進行方向に直交している波は、横波と呼ばれる。電磁波は横波である (図 25)。

13章 相対性理論

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (\text{ローレンツ変換})$$

§ 13.1 アインシュタインの特殊相対性原理と光速度不変の原理

前章では、電磁気学の基礎方程式であるマクスウェルの方程式から電磁波の方程式を導いた。すなわち、電場、磁場の時間変動は波動として伝わることを見た。そこでは、電磁波の速さ c が電磁波の満たす方程式に表れた。

しかし、速さは基準系を決めなければ決まらないのではないだろうか？ たとえば、時速 60 km/h で進むトラックの荷台から進行方向に時速 100 km/h で物を投げると、地面に静止している人には投げられた物は前方に時速 160 km/h で投げ出されたように見えるはずであろう ($160 = 100 + 60$)。では、基礎方程式から導出された電磁波の方程式に表れた光の速さ c は、どのような基準系に対する速さなのであるだろうか？

以下のことをまずは考察しておこう。一定の速度（速さと進む向きが変化しない）で滑らかに動いている乗り物の中にとすると、乗り物の中では、場所さえ許せばいつもと変わらずキャッチボールもできるし、窓の外の景色が後ろに流れていく以外は普段と変わったことはない。もし窓が無ければ、乗り物は動いているのか止まっているのか判らないだろう。乗り物は、静止している一つの慣性系に対して等速直線運動しているので、乗り物の中はまた慣性系である。こうして、全ての慣性系において物理法則は変わらず成り立つと考えて良さそうである。この、もっともらしい要請を、(アインシュタインの)相対性原理と呼ぶことにしよう。

次に、静止している慣性系に対して速さ V [m/s] で動いている乗り物の中でじっとしている人が、この乗り物の中で発した光の速さを測ることを考える。ここで、乗り物の中に静止している人が測定した光の速さを c [m/s] としよう。この現象を乗り物の外にいる人も見ている。乗り物の外で静止している人がこの同じ光の速さを測るとどうなるだろうか。日常経験に照らし合わせて考えると、乗り物が進む方向の光の速さは $c + V$ [m/s]、反対方向は $c - V$ [m/s] になりそうだと思う。ところが、光の場合にはそうならないことが、実験で実証されている。動いている乗り物の中の人でも、乗り物の外で静止している人でも、光の速さはいつも c となる。これは**実験事実**なので認めるしかない。この事実を**光速度不変の原理**と呼ぶ。すなわち、真空中では光の速さ c [m/s] は常に、

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

となっている。電磁気学の基礎理論から導かれた電磁波の方程式は全ての慣性系で成り立ち、電磁波の速さは常に c なのである。光が伝わる現象も物理法則であると考えれば、すべての慣性系において、光の伝わる方法は同じであるはずなので、光の速さが有限で、その値が全ての慣性系で等しいということは、相対性原理の現れの一つと考えることもできる*。

*光の速さが観測者（慣性系）によらずに一定値をとることは、19世紀の終わりに最初に行われたマイケルソンとモーレーによる実験で示された（マイケルソン・モーレーの実験（1887年））。

§ 13.2 光速度不変の原理と同時刻の相対性

すべての慣性系にとって、光の速さが同じ値をとるという実験事実をもとにすると、たちどころに日常の経験的世界観を変更せざるを得なくなることがわかる。

今、2つの慣性系があり、お互いに相対的に、速さ V [m/s] で、ある方向に一様に運動しているとしよう。運動方向に x 座標をとり、一つの慣性系を静止系 K と記すことにする。先ほどの例では乗り物に乗らずに静止している人の座標系に対応する。もう一つの慣性系は、静止系 K に対して x 方向に速さ V [m/s] で運動しており、この運動座標系を K' と記すことにする。先ほどの例では、乗り物の中で静止している人の座標系に対応する。図 26 のように、 K 系と K' 系の座標軸は互いに同じ方向を向いているとする。今、 K' 系で図 26 の A 点で光を灯したとしよう。 A 点から等しい距離にある B 点、 C 点に光が到達する時刻を考えてみる。光速度不変の原理から、 K' 系では光源 A から運動方向に対して前方にある C 点へも、後方にある B 点へも、等しい速さで光は伝わっていくはずである。このとき、 AB と AC の距離が等しいので、 B 点、 C 点へ光が到達する時刻は同じになるはずである。つまり、慣性系 K' 系にいる観測者には、光が B 点、 C 点に到達するのは同時刻の出来事であると判断するだろう。

一方、この同じ現象を慣性系 K にいる観測者はどのように観測するだろうか。光が A 点を発した後、 x の正の方向（前方）へも負の方向（後方）へも、 K 系に静止した観測者には光は同じ速さで伝わる。これが光速度不変の原理が主張する内容であり、光源の運動状態に依らずに光は同じ速さで伝わるということは実験事実であった。ところが、 K' 系は x の正の方向へ速さ V [m/s] で運動しているので、 B 点は光が発せられた点に近づいて来て、 C 点は遠ざかって行く。つまり、光が進まなければならない距離は明らかに後方にある B 点の方が短くなるであろう。すなわち、 K 系に静止している観測者には、 A 点で発せられた光は B 点に到達したのち C 点に到達したと判断するであろう。

こうして、 K' 系の観測者には同時刻に起きたできごとが、 K 系の観測者には同時刻に起きてはいないことになる。これは、光の速度が運動状態に依らずにすべての慣性系において等しいという光速度不変の原理から導かれたことであり、どちらの観測者にとっても正しい事実である。

以上のことからわかることは、同時刻概念は慣性系ごとに決まる相対的なものであるということである。決して同時刻は全ての慣性系にとって同じではない。このことは同時刻の相対性と呼ばれる。こうして、時間はすべての慣性系において共通ではなく、慣性系に固有の量であることを認めなければならなくなった。

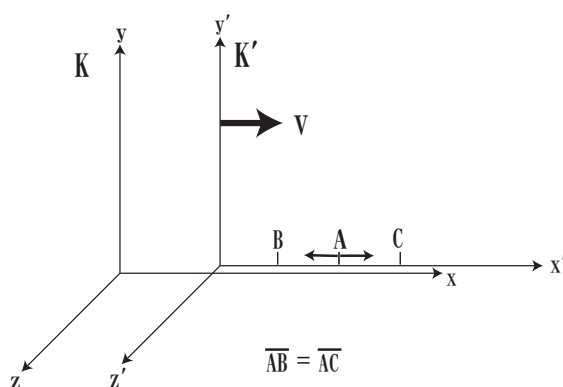


図 26:

§ 13.3 ローレンツ変換

光速度不変の原理から、慣性系ごとに時間を考えなければいけないことが、前の節でわかった[†]。時間が異なるといっても、2つの慣性系で全く関係なく時間が流れているのだろうか。次に、2つの慣性系の間にはどのような関係が存在するのかを調べていこう。

今、 x 軸方向に互いに一様に運動している2つの慣性系を考える。前と同じように、静止系を K と記し、この K に対して K 系の x 軸の正の方向に速さ V [m/s] で一様に運動している慣性系を K' とする。それぞれの慣性系 K 及び K' の座標は、時間も含めてそれぞれ (x, y, z, t) 、 (x', y', z', t') と記すことにする。運動方向は x 、または同じことだが x' 方向であるので、運動方向に直交する座標は2つの慣性系で常に等しいとして良からう。すなわち、

$$y' = y, \quad z' = z$$

が成り立つとする。

今、時刻 $t = t' = 0$ で座標の原点は重なっていたとしよう。このとき、 K 系で、時刻 $t = 0$ に原点から x 軸正の向きに出た光の先端の位置 x [m]、及び同じく光の先端を K' 系で観測した場合の位置 x' [m] は、

$$x = ct, \quad x' = ct' \tag{13.1}$$

となるはずである。ここで、 t 、 t' は K 系、 K' 系で測定した時刻で、光はどちらの座標系でも c [m/s] で進むので、(進んだ距離) = (速さ) × (かかった時間) ということである。

相対性原理から、 K 系で成り立つ事実は K' 系でも成り立つはずなので、(13.1) 式で、一方が成り立てばもう一方が成り立つためには

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

という関係式があれば良いことがわかる。ただし、 λ はこれから決定すべき定数であり、1である必然性は無い。同様な考察から、 x 軸負の方向へ伝わる光に関しては

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

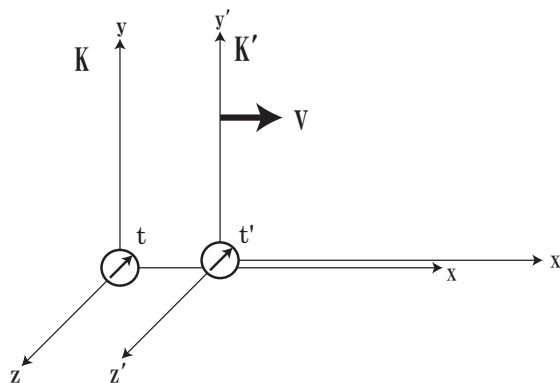


図 27:

[†]時間は僕らのものだ。

となっていれば良からう。ここに、 μ も未定の定数である。上の 2 式を辺々足したり引いたりすると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \rho ct, & ct' &= \gamma ct + \rho x \\ \text{ただし } \gamma &\equiv \frac{\lambda + \mu}{2}, & \rho &\equiv \frac{\mu - \lambda}{2} \end{aligned} \quad (13.2)$$

と整理される。未知数 λ , μ のかわりに、 γ , ρ と書くことにした。式 (13.2) は、 K 系と K' 系の座標変換を表わしているとも見なせるので、 $x' = 0$ の点は (13.2) 式から

$$0 = \gamma x + \rho ct, \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{\rho}{\gamma} ct$$

と得られる。ここで、 K' 系の原点 $x' = 0$ は、 K 系に対して速さ V [m/s] で運動していることを思い出すと、 $x = Vt$ となるはずなので、両者を見比べると

$$\rho = -\frac{V}{c}\gamma$$

と、未定の定数を一つ減らすことができる。こうして (13.2) 式の、 $x' = \dots$ と $ct' = \dots$ の式から、上で導いた ρ を用いて ρ を消去すると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma \frac{V}{c} ct, \\ ct' &= \gamma ct - \gamma \frac{V}{c} x \end{aligned} \quad (13.3)$$

となる。

これらの (13.3) 式を逆に解いてみよう。実行すると

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{V}{c}\right)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} ct' \\ ct &= \frac{ct'}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{V}{c}\right)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} x' \end{aligned} \quad (13.4)$$

が得られる。この (13.4) 式が意味することを考えてみよう。これは K' 系に静止した人から K 系をみていることに対応しており、 K' 系を静止系、 K 系を K' 系に対して x' 軸負の方向に速度 $-V$ [m/s] で一様に運動している系として、これらの 2 つの座標系の変換とみなせる。したがって、(13.3) 式で、 $x' \leftrightarrow x$, $ct' \leftrightarrow ct$, $V \leftrightarrow -V$ としたものに他ならない。あらためて書いておくと

$$\begin{aligned} x &= \gamma x' + \gamma \frac{V}{c} ct' \\ ct &= \gamma ct' + \gamma \frac{V}{c} x' \end{aligned} \quad (13.5)$$

となる。つまり、(13.4) 式と (13.5) 式は同じ式であるべきだというわけである。よって、両者を比較することにより、未定であった γ を決定することができる。 $V = 0$ では $x = x'$ なので符号に注意して、

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

となる。これをもとの (13.3) 式に戻すことで 2 つの慣性系を結ぶ関係を得ることができる。

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ ct' &= \frac{ct - \frac{V}{c}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned} \quad (13.6)$$

2つの慣性系を結ぶ変換 (13.6) をローレンツ変換と呼ぶ[‡]。

ところで、光の速さ c はおよそ秒速 30 万キロメートルであった。私達が日常経験する速さは光の速さに比べると十分すぎるほど遅いと言えよう。新幹線で時速 300 キロメートル (秒速 83 メートル) 程度、ジェット機で時速 1000 キロメートル (秒速 278 メートル) 程度、地球からロケットを打ち上げて、そのロケットが地球の重力を振り切って人工衛星にならずに宇宙空間へ飛んでいく時に必要な速さでさえ、秒速 11 キロメートル程度である。ということは、日常、私達が経験する速度では、(13.6) 式に現れる $\frac{V}{c}$ は 1 に比べて十分すぎるほど小さいと考えて良からう。こうして、 $\frac{V}{c} \rightarrow 0$ と近似したものが私達の日常をうまく説明してくれると考えられる。実際、(13.6) 式で $\frac{V}{c}$ を 0 とすると

$$x' = x - Vt, \quad t' = t \quad (13.7)$$

となる。つまり、全ての慣性系で時間は共通 ($t' = t$) であり、座標系の変換も、日常経験で納得できる形になっている。

§ 13.4 ローレンツ変換からの帰結

2つの慣性系をつなぐローレンツ変換が導いたので、そこから得られる簡単な帰結を紹介しておこう。

§§13.4.1 動いている慣性系の時間の遅れ

2つの慣性系 K 系と K' 系の原点 ($x = 0$, $x' = 0$) に固定された時計を考えよう。 K 系を静止系と見て、それに対して K' 系は x 方向に速さ V [m/s] で動いているとする。 K' 系の原点におかれた時計は K 系からみて、速さ V [m/s] で動くので、 K' 系の原点に置かれた時計の座標は K 系から見ると $x = Vt$ となっている。ローレンツ変換 (13.6) の時間の変換式に $x = Vt$ を代入すると

$$ct' = \frac{ct - \frac{V}{c}Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = ct\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

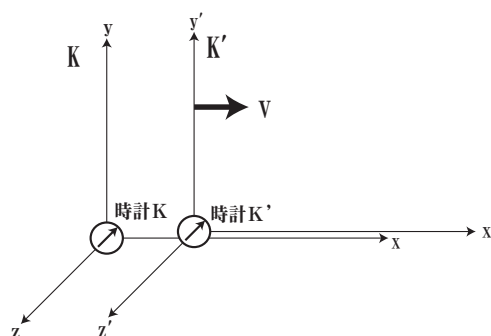


図 28:

[‡]アインシュタイン (1879-1955) が 1905 年に導いたのだが、アインシュタイン変換とは呼ばれない。アインシュタインより前に同じ式をローレンツが 1899 年に導出していたのでこう呼ばれる。

が得られる。こうして、 K' 系での時間 t' [s] と、 K 系での時間 t [s] の間には

$$t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (13.8)$$

の関係があることがわかる。今、 $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1$ なので $t' < t$ となっている。つまり、静止系に対して運動している慣性系の時間 t' は、静止慣性系の時間 t と比較して遅れる（ゆっくり進む）ことになることがわかる[§]。

§§13.4.2 ローレンツ収縮

次に、 K 系に対して速さ V [m/s] で x 軸方向に運動している K' 系を考え、 K' 系に固定された長さ l_0 [m] の物体 AB を考えてみよう (図 29)。この長さ l_0 [m] は K' 系において測定されており、物体に対して静止した観測者が測定する物体の固有の長さであることがわかる。物体 AB の両端の位置は、 K' 系で見て、図 29 の様に x'_2 と x'_1 であり、 $l_0 = x'_2 - x'_1$ となる。

この物体の両端の座標を K 系で測定してみよう。 K' 系での座標値に対応して、 K 系ではそれぞれ x_2 、 x_1 であり、 K' 系に固定された物体 AB を K 系の観測者が測定した長さ l は、 $l = x_2 - x_1$ となる。ローレンツ変換 (13.6) から、 x'_1 と x_1 、 x'_2 と x_2 には関係があったので、それらの関係を使って $l_0 = x'_2 - x'_1$ を計算してみましょう。結果は

$$\begin{aligned} l_0 &= x'_2 - x'_1 \\ &= \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

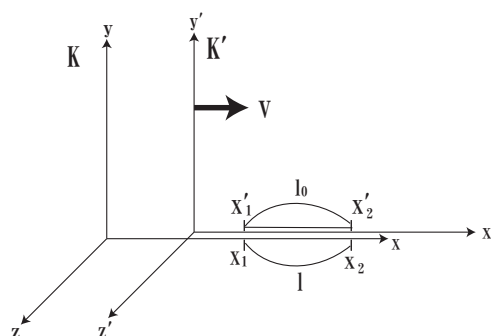


図 29:

[§]宇宙空間から色々な素粒子が地球に降り注いでいる。これらを宇宙線と呼ぶ。宇宙線中にはミュー粒子と呼ばれる素粒子も含まれている。ミュー粒子は $\tau = 2.20 \times 10^{-6}$ 秒 (およそ 2 マイクロ秒) で、電子、ミューニュートリノ、電子反ニュートリノに崩壊してしまう。ミュー粒子が大気上空で作られ、光の速さ c [m/s] の 99.99% の速さで地上に向かって飛来しても、 $0.9999c\tau \approx 660$ メートル程度進むと崩壊してしまうはずである。ところが、実際にはミュー粒子は地上に到達し、観測されている。これは、地上に静止している我々から見て、ミュー粒子は高速で運動しているので、ミュー粒子が刻む時間は我々の時間に比べて遅れている。したがって、ミュー粒子が崩壊するまでの時間は、我々の時間で見ると伸びている。このことから、ミュー粒子は崩壊せずに地表まで届く。相対性理論の予言どおりの寿命の伸びが観測されている。

となる。すなわち、

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

が得られる。ここで、 $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1$ であるから、 $l < l_0$ ということになる。つまり、物体の長さは慣性系の運動により異なる値を持つことになる。動いている物体の長さを静止系から測る (l) と、物体固有の長さ (l_0) に比べて縮んで観測されることになった[¶]。この事実はローレンツ収縮と呼ばれる。

§§13.4.3 速度の合成則

さて、速度はどのように変換されるのであろうか (図 30)。本当に光の速さはどの慣性系でも同じなのだろうか。

今、 K' 系から K 系を見ると、 K 系は x の負の方向に速さ V [m/s] で進んでいるので、 K 系が K' 系に対して動く速度は、 $-V$ となる。ローレンツ変換 (13.6) 式で、 $x \leftrightarrow x'$ 、 $t \leftrightarrow t'$ 、 $V \rightarrow -V$ とすれば K 系と K' 系の役割を入れ替えることができるので、

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

としておくことができる。時刻 $t = t' = 0$ で原点 $x = x' = 0$ から物体が x 、 x' 軸の正の方向に進み、 K 系では時刻 t [s] に x [m] の位置に、同じ現象を K' 系から見ると物体は時刻 t' [s] に x' [m] の位置にいるとしよう。(13.9) 式の両辺を、辺々割り算すると、

$$\begin{aligned} \frac{x}{t} &= \frac{x' + Vt'}{t' + \frac{V}{c^2}x'} \\ &= \frac{\frac{x'}{t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{x'}{t'}} \end{aligned}$$

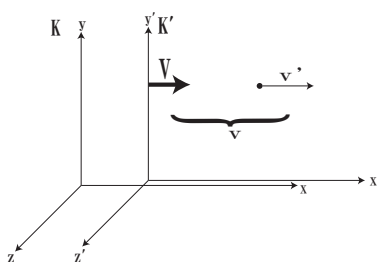


図 30:

[¶]物体が縮むというより、空間が縮んでいる。

となる。ここで、 K 系から見た物体の速さ v [m/s] は $v = \frac{x}{t}$ であり、 K' 系から見た物体の速さ v' [m/s] は $v' = \frac{x'}{t'}$ であるので、

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} \quad (13.10)$$

という式が得られる。これが特殊相対性理論での速度の合成則になる。

通常は慣性系の速さ V [m/s] も、物体の速さ v' [m/s] も、光の速さ c に比べて十分に遅いので、速度の合成則 (13.10) の右辺の分母に現れる $\frac{V}{c}$ 、 $\frac{v'}{c}$ は 1 に比べて十分小さく、思い切って 0 にしてしまっても良いだろう。このときには十分な精度で、速度の合成則 (13.10) 式は

$$v = v' + V$$

と表せる。時速 60 キロメートル (V) のトラックから、トラックの進行方向に時速 100 キロメートル (v') で物体を投げ出したとき、地上に静止している人には物体は時速 160 キロメートル ($v = V + v'$) で動いているように (近似的に) 見えるわけである。

ところが、慣性系の速さ V か、物体の速さ v' のどちらか、あるいは両方が光の速さに近くなった状況では、このような近似はできない。たとえば、物体として光を考えてみよう。 K' 系での光の速さが c であれば、(13.10) 式に $v' = c$ を代入することになる。 K 系で見た光の速さ v は (13.10) 式から計算すると $v = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = c$ となり、 K 系で見た光の速さ v は確かに $v = c$ となることがわかる。すなわち、光速度は不変である。

§ 13.5 重力場による時間の遅れ

これまでは、力が何も働かない状況を考えていたが、最後に重力が働くところでの時間について考えてみよう。

重力 (万有引力) は他の力と違って、特別な点がある。それは、重力の大きさが物体の質量に関係することから生じている。2つの物体間にはそれぞれの質量の積に比例し、物体間の距離の 2 乗に反比例する引力が働くことが知られていることは 3 章で見たとおりである。すなわち、2つの物体の質量をそれぞれ m [kg]、 M [kg]、2物体間の距離を r [m] とすると、物体にはそれぞれ

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

という力 F が引力として働く。この重力で生じる物体の加速度を丁度打ち消すような加速度を持って運動している座標系では、局所的には、すべての物体に働く重力の効果を一旦消してしまうことが可能である。具体的には以下の通りである。ニュートンの運動法則によれば、力 F 、質量 m [kg]、加速度 a [m/s²] として

$$F = ma$$

という関係が与えられていた。力として、質量 M [kg] の物体から受ける重力を考えると、

$$G \frac{mM}{r^2} = ma$$

となり、両辺から考えている物体の質量 m を落とすことができる。こうして、物体は加速度 a で運動しているが、逆に加速度 $-a$ で運動する座標系から見ると、物体は重力の影響なく運動しているように見えるはずである。逆に、重力場が無いところでも、一定の加速度 a で運動している座標系では、加速度の向きと反対向きに

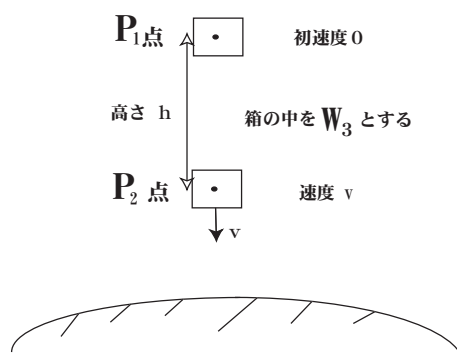


図 31:

見かけの力を感じる。この見かけの力は、先ほどの重力と、私達には区別がつけられない。こうして、重力場の中の運動と加速度座標系での運動は区別できないことがわかる。これを等価原理と呼ぶ。

図 31 のように、重力場中で箱が自由落下している状況を考えてみよう。箱が P_1 点にあるとき、箱の速さは $V = 0$ であったとする。点 P_1 と箱の中 W_3 の相対速度は 0 であるので、両者は同じ慣性系にあると言える。よって、 P_1 点での時刻 t_1 [s] と、箱の中 W_3 での時刻 t_3 [s] の進み方は等しく、

$$t_1 = t_3 \quad (13.11)$$

が成り立つ。

続いて、箱が P_2 点に達したとき、重力により箱が加速されていて、箱の速さが V [m/s] になっているとしよう。箱の中に静止している人から見ると、 P_2 点は速度 $-V$ [m/s] で通り過ぎていくように見えるはずである。§§13.4.1 で説明された「時間の遅れ」を思い出すと、箱の中に静止している人に対して速度 $-V$ で動いている P_2 点の時刻 t_2 [s] (動いている座標系の時間なので t' に対応) は、箱の中の人の時刻の進み方 t_3 [s] (静止している座標系なので t に対応) より遅れている。式で表わすと

$$t_2 = t_3 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad (13.12)$$

という関係がついている。

(13.11) 式と (13.12) 式から t_3 を消去すると、 P_1 点での時間 t_1 と P_2 点での時間 t_2 の進み方を比べることが可能になる。

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1 \quad (13.13)$$

すなわち、重力が強い P_2 点の時間の進み方 t_2 は、重力場の弱い点 P_1 での時間より遅れることがわかる。重力が強いほど、時間の進み方はゆっくりになるということである^{||}。

^{||} どんどん重力場を強くしていくと、時間の遅れが顕著になり、重力場の源から遠方にいる我々から見て、いずれ時間は止まってしまうであろう。我々から見て時間が止まっているということは、その重力源からは何も出てこない (時間が進まないで物体は動かない) ということになる。光さえも重力源から出てくることができないこのような極限状態は、ブラックホールにおいて実現されている。

14章 質量とエネルギーの等価性

$$E = mc^2 \quad (\text{質量とエネルギーの等価性})$$

§ 14.1 質量とエネルギーの等価性

光は、電磁波のところで見たように、波動として振舞うが、1905年のアインシュタインの光量子論以来、粒子と波動の二重性* から、光も素粒子の一種であることが知られている。素粒子としての光を光子と呼び、エネルギーと運動量を持つ。光子の持つエネルギー E と運動量 p は

$$E = 2\pi\hbar\nu, \quad p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (14.1)$$

となることが知られている[†]。ここで、 ν は光の振動数、 λ は光の波長であり、 \hbar はプランク定数と呼ばれる定数である[‡]。波の振動数と波長には $\nu\lambda = c$ の関係があった。ここで、 c は波の速さであり、光の場合には光速である。こうして、

$$E = 2\pi\hbar\nu = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = pc \quad (14.2)$$

の関係が得られる。

さて、質量 m [kg] の物体を用意し、両側から振動数 ν [1/s] の光を吸収させる。同じ振動数の光なので、波長 λ [m] も等しく、ゆえに運動量 p も $p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ で等しい。両側から同じ運動量の光がぶつかるので、質量 m の物体は動かず、静止したままである (図 32 の左の状況)。しかしながら、光子を 2 つ吸収したので、エネルギーは $2 \times 2\pi\hbar\nu$ だけ増えている。一つの光子の持つエネルギーは $E = 2\pi\hbar\nu$ だった。増えたエネルギーを ΔE とすると

$$\Delta E = 2E = 4\pi\hbar\nu \quad (14.3)$$

となる。

今度は、同じ現象を、下向きに速さ v [m/s] で動いている人から見てみよう。この人にとっては、質量 m の物体は上向きに速さ v で動いているように見える (図 32 の右の状況)。図から

$$\cos\theta = \frac{v}{c} \quad (14.4)$$

となっていることは容易に見て取れる。光の運動量の水平成分は左右の光で打ち消しあうが、上方向の運動量成分

$$p \cos\theta \quad (14.5)$$

*次の 15 章で見る。

[†]次の 15 章で見る。アインシュタイン・ドブロイの関係と呼ばれる。

[‡]ここで、 \hbar は

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

の関係で、 h という定数に結び付けられる。この h はマックス・プランクが 1900 年に黒体輻射のスペクトルの理論式を出した時に初めて導入された定数で、この定数をプランク定数と呼ぶことが多いが、ここでは h を 2π で割った定数 \hbar を基本定数と考える。

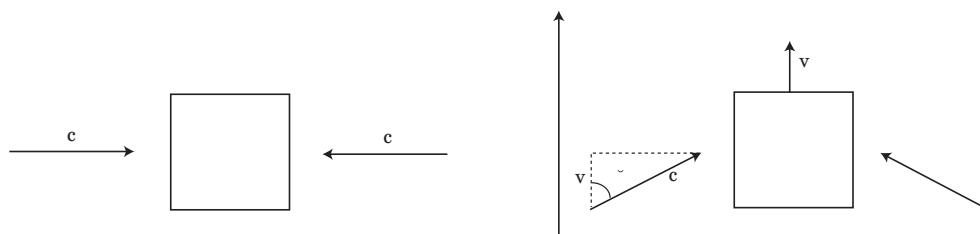


図 32:

は左右の光子とも上向きで、質量 m の物体は光を吸収した時に 2 つ分の運動量

$$\Delta p = 2p \cos \theta = \frac{2pv}{c} \quad (14.6)$$

を上向きに貰ってしまう。ところが、質量 m の物体の上向きの速さは変わらないはずだ。なぜなら、図 32 の左の状況を、下向きの速さ v の座標で見ているだけだからである。左の状況では質量 m の物体の上下動の速度は変化せず、静止したままだった。

質量 m の物体の運動量は、(質量) \times (速度) であるが、今、速度が増えないことが分かったので、上向きの運動量が増加するためには物体の質量が増加していなければならないことになる。質量の増加分を Δm とすると、運動量の増分 Δp は、(14.6) から

$$\Delta p = \Delta m \times v = \frac{2pv}{c} \quad (14.7)$$

とならねばならない。こうして両辺 v で割り算しておく

$$\Delta m = \frac{2p}{c} \quad (14.8)$$

が得られる。光の運動量 p は (14.2) から

$$p = \frac{E}{c} \quad (14.9)$$

という関係があったので、(14.8) に代入すると

$$\Delta m = \frac{2p}{c} = \frac{2E}{c^2} = \frac{\Delta E}{c^2} \quad (14.10)$$

となる。ここで、光のエネルギー $E = 2\pi\hbar\nu$ と、 $\Delta E = 4\pi\hbar\nu$ である (14.3) の関係を使った。こうして、物体は吸収したエネルギー ΔE の分だけ質量が Δm 増加することがわかった。これは質量とエネルギーの等価性と呼ばれる。

質量とエネルギーに関する一般的な関係なので、 $\Delta E \rightarrow E$ 、 $\Delta m \rightarrow m$ と書き直しておく、

$$E = mc^2 \quad (14.11)$$

が得られる。

§ 14.2 太陽のエネルギー源と寿命

太陽のエネルギー源について考察してみよう。太陽からは、地球上の 1cm^2 あたりに、1 分ごとにおよそ 2 カロリー (= 8.4 [J]、ただし単位は、 $1\text{J} = 1\text{kg m}^2/\text{s}^2$) のエネルギーが降り注いでいる。太陽から球状に等し

くエネルギーが出ていれば、太陽から地球までの距離 $r = 1.5 \times 10^{11}$ [m] のところの球面状の一部である地表の $1\text{cm}^2 (= 10^{-4} \text{m}^2)$ に 2 カロリーのエネルギーとすることなので、太陽を取り囲む半径 r の球の表面積 $4\pi r^2$ をかけておいたものが、太陽から出ている全エネルギーということである。1 分あたり 2 カロリーなので、1 秒あたり太陽が放出するエネルギー W [J/s] は

$$\begin{aligned} W &= \frac{8.4[\text{J}]}{60[\text{s}] \times 10^{-4}[\text{m}^2]} \times 4 \times 3.14 \times (1.5 \times 10^{11})^2[\text{m}^2] \\ &\approx 3.95 \times 10^{26} \text{ [J/s]} \end{aligned}$$

と計算される。

太陽が放出するエネルギーの起源は、4 つの水素原子核 ($\frac{1}{2}\text{H}$ 、陽子 p) を 1 つのヘリウム原子核 ($\frac{4}{2}\text{He}$) へと原子核融合で変換する際に減少する質量を、アインシュタインの関係 $E = mc^2$ でエネルギーに変えていることから生じている。ヘリウム原子核の質量は $M_{\text{He}} = 6.644 \times 10^{-27}$ kg、水素原子核の質量は $M_p = 1.673 \times 10^{-27}$ kg なので、この原子核反応で生まれるエネルギー E [J] は

$$\begin{aligned} E &= (4 \times M_p - M_{\text{He}}) \times c^2 \\ &\approx 4.32 \times 10^{-12} \text{ [J]} \end{aligned}$$

と計算できる。こうして、1 秒間に核融合する水素原子核の数 N は、太陽が 1 秒あたり放出するエネルギー W を、核融合のエネルギー E で割り算して、一回の核融合で 4 つの水素原子核が使われることから

$$\begin{aligned} N &= \frac{W}{E} \times 4 \\ &\approx 3.66 \times 10^{38} \text{ [個/s]} \end{aligned} \tag{14.12}$$

となり、使われる水素原子核の質量 M [kg] は、1 秒あたり

$$\begin{aligned} M &= N \times M_p \\ &\approx 6.12 \times 10^{11} \text{ [kg]} \end{aligned} \tag{14.13}$$

となることがわかる。太陽は、太陽中心部の水素原子核を、原子核反応でヘリウム原子核に変えているが、すべての水素をヘリウムには変えられない。重力の効果で核融合を起こすので、中心部の重力の強いところで核融合が起きているのであろう。そこで、太陽の質量の 10 分の 1 程度の水素原子核を核融合してヘリウム原子核にしてしまうと、もう核融合しなくなるとすると、太陽が燃えている間の寿命 T [s] は、太陽の質量 $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30}$ [kg] を用いて

$$\begin{aligned} T &= \frac{\frac{1}{10} \times M_{\odot}}{M} \\ &\approx 3.26 \times 10^{17} \text{ [s]} \end{aligned} \tag{14.14}$$

と表される。1 億年は 1×10^8 年、1 年は $365 \times 24 \times 60 \times 60$ 秒なので、およそ 1 億年 $= 3.2 \times 10^{15}$ 秒であることを考えると、太陽の寿命はおよそ 100 億年と計算された[§]。

[§]太陽が生まれてから現在まで、およそ 46 億年が経過していることが知られている。

15章 量子科学

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \hat{H} \Psi(\mathbf{r}, t) && \text{(時間に依存するシュレーディンガー方程式)} \\
 \hat{H} \psi(\mathbf{r}) &= E \psi(\mathbf{r}) && \text{(時間に依存しないシュレーディンガー方程式)} \\
 \hat{H} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + V(\mathbf{r}), \quad \hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}
 \end{aligned}$$

§ 15.1 不確定性原理

この章では微視的な対象に対する物理法則を考えていこう。

まず、電子のような素粒子の位置測定に関する思考実験を見ておこう。電子の位置を測定するためには、何か働きかけに対する応答をみななければならない。簡単には、光を当てて位置を測定すればよい。図 33 のような顕微鏡による位置測定を想定しよう。顕微鏡で位置を測定するとは、対象となる電子に光（電磁波）をあてて、その光の散乱光を測定することに他ならない。しかしながら、電子はミクロな対象なので、光を当てても光（電磁波）の波長より小さい距離は見分けがつかない（図 34）。これは顕微鏡の分解能として知られている。したがって、位置測定の精度は、当てる光の波長 λ 程度であることがわかる。そこで、位置測定での不確定さを Δx と書こう。

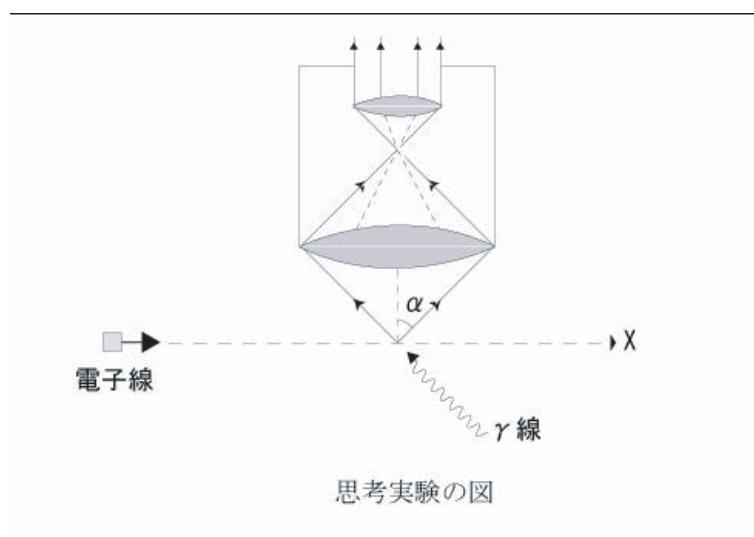


図 33:

$$\Delta x \sim \lambda \tag{15.1}$$

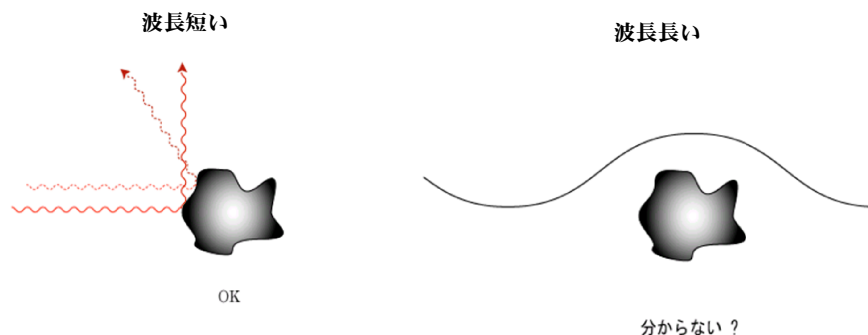


図 34:

Δx より小さい距離は区別がつかないということである。こうして、精度良い位置測定のためには、あてる光の波長 λ を短くすれば良いと言える。

しかしながら、照射する光が運動量 p をもつことは、14 章で指摘しておいたとおりである。

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (15.2)$$

波長 λ の短い光を当てるということは、運動量 p の大きな光を当てるということに等しい。光を照射された電子は、光から運動量を得て、自分自身の運動量を変えてしまう。図 33 のように、光は開口角 2α の中に入ってくれば位置測定に関与するが、どの角度で光が入ってきたかはわからないので、電子は光からどれだけの運動量を受け取ったかは、その範囲でわからない。こうして、光の照射による電子の運動量測定では、運動量測定の不確定さ Δp として

$$\Delta p \sim \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (15.3)$$

の不定性が避けられない。位置測定と運動量測定を行うと、ともに不確定さが存在し、片方を小さくする ($\Delta x \rightarrow 0$ のためには $\lambda \rightarrow 0$) と他方の不確定は大きく ($\lambda \rightarrow 0$ では $\Delta p \rightarrow \infty$) になってしまう。不確定さの積は

$$\Delta x \Delta p \sim \lambda \cdot \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sim \hbar \quad (15.4)$$

となり、 $\hbar \neq 0$ であるかぎり、零にはならない。この事実は不確定性原理と呼ばれている。

こうして、位置を測定すると運動量の情報は擾乱され、逆に運動量を測定すると、位置の情報は乱される。すなわち、位置と運動量の測定は、交換しないと言えよう。そこで、 x 方向の位置測定の働きかけ \hat{x} と、運動量測定の働きかけ \hat{p}_x を考えよう。測定過程はこれらの演算子を、対象となる状態を表す関数 $\psi(\mathbf{r})$ に作用させることとして数学的に定式化しよう。すなわち、位置測定は $\hat{x}\psi(\mathbf{r})$ 、運動量測定は $\hat{p}_x\psi(\mathbf{r})$ と考える。位置測定と運動量測定は、不確定性原理から測定順序により結果が変わり得るので交換しないすなわち、

$$\hat{x}\hat{p}_x\psi(\mathbf{r}) \neq \hat{p}_x\hat{x}\psi(\mathbf{r}) \quad (15.5)$$

となる。左辺は x 方向の運動量を測定してから x 軸上の粒子の位置を測定した測定過程を表しており、右辺は測定順が逆の測定過程である。こうして、

$$(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\psi(\mathbf{r}) \neq 0 \quad (15.6)$$

であるが、任意の状態 ψ に対して同様なので、

$$\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar \quad (15.7)$$

としておこう。ここで、右辺に虚数単位 $i (= \sqrt{-1})$ が現れるのは、両辺複素共役をとったとき、演算子に対しては複素共役はエルミート共役と呼ばれる操作を行うことになるのであるが、その際には積の順序を変える必要があるためである。エルミート共役を上付き記号 \dagger で表すと、 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ となる。位置や運動量はもともと実の量であるので、 $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$ 、 $\hat{p}_x^\dagger = \hat{p}_x$ であるので、(15.7) の左辺の複素共役（エルミート共役）をとると

$$(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})^\dagger = \hat{p}_x^\dagger\hat{x}^\dagger - \hat{x}^\dagger\hat{p}_x^\dagger = \hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x = -(\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}) \quad (15.8)$$

のように、もとの式に負号を付けたものになる。そこで、右辺にも複素共役で符号をかえる虚数単位が必要となるのである。右辺の定数 \hbar はこれから構成する理論が予言する物理現象から実験的に決める定数である。実は、これが、これまでも現れて来たプランク定数そのものなのである*。

$$\hbar = 1.0545718 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (15.9)$$

関係 (15.7) を位置と運動量の交換関係と呼ぶ。y 成分、z 成分についても同様の関係が成り立つ。ただし、異なる方向、例えば x と \hat{p}_y は交換する。 $\hat{y}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{y} = 0$ 。

さて、(15.7) の交換関係が満たされるような \hat{x} と \hat{p}_x の具体的な表示を考えてみると

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (15.10)$$

が一つの候補となる。実際、任意の状態 $\psi(\mathbf{r})$ に対し、

$$\begin{aligned} (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x})\psi(\mathbf{r}) &= -i\hbar x \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x} - (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} (x\psi(\mathbf{r})) \\ &= -i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\hbar \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial x} \psi \right) \\ &= i\hbar \psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (15.11)$$

となり、任意の ψ に対してなりたつので、(15.7) が満たされることがわかる。こうして、位置は座標そのものであるが、運動量は

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (15.12)$$

と微分演算子で表すことができることがわかる。

また、系の状態を記述する関数 $\psi(\mathbf{r})$ のことを波動関数と呼ぶ。波動関数は一般に複素数になり、その絶対値の 2 乗が粒子を見出す確率密度を表す。すなわち、 \mathbf{r} の近傍の微小体積 $d^3\mathbf{r} = dx dy dz$ を考えると

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \quad (15.13)$$

が、位置 \mathbf{r} の近傍 $d^3\mathbf{r}$ の領域に粒子を見出す確率となる[†]。

こうして、運動量を測定すると、その値が確実に得られる状態 $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ は

$$\hat{\mathbf{p}}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad \text{すなわち} \quad -i\hbar \frac{\partial \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{p}\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \quad (15.14)$$

であるので、波動関数 $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ は上の微分式を解いて

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = A e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (15.15)$$

* \hbar に 2π を掛けた $h (= 2\pi\hbar)$ をプランク定数と呼び、 h を 2π で割った $\hbar (= \frac{h}{2\pi})$ を換算プランク定数、またはディラック定数と呼ぶのが通常であるが、ここでは \hbar をプランク定数と呼ぶことにしている。

[†]空間のどこかで必ず粒子は見出されるので、

$$\int \int \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = 1$$

が満たされねばならない。この条件を波動関数の規格化と呼ぶ。

と得られる。ここで、 A はある定数である。この場合には、位置 \mathbf{r} の近傍に粒子を見出す確率 $|\psi|^2 d^3\mathbf{r}$ は位置 \mathbf{r} に依存しないので、どこに粒子を見出すかの不確定さは無限大になる。 $\Delta p = 0$ 、 $\Delta x \rightarrow \infty$ となって不確定性関係を満たす。

§ 15.2 シュレーディンガー方程式とアインシュタイン・ド・ブローイの関係

さて、運動量が微分演算子 (15.12) で表すことができることがわかったので、今度はエネルギー測定に対応した演算子を考えよう。状態 $\psi(\mathbf{r})$ に作用させると、系のエネルギー E が得られるものとする。古典力学ではエネルギー E は $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ で表せた。ここで、 m は粒子の質量であり、 $V(\mathbf{r})$ はポテンシャルエネルギーである。こうして、エネルギー E 中の運動量 $\hat{\mathbf{p}}$ を微分演算子 (15.12) に置き換え、エネルギーに対応する演算子を \hat{H} と書くことで、エネルギー測定過程として直ちに

$$\hat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (15.16)$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} + V(\mathbf{r}) \quad (15.17)$$

が得られる。これは (時間に依存しない) シュレーディンガー方程式と呼ばれ、微視的世界を記述する (非相対論的) 量子力学の基礎方程式である。ここに現れた演算子 \hat{H} はハミルトニアンと呼ばれる。この方程式を、様々なポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r})$ のもとで解くことにより、系のエネルギー E が求まる。このエネルギーはエネルギー固有値と呼ばれる。

相対性理論のところで見られたように、時間 t と空間 \mathbf{r} は組になってローレンツ変換を受けた。運動量の良い状態 (15.15) で見られたように、座標 \mathbf{r} と運動量 \mathbf{p} が内積として現れており、また、量子力学の演算子として、運動量演算子は座標微分 (の $-i\hbar$ 倍) で与えられた。こうして、時間に対応する物理量としてエネルギー E が考えられる[‡]。

$$\mathbf{p} \longrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad E \longrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (15.18)$$

こうして、波動関数の時間依存性は、次の時間に依存するシュレーディンガー方程式によって得られることが知られる。

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) \quad (15.19)$$

ハミルトニアン \hat{H} の固有値としてのエネルギー E が時間に依存しないときには、上の式から

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\mathbf{r}, t) = E\Psi(\mathbf{r}, t), \quad \text{すなわち} \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\mathbf{r}) \quad (15.20)$$

が得られる。

さて、エネルギーも運動量も良い状態では、 $\psi(\mathbf{r})$ として、(15.15) をとると、波動関数は

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \quad (15.21)$$

となる。量子力学では一般に複素数の波が現れるが[‡]、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ というオイラーの公式を用いると[§] 三角関数で表される。一方、7章の波動のところ学んだように、(7.5) から、三角関数の波として正弦波をとると、 $\xi(t, x) = A \sin(\omega t - kx)$ であった。こうして、運動量方向に座標軸 \mathbf{r} をとると、

$$\Psi \sim A \sin\left(\frac{1}{\hbar}(Et - pr)\right) \quad \longleftrightarrow \quad \xi \sim A \sin(\omega t - kr) \quad (15.22)$$

[‡](15.18) で、エネルギーを時間微分演算子に変えた時に、運動量演算子と符号が異なっているのは、相対論的に不変な世界長さと呼ばれる量は $(ct)^2 - \mathbf{r}^2$ と、時間変数 t と空間変数 \mathbf{r} の前の負号が異なった“長さ”であることに関係している。

[§]両辺テーラー展開すると、オイラーの公式が成り立つことが確かめられる。

となっている。波動としての対応から

$$\frac{E}{\hbar} = \omega, \quad \frac{p}{\hbar} = k \quad (15.23)$$

となっていることがわかる。ここで、波長 λ 、振動数 ν の関係 (7.6) 及び (7.7) を用いると、上式は

$$E = \hbar\omega = 2\pi\hbar\nu, \quad p = \hbar k = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \quad (15.24)$$

が得られる。左辺の E 、 p は物質粒子に固有の量であり、右辺の ν 、 λ は波の性質に付随する量である。こうして、物質粒子は粒子と波動の二重性が存在することがわかる。(15.24) の関係をアインシュタイン・ド・ブロイの関係と呼ぶ。

§ 15.3 シュレーディンガー方程式とエネルギーの離散化

次に、量子力学系の例として、境界で無限に高いポテンシャルエネルギーを持つ 1 次元の箱に閉じ込められた粒子を考えよう。位置エネルギーとしては

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (-a < x < a) \\ \infty & (x \leq -a, \quad x \geq a) \end{cases} \quad (15.25)$$

となる。このポテンシャルエネルギーのもとで、(15.16) のシュレーディンガー方程式を解く。波動関数 ψ は境界 $x = \pm a$ では 0 にならねばならない。なぜなら、もし 0 でなければ粒子の存在確率は 0 ではなくなるが、そこでの (ポテンシャル) エネルギーは無限大であるので、系のエネルギーが無限大と言うことになり、物理的にありえない。そこで、境界 $x = \pm a$ で 0 になる波動関数 ψ のみ許されることになる。境界で波動関数 ψ がうまく 0 になるためには、(15.16) の右辺の E をうまく選ばなければならない。すなわち、ある特定の E の値の時にのみ、境界で波動関数が 0 になる。こうして、エネルギー固有値 E は飛び飛びの離散化された値しかとり得ない。詳しい計算によると、このとき、

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (15.26)$$

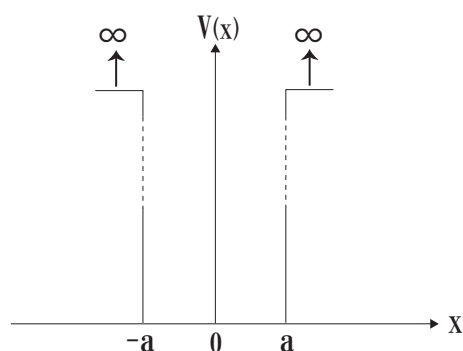


Fig.無限に深い井戸型ポテンシャル

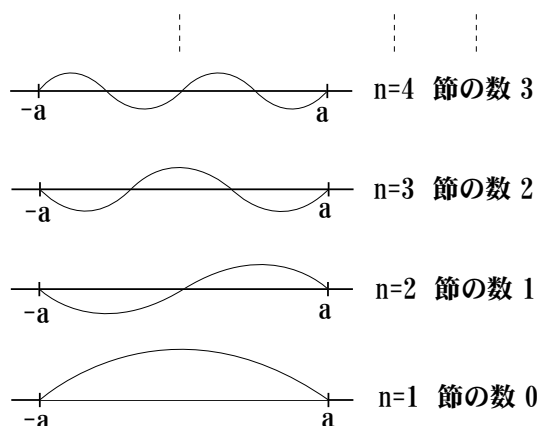


図 36:

となり、波動関数は図 36 のように、

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & (n = 1, 3, 5, 7, \dots) \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & (n = 2, 4, 6, 8, \dots) \end{cases} \quad (15.27)$$

と得られる。

次に、先ほどと同様ではあるが、有限の深さのポテンシャルエネルギーを考えよう。図 37 のようなものである。領域 $x < -a$ と $x > a$ ではポテンシャルエネルギーは 0 であるが、 $-a \leq x \leq a$ では $-V_0$ の値を持つ。これは、金属中に束縛された自由電子の簡単なモデルと考えられる。すなわち、1 次元的 (x 方向) に広がった金属が $x = -a$ から $x = a$ の領域にあり、電子は $-V_0 < E < 0$ のエネルギー E で金属に束縛されていると考えるわけである。今度は波動関数は境界 $x = \pm a$ で 0 になる必要はない。なぜなら、今度はポテンシャルエネルギーは有限であるので、 $x < -a$ または $x > a$ に粒子がたとえ存在していても、エネルギーが無限大になるということは無く、そのような解は (15.16) のシュレーディンガー方程式で許される。ただし、 $x \rightarrow \pm\infty$ では波動関数は 0 である。無限遠方で波動関数が残れば、有限の存在確率に無限大を掛けることになり、存在確率が無限大になってしまって物理的ではない。 $-a < x < a$ に束縛された粒子は、無限遠方では見出されない。

こうして、無限遠方で波動関数が 0 になるためには、やはりエネルギー E がある特定の値を持つときにしか

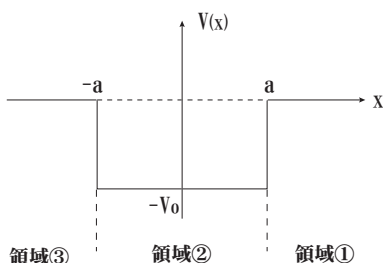


Fig.有限の深さの井戸型ポテンシャル

図 37:

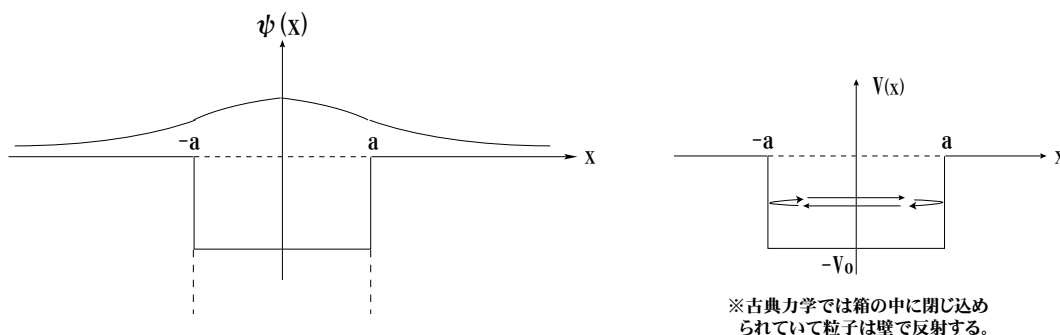


図 38:

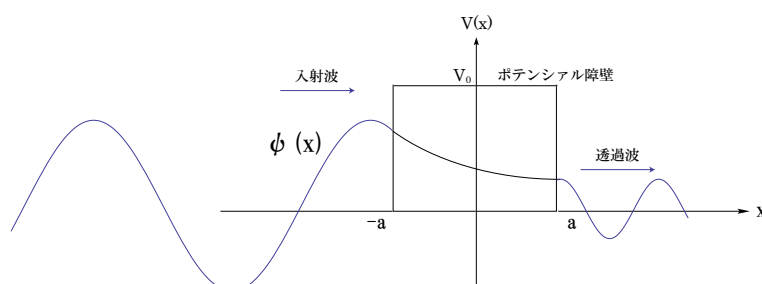


図 39:

許されない。こうしてやはりエネルギー固有値は離散化される[¶]。

波動関数を描いてみよう。エネルギーの最も低い状態を基底状態と呼ぶが、その状態の波動関数は図 38 のようなものである。

古典力学的には $-a < x < a$ に粒子は閉じ込められているのであるから、ポテンシャル障壁の外で粒子を見出すことは無い。しかしながら、量子力学ではポテンシャル障壁の外でも粒子の存在確率は有限であり、粒子を見出すことがあることを意味している。

§ 15.4 トンネル効果

次に、前節の有限の深さを持つポテンシャルを 2 つ離して繋げた系を考えよう。今度は図 39 のように $x < -a$ と $x > a$ に金属が置かれていて電子は束縛され得るとし、 $-a < x < a$ の領域は自由な空間であるとする^{||}。ここで、 $x < -a$ の領域で左から粒子が右 (x 軸の正の方向) へ進んできたとしよう。そのときには、ポテン

[¶]陽子に電子が束縛されていると、水素原子を構成する。水素原子の電子のエネルギーはやはり離散化されている。陽子と電子の間の相互作用は正負の電荷間に働くクーロン力であるので、ポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r})$ は陽子と電子の間の距離を r として $V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$ となる。陽子、電子の質量をそれぞれ m_p 、 m_e とすると、換算質量は $m = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$ となり、陽子・電子の 2 粒子系は、この換算質量を持つ 1 粒子問題に帰着できる。ポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r})$ のもとで時間に依存しないシュレーディンガー方程式 (15.26) を解けば、水素原子のエネルギー準位が得られる。結果のみ記しておこう。

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

^{||}エネルギーの原点を変えて、“金属中”で位置エネルギーの値が零となるようにした。

シアルエネルギーが一定なので、自由粒子のように振る舞う。ただし、粒子のエネルギーはポテンシャル障壁の高さ V_0 より小さいとしよう。 $E < V_0$ である。左から進んできた波は $x = -a$ でポテンシャル障壁に衝突する。古典的にはここで反射されて波は左に戻る。すなわち、粒子は反射されるのみである。ところが、量子力学のシュレーディンガー方程式では、前節でみたように、古典的には存在が許されない領域にも波動関数は減衰して入り込む。図 39 の $-a < x < a$ の領域の波動関数の状況である。この領域では、粒子の運動量は $p = \sqrt{2m(E - V(x))} = \sqrt{2m(E - V_0)}$ となり、 $E < V_0$ から運動量が虚数となるので、古典力学では粒子の存在が許されない。 $x > a$ では再び $p = \sqrt{2m(E - V(x))} = \sqrt{2mE}$ となって運動量は再び実数となって古典的にも粒子の存在は許される。こうして、 $x < -a$ の左から入射してきた波動関数（粒子）は、古典的に存在を許されないポテンシャル障壁の中では波動関数を減衰させながら、再び $x > a$ では自由粒子として右に進む波（粒子）となる。すなわち、古典的にはポテンシャル障壁を通り抜けできなかったにもかかわらず、量子力学的には透過し、粒子が $x > a$ にも存在できることになる。古典的には許されないポテンシャル障壁を“掘って”粒子が透過する現象はトンネル効果と呼ばれる**。

**金属の探針を用いて、試料金属の表面を接触しないようにして走査していく。その際、金属の探針に電圧をかけておくと、探針と試料は接触していないにもかかわらず、電流が流れる。これは、探針中の電子が、空気中のポテンシャル障壁をトンネル効果によって透過し、試料に到達することで実現する。電子は電荷を持つので、電子の移動が電流となるのである。一定のトンネル電流が流れるように探針を試料に対して上下させることで、試料の表面の凹凸を感知できる。こうして、金属試料表面を観察し、原子の並びが“見える”。これがトンネル顕微鏡の基本原理となっている。

16章 まとめ

...	(...)
-----	---------