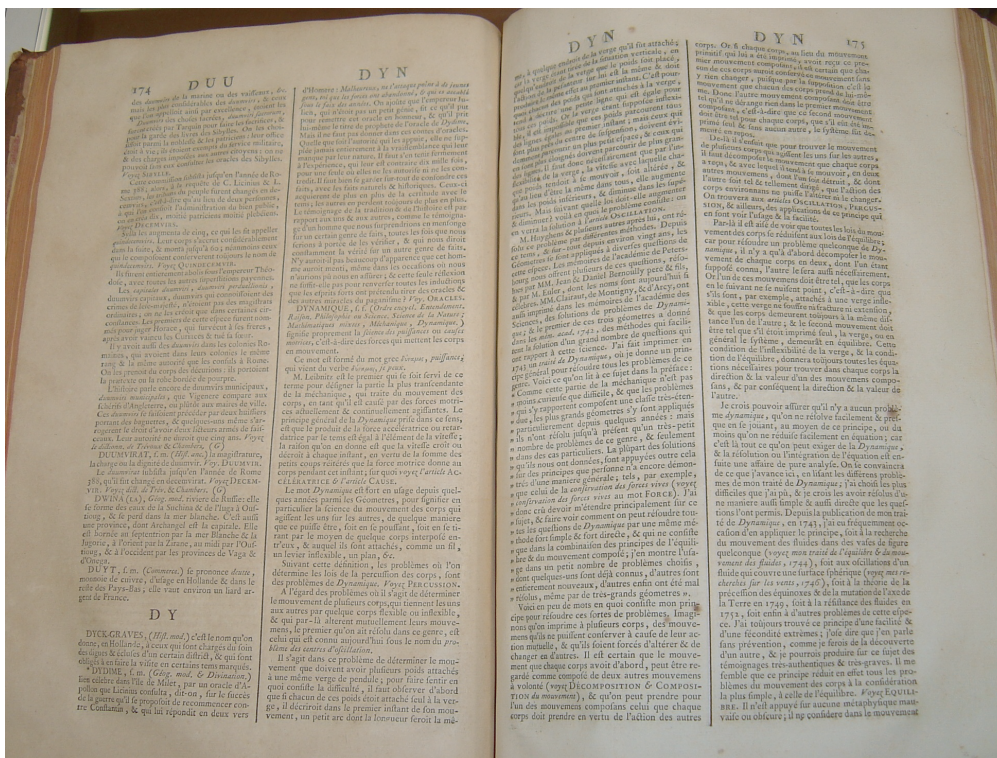


解析力学



「百科全書（初版 1751-1780）」Dynamique（動力学）の頁（高知大学附属図書館蔵）

高知大学理工学部 数学物理学科物理科学コース

津江保彦*

*© Yasuhiko TSUE ホームページは、<http://www.cc.kochi-u.ac.jp/~tsue/>

目次

1 章	粒子と波の二重性	2
§1.1	二重スリットの実験	2
§1.2	波の伝播とファインマン (Feynman) の経路積分	3
§1.3	古典物理学における最小作用の原理	5
2 章	最小作用の原理	6
§2.1	最小作用の原理とオイラー・ラグランジュ方程式	6
§2.2	空間の一様性・等方性と慣性の法則	7
§2.3	質点系のラグランジアン構成	8
§§2.3.1	ガリレイの相対性原理	8
§§2.3.2	自由粒子のラグランジアン	8
§§2.3.3	相互作用する質点系とニュートン方程式	9
§§2.3.4	拘束系の扱い	10
§2.4	作用・反作用の法則	10
§2.5	長い註	11
§§2.5.1	運動の記述	11
§§2.5.2	単位系	13
3 章	対称性と保存則	14
§3.1	運動量	14
§3.2	角運動量	15
§3.3	エネルギー	16
§3.4	ネーターの定理	17
§§3.4.1	空間並進対称性と運動量保存則	18
§§3.4.2	空間回転対称性と角運動量保存則	19
§§3.4.3	時間並進対称性とエネルギー保存則	19
§3.5	力学的相似則	20
§§3.5.1	地表付近での落体運動	20
§§3.5.2	振り子の等時性	21
§§3.5.3	ケプラーの第3法則	21
§3.6	ビリアル定理	22
§§3.6.1	ビリアル定理の適用例	22
4 章	ハミルトン形式	24
§4.1	ハミルトン方程式	24
§4.2	ポアソン括弧とハミルトン方程式	25
§4.3	正準変換	26
§§4.3.1	正準変換の例	28
§4.4	保存量と対称性	31
§§4.4.1	運動量と並進	31
§§4.4.2	角運動量と回転	31
§4.5	関数としての作用	33

§§4.5.1 一般化座標微分と一般化運動量	33
§§4.5.2 時間微分とエネルギー	34
§§4.5.3 簡約化された作用	35
§ 4.6 ハミルトン・ヤコビ方程式	36
§§4.6.1 振動	36
§ 4.7 リュービルの定理	38
5章 リュービルの定理から統計力学への道	41
§ 5.1 粒子の確率分布	41
§ 5.2 エントロピー増大の法則と平衡状態	43
§ 5.3 熱力学第1法則	45
§ 5.4 カノニカル分布	47
§ 5.5 マクスウェル分布	47
§ 5.6 ボルツマン分布	48
6章 物質粒子の波動性—量子力学—	49
§ 6.1 アインシュタイン・ドブロイの関係	49
§ 6.2 シュレーディンガー方程式	50
§ 6.3 重ね合わせの原理	52
§ 6.4 波動関数の確率解釈	53
§§6.4.1 波動関数の確率解釈	53
§§6.4.2 物理量とエルミート演算子	54
§§6.4.3 物理量の期待値	55
§§6.4.4 確率の流れの密度と確率の保存	56
§ 6.5 古典力学との対応	57
§§6.5.1 エーレンフェスト (Ehrenfest) の定理	57
§§6.5.2 半古典近似	58
7章 特殊相対論と電磁気学	60
§ 7.1 アインシュタインの特殊相対性原理とローレンツ変換	60
§§7.1.1 光速度不変の原理と同時刻の相対性	60
§§7.1.2 ローレンツ変換	61
§§7.1.3 ローレンツ変換からの帰結	63
§ 7.2 相対論的力学	65
§§7.2.1 最小作用の原理	65
§§7.2.2 運動量・エネルギー	66
§§7.2.3 一般のローレンツ変換	66
§§7.2.4 ローレンツスカラー・ベクトル・テンソル	68
§§7.2.5 ローレンツ群	68
§§7.2.6 4元形式でのエネルギー、運動量	71
§§7.2.7 粒子の崩壊・融合・衝突	72
§ 7.3 電磁場中の粒子の力学	74
§§7.3.1 電磁場との相互作用	74
§§7.3.2 4元形式での運動方程式	76

§§7.3.3 ゲージ不変性	76
§§7.3.4 電磁場の方程式	77

1章 粒子と波の二重性

§1.1 二重スリットの実験

粒子には波動性が伴う。我々の日常のスケールでは殆ど感知され得ないのであるが、極微の世界では、粒子に伴う波動性は顕著に現れる。大きさを持たない点粒子であると考えられている基本粒子の一種である電子を考えよう。電子を観測する際には、必ず粒子—1個、2個と自然数で数えられるもの—として認識される。しかしながら、粒子には波動性が伴うのである。

二重スリットによる実験を見てみよう。概念的に図1に示したように、狭いスリットを開け衝立に向かって電子を1個ずつ入射する。衝立に1重にしかスリットを開けていない場合には、期待されるようにスリットの正面に電子は沢山やってくる(図1-1)。中には逸れてくるものもある。一つだけならばどこにスリットを開けても結果は同じである(図1-2)。

スリットを二重にする。2本のスリットを開けておき、電子を1個ずつ入射する。電子はそれぞれのスリットの正面に沢山やってきて、二つのピーク(山)が見られることが期待される。しかし、自然はそうならない。2つのスリットを対称に作っておくと、電子は2つのスリットの間が一番沢山やってくる。そこから外れると電子のやってきた個数は減ってきて、ある場所では一つも来ない。さらに中心から離れるとまた電子がやってくる場所があり、やって来ない場所が現れる(図1-3)。これは、波の干渉現象と同じである。電子を一つずつ二重スリットに入射していくと、波の干渉縞が現れる。A.Tonomura(外村彰)等の美しい実験により、粒子に波動性が伴うことは自然が採用した事実であることが示された(図2)。

粒子に伴う波を、数学的に $\psi(\mathbf{r}, t)$ と表すことにしよう。ここで、 \mathbf{r} は位置座標、 t は時刻である。1番目のスリットを通った電子に伴う波を $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ 、2番目のスリットを通った電子に伴う波を $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ としよう。一般に波は重ね合わせることができる。これを重ね合わせの原理と呼ぶ。したがって、1と2の二つのスリットを開けた場合の電子に伴う波 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は、 $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t)$ と表わされる。

電子は波のように伝播し、電子を観測した時のパターンが $\psi(\mathbf{r}, t)$ で現れるのであろうか。そうであれば、2つのスリットを開けた場合には、 $\psi_1 + \psi_2$ となり、電子を観測した2つのパターンを単純に足したものとなっ

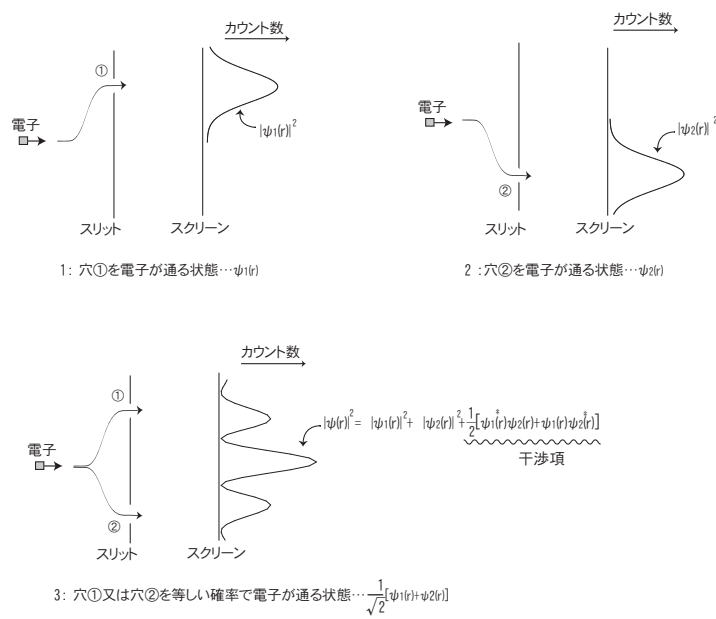


図 1:

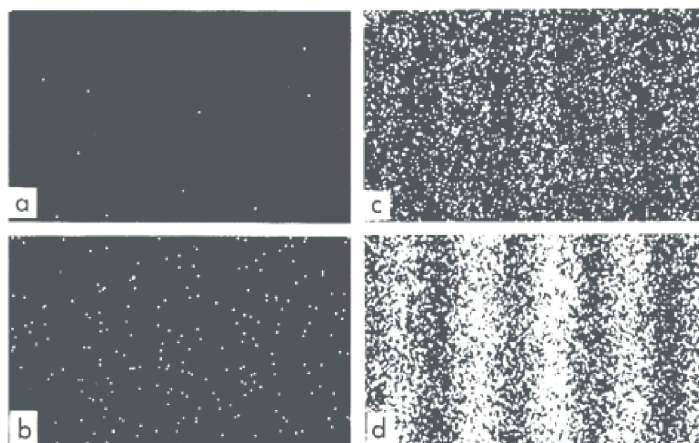


図 2: 2重スリットの実験。輝点は電子がスクリーンに到達した跡。(a)、(b)、(c)、(d)と時間が経過している。干渉縞がわかる。(A.Tonomura, et al., American Journals of Physics 57 (1989),117.)

てしまう。これは明らかにおかしい。そこで、電子を見出すパターンは、波動関数 ψ の絶対値の2乗、 $|\psi|^2$ と考える。関数 ψ が実数値関数とは限らないとして絶対値をとる。こうであれば、二重スリット実験では、電子を見出すパターンは $|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*$ となり、第3、4項が干渉パターンを与える。波動関数 ψ の絶対値の2乗が、粒子を時刻 t 、場所 \mathbf{r} で見出す確率密度と考えるのである。

§ 1.2 波の伝播とファインマン (Feynman) の径路積分

粒子には波動性が伴うことがわかった。今度は、この波がどのように伝播するかが、我々の知るべき次の問題となる。位置 \mathbf{r} での波は、過去に波面があったすべての場所 \mathbf{r}' から伝播された波によって生じる (図 3)。これをホイヘンス (Huygens) の原理という。時刻 t にあった波 $\psi(\mathbf{r}', t)$ を素元波の種として、時刻 $t + dt$ に位置 \mathbf{r} で生じる波 $\psi(\mathbf{r}, t + dt)$ は、ホイヘンスの原理によれば

$$\psi(\mathbf{r}, t + dt) = \int d^3 \mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt) \psi(\mathbf{r}', t) \tag{1.1}$$

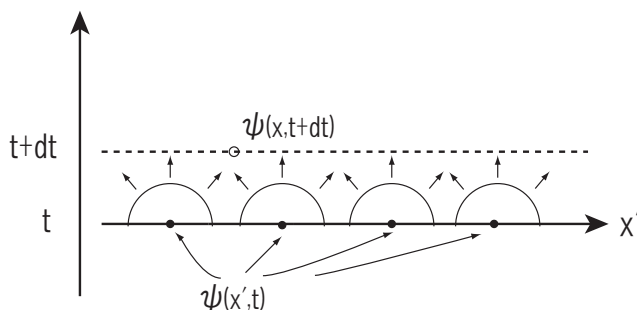


図 3:

と表わされる。ここで、 $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt)$ が、微少時間 dt の間の波の伝播を決定する。今、左辺の $\psi(\mathbf{r}, t + dt)$ も波動であるので、 $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt)$ も波動の形、しかも微少時間間隔なので平面波の形にとる。すなわち、

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt) = \mathcal{N} e^{iS(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt)/\hbar} \quad (1.2)$$

とおく。ここで、 \mathcal{N} はある規格化因子であり、後に決定しよう。 \hbar はある定数であり、 $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt)$ は波の伝播を決定するある未知の関数である。時刻 t_0 から、有限の時間 T の後には、時間間隔 T を微小に分割し、 $dt = T/n$ として、伝播されていく波は (1.1) を繰り返し用いて

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t_0 + T) &= \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \cdots \int d^3\mathbf{r}_n K(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; T/n) K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; T/n) \times \\ &\quad \cdots \times K(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n; T/n) \psi(\mathbf{r}_n, t_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \int d^3\mathbf{r}_i \mathcal{N} \cdot e^{iS(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n; T)/\hbar} \psi(\mathbf{r}_n, t_0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

と書ける。ただし、

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n; T) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \{S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1; T/n) + S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; T/n) + \cdots + S(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n; T/n)\} \quad (1.4)$$

と定義した。さらに、時間間隔 dt が微少であるときには、関数 $S(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; dt)$ は dt に線型であるとして

$$S(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j; dt) \equiv L(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) dt \quad (1.5)$$

とおくと、先に定義した $S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n; T)$ は積分の定義から

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n; T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{L(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) + L(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \cdots + L(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{r}_n)\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0+T} L(\mathbf{r}(t)) dt \end{aligned} \quad (1.6)$$

と書ける。ただし、積分の上端と下端で、 $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_n$ 、 $\mathbf{r}(t_0 + T) = \mathbf{r}$ としている。

さて、我々は“粒子に伴う波動”のことを考察しているので、初めに“粒子”は位置 \mathbf{r}_0 に存在したとしよう。すなわち、時刻 t_0 で粒子は位置 \mathbf{r}_0 に確かに存在したとするのである。つまり、 $\mathbf{r}(t_0) (= \mathbf{r}_n) \equiv \mathbf{r}_0$ と固定する。このとき、(1.3) 式で、 \mathbf{r}_n 積分は行われず、

$$\psi(\mathbf{r}, t_0 + T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \int d^3\mathbf{r}_i \mathcal{N} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_0+T} L(\mathbf{r}(t)) dt\right) \psi(\mathbf{r}_0, t_0) \quad (1.7)$$

と書ける。

ここまでは、波の伝播や伝播を表す関数についての幾つかの物理的な洞察を用いてきたが、次に (1.7) に現われた積分について若干の考察を試みる。式 (1.7) の座標 \mathbf{r}_i に関する多重積分 $\prod_{i=1}^{n-1} \int d^3\mathbf{r}_i \mathcal{N}$ は、各時刻 $t = t_0 + (T/n) \times (n-i)$ という時間を固定して、その時刻での位置座標 $\mathbf{r}(t_0 + (T/n) \times (n-i)) \equiv \mathbf{r}_i$ について積分していく形になっている。同じ積分を時刻 $t = t_0$ での位置 $\mathbf{r}(t_0) \equiv \mathbf{r}_0$ と時刻 $t_0 + T$ での位置 $\mathbf{r}(t_0 + T) \equiv \mathbf{r}$ を固定して、“時間方向”に積分するように読み替えよう。すなわち、“あらゆる可能な粒子の取り得る径路 … 時間とともに辿る軌道 … についての積分”と捉えるのである。こうしても、積分範囲はすべて尽くされるであろう。こうして、規格化因子 \mathcal{N} まで含んだものとして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \int d^3\mathbf{r}_i \mathcal{N} \rightarrow \int \mathcal{D}\mathbf{r}(t)$ と記し、“あらゆる径路 $\mathbf{r}(t)$ についての積分”と読み替えることにする (図 4)。こうして、(1.7) 式で表わされる“粒子に伴う波の伝播”は、粒子の取り得る径路 (軌道) $\mathbf{r}(t)$ についての積分として、

$$\psi(\mathbf{r}, t_0 + T) = \int \mathcal{D}\mathbf{r}(t) e^{iS(\mathbf{r}(t))/\hbar} \psi(\mathbf{r}_0, t_0) \quad (1.8)$$

$$S(\mathbf{r}(t)) \equiv \int_{t_0}^{t_0+T} L dt \quad (1.9)$$

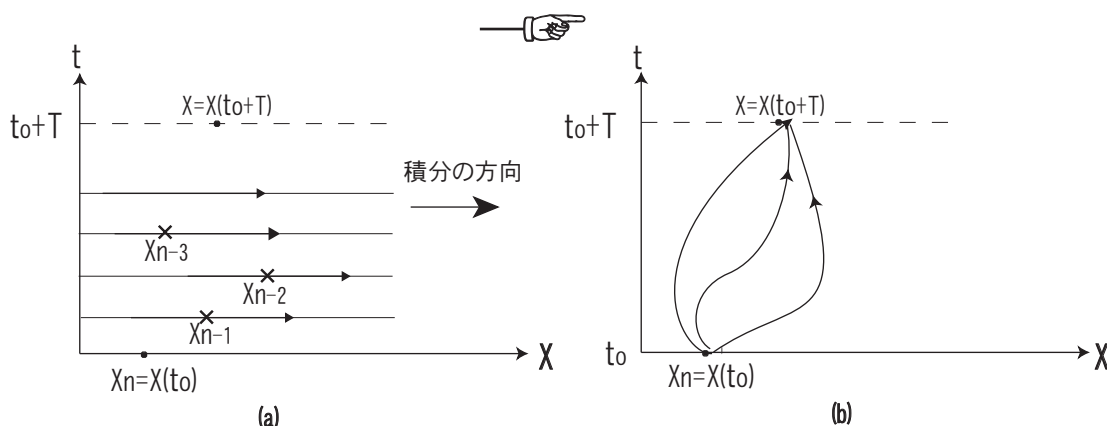


図 4:

となる。径路についてのこの積分は、ファインマン (Feynman) の径路積分と呼ばれる。

§ 1.3 古典物理学における最小作用の原理

前節では粒子に伴う波動の伝播を、粒子の取り得る軌道についての径路積分という形に定式化した。“粒子の取り得る軌道”と言及したが、粒子に伴う波を問題にする場合には積分の読み替えから、確かに“すべての軌道”についての積分が必要となる。しかしながら、粒子の波動性が顕著に現れてこない状況—古典物理学の世界と呼ばれる—では、あくまで、粒子の軌道はユニークに決まる。それを、古典軌道と呼ぼう。我々が通常目にする物体の運動である。

式 (1.8) に立ち戻ろう。時刻 t_0 に位置 \mathbf{r}_0 に存在した粒子は、時刻 $t_0 + T$ に位置 \mathbf{r} に居ることを表している。では、時間間隔 T のうちに \mathbf{r}_0 から \mathbf{r} まで、“古典粒子”は、とり得る可能な軌道のうち、どの軌道を辿って我々の目の前に立ち現れるのであろうか。

式 (1.8) では粒子の軌道 $\mathbf{r}(t)$ に関して、 $e^{iS(\mathbf{r}(t))/\hbar}$ という重みがかかって積分される形をとっている。一般には関数 $S(\mathbf{r}(t))$ は、粒子が $\mathbf{r}(t)$ と、時間とともに位置を変えて行くにつれ、値が変化するはずである。このとき、 $e^{iS(\mathbf{r}(t))/\hbar}$ は、その実部も虚部も、正負の値を取る三角関数としての振動関数であるので、粒子の位置座標の時間発展 $\mathbf{r}(t)$ とともに振動する。我々は、未知の定数 \hbar をあらかじめ理論に忍ばせておいた。この \hbar は実験で決めるべき物理定数であることを後に明らかにするが、実際には作用 (エネルギー×時間) の次元を持つ量であり、しかも我々のスケールからして極めて小さい値を取る。そこで、因子 $e^{iS(\mathbf{r}(t))/\hbar}$ は一般に激しく振動する。こうして、積分 $\int D\mathbf{r}(t) e^{iS(\mathbf{r}(t))/\hbar}$ は、殆どの“軌道” $\mathbf{r}(t)$ について、振動関数の積分として消えてしまう。唯一積分に寄与するのは、 S が最小になる軌道 $\mathbf{r}(t)$ のみである。関数 S を作用と呼ぶ。そこで、実現される古典軌道は、作用 S を最小とする軌道であり、これを、最小作用の原理として、基礎原理の一つに採用する。

2章 最小作用の原理

§2.1 最小作用の原理とオイラー・ラグランジュ方程式

我々が通常認識している物質粒子の古典軌道について、最小作用の原理から導出を行おう。前章で得られた知見を洗練しておこう。

ある物体の運動を記述するとき、その大きさを無視できる物体を質点と呼ぶことにする*。3次元空間に幾つかの質点が存在するとしよう。これを一つの系と呼ぶ。考えている系の質点の位置を決めるのに十分な任意の s 個の座標

$$q_1, q_2, \dots, q_s \quad (2.1)$$

のことを一般化座標と呼ぶ。また、一般化座標の時間導関数

$$\dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt}, \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (2.2)$$

を、一般化速度と呼ぶ。

作用から L を定義した式 (1.5) では、 L はある時刻での粒子の位置 \mathbf{r}_i と、その dt 後の時刻での位置 $\mathbf{r}_{i+1} (= \mathbf{r}_j)$ の関数となっていた。そこで、 L は時刻 t での位置 $\mathbf{r}(t)$ と、速度 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ の関数であるといえる。速度は、時刻 t と時刻 $t + dt$ での粒子の位置 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_i$ と $\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}_{i+1}$ の差の関数であるからである[†]。したがって、関数 L は一般化座標 $\{q_i\}$ と一般化速度 $\{\dot{q}_i\}$ の関数である。一般に、時間 t をあらわに含むことも許そう。関数 L をラグランジュ関数、または簡単にラグランジアン (Lagrangian) と呼ぶ。§1.3 で述べたように、系の古典的な軌道運動は、関数 S が最小値を取るような軌道 $q_i(t)$ として与えられる。最小作用の原理は以下のように纏められる：

最小作用の原理

時刻 $t = t_1, t = t_2$ に、系の質点は位置座標 $q_i^{(1)}, q_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) に居たとすると、これらの位置の間では、系は作用

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t) \quad (2.3)$$

が最小の値 (実は極小) を取るように運動する。ここに、 $L(q, \dot{q}, t)$ をラグランジアンと呼ぶ。

次に、最小作用の原理に基づき、運動方程式を導出しよう。実際に実現する粒子の古典軌道を $q_i(t)$ とし、 $q_i(t)$ が満たすべき方程式を導く。最小作用の原理によれば、作用 S は軌道 $q_i(t)$ のとき極小値をとり、それ以外の軌道は積分 (1.8) に寄与しない。そこで、実際の古典軌道からずれた仮想的な軌道 $q_i(t) + \delta q_i(t)$ を考える。ただし、粒子は時刻 t_1 と t_2 では $q_i(t_1), q_i(t_2)$ に固定されており、したがって、 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ ととらねばならない。すなわち、始点と終点は固定したうえで、とり得る古典軌道を調べる。作用が極小であることから、軌道の変化分 $\delta q_i(t)$ のもとで、作用 S の第一変分は零である。すなわち、

$$\delta S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0$$

となる。 δq の1次までで

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0$$

* 大きさのある物体から、大きさ零の極限を取った理想物体では無い。

[†] $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{T/n}$

となるが、第2項を時間について部分積分すると

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0$$

となる。ここで、 $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ であったので、時間積分の境界項（上式中辺第2項）は消える。さらに、変分 $\delta q_i(t)$ は任意であるので、上式が成り立つためには、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2.4}$$

が成り立たなければならない。これが、我々が求めたい古典軌道を与える粒子の運動方程式である。これをオイラー・ラグランジュ (Euler-Lagrange) 方程式と呼ぶ。

今後繰り返し言及される重要な註を与えておこう。ラグランジアンは一意的には決まらず、時間の完全導関数だけの不定性がある。すなわち、ラグランジアン L を

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt}$$

としても、新たな“ラグランジアン” \bar{L} から導出される運動方程式は同じである。ラグランジアン \bar{L} から得られる作用を \bar{S} とすると

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \int \bar{L} dt = \int L dt + \int \frac{df}{dt} dt \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1) \end{aligned}$$

となるが、第1変分をとると、 $\delta q^{(1)} = \delta q^{(2)} = 0$ (始点と終点は固定) であったので、

$$\delta \bar{S} = \delta S$$

が得られる[‡]ことは容易に見て取れる。したがって、第1変分がゼロであることから得られる運動方程式は変わらないことがわかる。

§ 2.2 空間の一様性・等方性と慣性の法則

我々が認識している3次元空間には、特別な場所も方向もない。空間には特別な場所がなく、どこも一様であり、等方である。空間が一様かつ等方である座標系を慣性系と呼ぶ。ある慣性系に対して等速直線運動している別の座標系も慣性系である。

自由に運動している一つの質点を考えよう。空間の一様性から運動は特定の位置 \mathbf{r} に依存してはいけない。もしラグランジアンが \mathbf{r} に直接依存していれば、空間をずらして $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ とすれば、ラグランジアンが変わってしまい、運動が変化してしまう。このことは、運動はラグランジュ関数により決定されたので、ラグランジアンが座標 \mathbf{r} にあからさまに依存してはいけないことを意味する。したがって、ラグランジアンは速度 $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}$ の関数である。ところが、空間の等方性から、ラグランジアンはベクトルの向きに依存してはいけない。したがって、ラグランジアンは \mathbf{v}^2 、すなわち速度の2乗の関数[§]でなければならない。こうして、オイラー・ラグランジュの運動方程式 (2.4) は、 q_i を \mathbf{r} 、 \dot{q}_i を \mathbf{v} と書いて、

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{一定}$$

[‡]境界で、 $\delta q^{(a)} = 0$ ($a = 1, 2$) であるので、 $\delta f(q^{(a)}) = \frac{\delta f(q^{(a)})}{\delta q^{(a)}} \delta q^{(a)} = 0$ から、境界での $f(q)$ の変分は0となる。

[§]速度の大きさは、 $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^2}$ のことであるから、速度の2乗の関数である。

となる。ラグランジアン L が v^2 の関数であるから、上式の第 2 式から、

$$\text{一定} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L(v^2)}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v^2}{\partial \mathbf{v}} = 2 \frac{\partial L}{\partial v^2} \cdot \mathbf{v}$$

が得られるが、 $\partial L / \partial v^2$ もまた v^2 の関数となるので、結局、上の式から

$$\mathbf{v}(= \dot{\mathbf{r}}) = \text{一定}$$

が得られる。すなわち、慣性系では自由に運動する質点に関して、“ある時刻に静止していた ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) 質点は静止を続け、一定の速度で運動していた質点はそのまま等速直線運動を続ける”ということを意味する。この事実を慣性の法則と言う。

§ 2.3 質点系のラグランジアン構成

§§2.3.1 ガリレイの相対性原理

空間が一様・等方となる座標系を慣性系と呼んだ。慣性系では慣性の法則が成り立ったが、慣性の法則の成り立つ慣性系は無数に存在する。ある慣性系に対して、等速直線運動する座標系もまた慣性系になる。時刻 $t = 0$ で 2 つの慣性系の原点は重なっていたとしよう。慣性系 K に対し、慣性系 K' は一定の速度 \mathbf{V} で運動しているものとする。このとき、時刻 t で 2 つの慣性系を結ぶ変換は

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad (2.5)$$

となることを理解するのは容易であろう。ここでダッシュがついているのは K' 系での量である。両辺の時間微分をとると、2 つの慣性系での質点の速度の関係が得られる。

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V} \quad (2.6)$$

慣性系は無数にあり、我々は特別な慣性系を持たない。そこで、すべての慣性系において力学法則は同一であることが期待される。これは、ガリレイの相対性原理と呼ばれる。式 (2.5) は、ガリレイ変換[¶]と呼ばれる。

§§2.3.2 自由粒子のラグランジアン

空間の一様性・等方性から、ラグランジアンは速度の 2 乗の関数であることがわかった。ここでは、ガリレイの相対性原理を用いて、自由粒子のラグランジアンを決定しよう。

ガリレイの相対性原理から、速度 \mathbf{V} で互いに運動する 2 つの慣性系では力学法則は同一の形をとるはずである。すなわち、ラグランジアンから得られる運動方程式-オイラー・ラグランジュ方程式-は同一である。そのためには 2 つの慣性系でラグランジアンが全く同じである必要はない。§2.1 の終りに述べたように、両系のラグランジアンは、時間の完全微分だけは異なっても良い。ガリレイ変換から得られた (2.6) 式を用いると、ラグランジアンは質点の速度の 2 乗の関数であることから、

$$L(\mathbf{v}'^2) = L((\mathbf{v} - \mathbf{V})^2) = L(v^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + V^2)$$

となる。今、 \mathbf{V} が小さいとしてみよう。このとき、テイラー展開により \mathbf{V} の 2 次以上を無視する範囲で

$$L(\mathbf{v}'^2) \approx L(v^2) - \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}$$

[¶]ここでは 2 つの慣性系において、時間は同一 ($t' = t$) であることが陰に仮定されている。時間について吟味することにより、ガリレイ変換はローレンツ変換に、ガリレイの相対性原理はアインシュタインの (特殊) 相対性原理に読み替えられる。アインシュタインの相対性原理はより厳しく、“すべての慣性系において物理法則は同一である”ことを主張する。

となるが、両系のラグランジアンが時間の完全微分を除いて一致するには、右辺第2項の $\partial L/\partial \mathbf{v}^2 \cdot 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}$ が時間の完全微分であれば良い。速度 \mathbf{v} は $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ と時間の完全微分であり、両系間の速度 \mathbf{V} は時間に依存しないので、結局 $\partial L/\partial \mathbf{v}^2$ が時間に依存しなければ、

$$L(\mathbf{v}'^2) \approx L(\mathbf{v}^2) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}^2} 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{V} \right)$$

と書ける。すなわち、 $\partial L/\partial \mathbf{v}^2$ が時間に依存した速度 \mathbf{v} に依存しなければ成り立つ関係式である。これは、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}^2} = \text{定数} \quad \text{すなわち} \quad L \propto \mathbf{v}^2 \quad (2.7)$$

ということの意味する。ここで、 \propto は“比例する”を意味する記号である。こうして、ラグランジアン L は、空間の一様性、等方性から質点の速度 \mathbf{v} の2乗の関数、さらにガリレイの相対性原理から、 \mathbf{v}^2 に比例しなければならないことがわかった。こうして、自由粒子のラグランジアンは、比例定数を $m/2$ と書くことにして、

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (2.8)$$

と与えられることがわかった。

今までは、二つの慣性系間の相対速度 \mathbf{V} を小さいとして、 \mathbf{V} の1次までの近似で考察してきたが、(2.8)式で与えられるラグランジアンは、実際に有限の速度 \mathbf{V} のときにもガリレイの相対性原理を満たしていることが容易に確認できる。実際、

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}'^2) &= L((\mathbf{v} - \mathbf{V})^2) = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \left(m \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 \right) \\ &= L(\mathbf{v}^2) - \frac{d}{dt} \left(m \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} - \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 t \right) \end{aligned}$$

となり、両系のラグランジアンは確かに時間の完全微分しか異ならない。すなわち、両系で力学法則は同一である。

相互作用の無い多粒子系では、質点のラグランジアンを単純に加えておけば良い。運動方程式は各質点ごとに独立に得られるので、各粒子の物理量を添え字 a で区別すると、相互作用のない多粒子系のラグランジアンとして、

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \quad (2.9)$$

が得られる。ここで、 m_a は a で区別される種類の質点の慣性質量^{||}と呼ばれる。ラグランジアン^{||}の時間積分である作用を最小にするのが我々が目にする古典運動であることから、慣性質量が負であってはならない。 m_a が負であれば、軌道 $\mathbf{v}_a(t)$ を幾らでも大きく無駄に運動させることで作用を幾らでも小さくでき、作用 S に極小値が与えられない。したがって、慣性質量は負の値を取り得ないことが結論される。

§§2.3.3 相互作用する質点系とニュートン方程式

前節では相互作用の無い自由粒子系のラグランジアンを構成した。粒子間に相互作用がある場合には、相互作用を特徴づける関数 V を加えることにより、ラグランジアンを構成する。 n 個の粒子間の相互作用は、各粒

^{||} 万有引力(重力)の強さを与える物質固有の量として、重力質量が存在する。重力質量と慣性質量は、電気力の強さを与える物質固有の量“電荷”と慣性質量が無関係に異なる物理量であるということと同じ意味で“無関係”であるのだが、実験によればすべての物質で、 10^{-13} のオーダーで、慣性質量と重力質量は同一の値を取る。そこで、本書では、必要な時以外には慣性質量と重力質量を区別せず、単に“質量”と記載する。慣性質量と重力質量があらゆる物質で常に等しいという事実を基礎原理とすると、一般相対性理論を構成することができる。12章を見よ。

子の位置の関数であるとして、ポテンシャル関数 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ を導入する。相互作用は粒子の位置座標に依存した場のポテンシャル V により記述されると考えるのである。そこで、相互作用のある場合の質点系のラグランジアンは

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (2.10)$$

とする。運動方程式（オイラー・ラグランジュ方程式）(2.4) は、一般化座標 q_i を各質点のデカルト座標 $(\mathbf{r}_a)_k$ ($k = x, y, z$) と読み替えて、

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)}{\partial \mathbf{r}_a} \quad (2.11)$$

と得られる。ここで、場のポテンシャル関数の座標微分に負号をつけた量を \mathbf{F}_a と記すことにする。

$$\mathbf{F}_a \equiv - \frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)}{\partial \mathbf{r}_a} \quad (2.12)$$

この \mathbf{F}_a を、質点 a に働く力と呼ぶ。こうして、相互作用のある質点系では、質点 a に対する運動方程式 (2.11) は

$$m_a \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \mathbf{F}_a \quad (2.13)$$

と書ける。この運動方程式はニュートン方程式と呼ばれる。または、ニュートンの第2法則とも呼ばれる。

§2.3.4 拘束系の扱い

質点間の配列に制限があるとき、拘束条件が存在すると言う。例えば、3次元空間中に存在する N 個の質点の自由度は $3N$ であるが、この N 個の質点間の配列に l 個の制限

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, l)$$

があるとき、この拘束条件の存在は、一般に系の自由度を $3N$ から $3N - l$ に減らす**。したがって、このような拘束条件が存在する場合には、自由度と同じ数の一般化座標を見つけ、系のラグランジアンをこれらの一般化座標と一般化速度であらわし、運動方程式を求める問題に帰着する。

§2.4 作用・反作用の法則

§2.3において、我々は相互作用のある質点系のラグランジアンを構成することに成功した。ここでは2質点系を考え、それぞれの質点を添え字1、2で区別する。ラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

§2.2で述べた空間の一様性から、座標の原点を一様に \mathbf{a} だけずらしても物理法則は何も変わらないはずである。すなわち、

$$\mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a} \quad (i = 1, 2)$$

とする。このとき、一様並進のベクトル \mathbf{a} は時間に依存しないので、質点1、2の速度は変化せず、

$$\mathbf{v}'_i = \frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} - \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i$$

**以下では、このような拘束条件のみ考える。これをホロノミックな拘束条件と呼ぶ。

となる。したがって、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}'_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}'_2{}^2 - V(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \\ &= \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

となる。空間の一様性から、座標原点を \mathbf{a} だけずらしても物理法則は変わらないはずなので、運動を決めるラグランジアンは変わってはいけない。すなわち、 $L' = L$ となるべきである。そのためには、ポテンシャル関数 V に制限が課せられる。すなわち、ポテンシャル関数 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 に独立に依存する関数ではなく、差にのみ依存しなければならない。

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.14)$$

このときには、座標原点を \mathbf{a} だけずらしたときに

$$V(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = V(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) = V((\mathbf{r}_1 - \mathbf{a}) - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{a})) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

となり、ラグランジアン自身が確かに $L' = L$ となる。すなわち、両系でラグランジアンにより記述される運動は同一となり、空間の一様性が保障される。

空間の一様性から得られたポテンシャル関数 V の性質 (2.14) から、2 質点間に働く力について重要な知見が得られる。質点 i に働く力はポテンシャル関数 V を座標 \mathbf{r}_i で微分した (2.12) で与えられる。したがって、質点 i に働く力 \mathbf{F}_i は、それぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \\ \mathbf{F}_2 &= -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = +\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \end{aligned}$$

と得られる。こうして

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad (2.15)$$

が結論される。すなわち、互いに力を及ぼす 2 質点がそれぞれ受ける力は、大きさが等しく向きが反対である。これを作用・反作用の法則、またはニュートンの第 3 法則と呼ぶ。

§ 2.5 長い註

§§2.5.1 運動の記述

地上での物体には近似的に鉛直下向きに $F = mg$ という力 F が働く (§6.1.2 を見よ)。ここで、 m は物体の質量、 $g \approx 9.8\text{m/s}^2$ は^{††}重力加速度と呼ばれる。したがって、ポテンシャル関数 $V(x, y, z)$ として、

$$V(x, y, z) = mgz$$

と採ればよい。但し、鉛直上向きに z 軸をとった。実際、力 \mathbf{F} は

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

^{††}単位系については、§2.5.2 見よ。

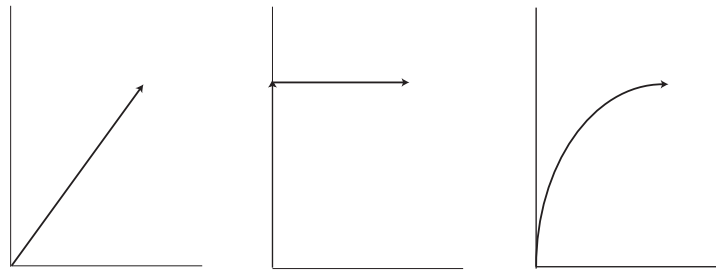


図 5:

であり、確かに鉛直下向きに大きさ mg の力を表す。

さて、質点が原点から斜め上に投げ出されたとしよう。質点が運動する平面を x - z 面とし、質点は x 軸、 z 軸双方とも正の方向に投げ出されたものとする。オイラー・ラグランジュ方程式、またはニュートン方程式は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -mg$$

となり、これらを $x(t=0) = 0$ 、 $y(t=0) = 0$ 、 $z(t=0) = 0$ 、 $dx(t=0)/dt = v_x(t=0)$ 、 $dy(t=0)/dt = 0$ 、 $dz(t=0)/dt = v_z(t=0)$ という初期条件のもとで運動を解くと、一様重力場のもとで質点は放物線軌道を描く^{††}ことが結論される。

この運動を、オイラー・ラグランジュ方程式の導出のもととなった最小作用の原理から直接考察しておこう。そうすることにより、最小作用の原理による質点の古典軌道の規定の仕方が理解されるであろう。まず、相互作用を表すポテンシャル項 V を無視してみよう。このときには、作用 S が最小となる運動は、質点の速度 \mathbf{v} が一定値をとるときである。実際、質点の速度 \mathbf{v} を、平均値 $\bar{\mathbf{v}}$ とその周りの揺動 $\delta\mathbf{v}$ にわける： $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{v}$ 。これを、作用の第 1 項に代入すれば

$$S = \int dt \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}}^2 \int dt + m \bar{\mathbf{v}} \int dt \delta\mathbf{v} + \frac{1}{2} m \int dt \delta\mathbf{v}^2$$

となる。右辺第 2 項は、 $\bar{\mathbf{v}}$ が平均値であるという定義から、 $\int dt \delta\mathbf{v} = 0$ となり、消える。従って、速度 \mathbf{v} が平均値からずれると、必ず作用は大きくなる ($\int dt \delta\mathbf{v}^2 > 0$)。こうして、速度は平均値のまま一定であることにより、作用 S を小さくする。これは、相互作用が働かないとき、すでに述べた慣性の法則にほかならない。運動は、図 5 の左のように進む。

しかしながら、相互作用 $V = mgz$ が存在する。今度は、相互作用項による作用 S への寄与 $-\int dt V$ のみを考察しよう。このときには、質点は早く高さ $z = h$ までたどりつき、高さ h のところで時間をゆっくり過ごすことにより作用 S を小さくしようとする。積分 $\int dt V = \int dt mgz$ を大きくすれば作用は小さくなるからである。こうして、図 5 中央の様に運動しようとするであろう。

実際には、作用 S の第 1 項と第 2 項の兼ね合いで、図 5 右のような運動が実現される。これが放物運動の本質である。

^{††}詳しくは §6.2 を見よ。

§2.5.2 単位系

ここでは MKSA 単位系と呼ばれる単位系を用いる。まず、長さ ([L])、時間 ([T])、質量 ([M]) の単位を与える。

長さ (距離) :	メートル (m)
時間 :	秒 (s)
質量 :	キログラム (kg)

その他の力学量はこの3つの組み合わせで表せる。たとえば、

$$\begin{aligned} \text{速度} &: (\text{距離}) / (\text{時間}) \cdots \text{m/s} \\ \text{加速度} &: (\text{速度の変化}) / (\text{変化に要した時間}) \cdots \text{m/s}^2 \\ \text{力} &: F = ma \quad \cdots \text{kg m/s}^2 \equiv \text{N} \end{aligned}$$

ここで、力の単位は、普通、 kg m/s^2 の代わりに、N (ニュートン) を用いる。

2019年5月19日までは、1秒は「セシウム 133 原子の基底状態における2つの超微細構造準位間の遷移に対応する放射の9192631770周期の継続時間」、1mは、「光が1/299792458秒間に真空中を進行する距離」、1kgは「フランスのセヴレ市にある国際度量衡標準局に保存されているプラチナ・イリジウム合金円柱の質量」と定義されていた。また、電磁気現象では、長さ、時間、質量に加えて、電流の単位、アンペア ([A]) を用いた。1Aは、「1m離して真空中に平行おかれた導線に、同方向に流れる2本の直線電流間に働く力が導線1mあたり1Nであるときの電流の大きさ」として導入された。

「時間」はもともと、地球の自転、つまり太陽の南中時（高度が最も高くなる時刻）から、次の南中までを24時間とし、1時間を60分、1分を60秒として1秒を決めていた。「長さ」は、地球の北極から赤道までの距離の1万分の1を1メートルとした。「質量」は0.1メートル(10センチメートル)四方の直方体に入れた水の質量を1キログラムとしていた。これらの量を精確に決めたものが上記の単位の定義であった。

しかしながら、2019年5月20日からは、物理の基礎定数を基にして、新たに単位の定義が決め直され、より精度良い定義となった。正確な言い回しではないが、概ね、次のようになった。

- ・ 温度が零ケルビンのセシウム 133 原子の基底状態の2つの超微細構造の準位間の遷移に対応する放射の周波数が、秒 (s) を単位として 9192631770 (91 億 9263 万 1770) s^{-1} (Hz、ヘルツ) と定めることによって秒を定義する。
- ・ 真空中の光の速さが 299792458 m/s となる長さの単位をメートル (**m**) と定義する。
- ・ プランク定数 h の値を $6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$ と定めることによって質量の単位、キログラム (**kg**) を定義する。
- ・ 電気素量 e の値を $1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$ (クーロン) として電荷の単位クーロン (C) を定義する。1秒間に1クーロンの電荷を運ぶ電流が1アンペア (A) となる。ついでに、1秒の定義に出てきた“温度”であるが、次のように定義される。
- ・ ボルツマン定数の値を $1.380649 \times 10^{-23} \text{ kg m}^2 / (\text{s}^2 \text{ K})$ と定めることによって温度の単位ケルビン (**K**) を定義する。

3章 対称性と保存則

§3.1 運動量

一般化座標 q_i に対して、ラグランジアン L を一般化速度 \dot{q}_i で微分した量 p_i を一般化運動量と呼ぶ。

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.1)$$

ここで、 q_i は一般化座標であれば良いのであるが、特にデカルト座標 r_a をとってみよう。添え字 a は質点を区別するためのものである。このときには、運動量 p_a として、

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} = m\dot{r}_a \quad (3.2)$$

が定義される。ここで、ラグランジアンは (2.10) 式の形に得られているので（ただし、 $v_a \equiv \dot{r}_a$ ）最右辺の形が得られる。

さて、空間の一様性については §2.2 で述べたが、空間の一様性は空間並進によっても物理法則は変わらないことを意味しており、座標原点をどこにとっても物理法則は不変であるべきである。よって、位置座標を r_a を $r_a + \epsilon$ と一様にずらしても物理法則は不変であるべきである。このとき、ラグランジアンの変化 δL は、

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} \cdot \epsilon = 0$$

と、ラグランジアンが不変であるべきであるので、最右辺の様に零であるべきである。任意の ϵ に対して成り立つので

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0$$

が成り立つ。ここで、オイラー・ラグランジュ方程式 (2.4) から、一般化座標 q_i をデカルト座標 r_{aj} (a は質点の区別、 j は x または y または z) で読み替えた方程式 $\frac{\partial L}{\partial r_a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} \right)$ から、上式は

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} \right) = 0$$

が成り立つ。式 (3.2) から、運動量を用いて、上式は

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_a p_a \right) = 0 \quad (3.3)$$

すなわち

$$\sum_a p_a = \text{時間に依らず一定} \quad (3.4)$$

が得られる。すなわち、系の各質点の運動量の総和は、時間が経っても変化しない一定量をとる。この事実を運動量保存則と呼ぶ。運動量保存則は空間の一様性、すなわち空間並進の不変性から直ちに導かれる物理法則である。我々の空間は3次元、すなわち3方向に拡がっている。そこで、3方向への空間並進が可能である。こうして、空間並進の不変性に基づき保存する運動量は3つの成分を持ち、ベクトル量 \mathbf{p} となる。

§ 3.2 角運動量

空間の等方性から、空間には特別の方向が存在しない。すなわち、座標軸をどの向きにとっても、物理法則は不変である。

座標系をデカルト座標に限って議論を進めよう。まず、空間の等方性から、空間座標を回転しても物理法則は不変のはずである。このことから、空間回転を表す方法を考えよう。無限小の角度 $\delta\varphi$ だけ、ある軸の周りに回転したとしよう。このとき、デカルト座標で記述した質点 a の位置ベクトル \mathbf{r}_a は回転し、新しく \mathbf{r}'_a となるであろう。その変位 $\delta\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a - \mathbf{r}_a$ を考えよう。変位ベクトルの向きは回転軸に垂直な平面内にあり、その大きさ $|\delta\mathbf{r}_a|$ は、図 6 から理解されるように、

$$|\delta\mathbf{r}_a| = r_a \sin\theta \delta\varphi$$

となる。変位ベクトル自身はベクトル積を用いると簡単に書き表すことができ、

$$\delta\mathbf{r}_a = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a$$

となる。ただし、ベクトル $\delta\boldsymbol{\varphi}$ は、大きさが回転角 $\delta\varphi$ に等しく、向きは回転軸の方向を向くベクトルとして定義される。一般に、空間回転に対して、ベクトルは同様な変換を受けるので、速度ベクトル \mathbf{v}_a の変化 $\delta\mathbf{v}_a$ に関する関係式が得られる。

$$\delta\mathbf{v}_a = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a$$

空間の等方性から、ラグランジアンは我々が採用したデカルト座標の向き、すなわち、ラグランジアンが依存するベクトルの向きには依らないはずである。したがって、空間回転の下でラグランジアンは不変である。すなわち、空間回転のもとでの位置ベクトル \mathbf{r}_a と速度ベクトル \mathbf{v}_a の変化の下で、ラグランジアンの変化 δL は無く、

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta\mathbf{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \cdot \delta\mathbf{v}_a \right) = 0$$

となるべきである。ここで、オイラー・ラグランジュ方程式から、 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \dot{\mathbf{p}}_a$ 、また、一般化運動量の定義より $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \mathbf{p}_a$ であるので、空間回転の下でのラグランジアンの変化 δL は、 $\delta\mathbf{r}_a$ 、 $\delta\mathbf{v}_a$ の式を用いて

$$\delta L = \sum_a [\dot{\mathbf{p}}_a \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a) + \mathbf{p}_a \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}_a)] = 0$$

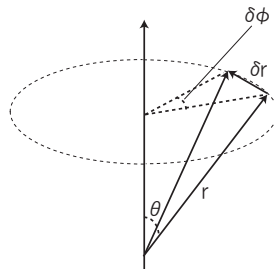


図 6:

が得られる。ベクトルの外積と内積の公式 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$ を用いて、ラグランジアンの変化 δL は

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta\varphi \cdot \sum_a [(\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a) + (\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a)] \\ &= \delta\varphi \cdot \frac{d}{dt} \sum_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a) = 0\end{aligned}$$

が得られる。任意の微小回転角 $\delta\varphi$ について成り立つので、結局、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{L} &= 0, \\ \mathbf{L} &\equiv \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a = \text{定数}\end{aligned}\tag{3.5}$$

が得られる。 \mathbf{L} を角運動量と呼び、角運動量が時間に関わらず一定値を取るという空間の等方性に起因した保存法則を、角運動量保存則と呼ぶ。3つの空間次元が存在することから、それぞれ3つの方向を決める座標軸の周りに空間を回転することが可能である。こうして、各空間回転に対してそれぞれ角運動量が保存するので、角運動量 \mathbf{L} は3つの成分を持つ3次元ベクトルを構成する。

§ 3.3 エネルギー

我々が認識している空間は3次元であるので、並進・回転の不変性を考察した。我々が認識している時間は1次元であるので、時間については並進の自由度しか存在しない。時間の一様性から、時間の原点をずらしても物理法則は不変であるべきである。すなわち、時間並進についての不変性が存在する。こうして、時間の原点をずらしても物理法則が変わらないことから、物理法則を支配するラグランジアンは時間をあからさまに含んではならない。すなわち、

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

したがって、ラグランジアンの時間に関する全微分を考えると、一般化座標 q_i と一般化速度 \dot{q}_i を通してのみ時間変化を考えれば良いことになり、

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i)\end{aligned}\tag{3.6}$$

と変形できる。ここで、1行目から2行目へはオイラー・ラグランジュ方程式を用い、3行目から4行目へは一般化運動量の定義を用いた。こうして、時間の全微分でまとめて、

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right] = 0$$

が得られる、すなわち、

$$E \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \text{一定}\tag{3.7}$$

という式が得られる。ここで、 E を、系の力学的エネルギーと呼ぶ。

今、系の相互作用を表すポテンシャル関数 $V(q)$ と、一般化速度の 2 乗の関数 $T(q, \dot{q}) \propto \dot{q}_i^2$ から、ラグランジアンは一般に

$$L = T(q, \dot{q}) - V(q)$$

と書けていた。したがって、 $\partial T / \partial \dot{q}_i \propto 2\dot{q}_i$ となるので、

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

となる。こうして、保存する系の力学的エネルギー E は

$$E = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V \quad (3.8)$$

となる。ここで、系の相互作用を表すポテンシャル関数 V をポテンシャル・エネルギー、一般化速度の 2 乗に比例した自由粒子の場合のラグランジアン T を運動エネルギーと呼ぶ。式 (3.8) の E が時間に関わらず一定値を取ることを、力学的エネルギー保存則と呼ぶ。

§ 3.4 ネーターの定理

一般化座標 q 、あるいは時間 t があるパラメータ a で変換されたとき、ラグランジアン L が不変であったとしよう。すなわち、変換 a のもとで物理法則は不変であるとする。

時間 t は一般化座標ではないので、時間 t も一般化座標と同様に扱うために、本節では少し工夫を凝らす。つまり、時間 t はあるパラメータ τ の関数とみなすことにする。このとき、一般化速度は $\dot{q}_i = dq_i/dt = (dq_i/d\tau)/(dt/d\tau)$ と書ける。こうして、パラメータ τ の微分を $'$ で表わすことにして、

$$q'_i \equiv \frac{dq_i}{d\tau}, \quad \dot{q}_i \equiv \frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = q'_i \cdot \frac{d\tau}{dt}$$

と書くことができる。こうして、作用 S は

$$\begin{aligned} S &= \int L(q, \dot{q}, t) dt = \int L\left(q, \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}, t(\tau)\right) \frac{dt}{d\tau} d\tau \\ &\equiv \int \tilde{L}(q_i, q'_i, q_{s+1}, q'_{s+1}) d\tau = \int \tilde{L}(q, q') d\tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

と書き直される。ここで、

$$\tilde{L} = L \frac{dt}{d\tau}, \quad q_{s+1} = t, \quad q'_{s+1} = \frac{dt}{d\tau}$$

と定義した。系の自由度は s である。

さて、ここまでの準備の下で、一般化座標 q_i ($i = 1, 2, \dots, s$)、時間 q_{s+1} が、あるパラメータ a で変換されたとしよう。この変換のもとで物理法則は不変であるとしよう。すなわち、ラグランジアン \tilde{L} が不変であると要請する。すなわち、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\tilde{L}(q(a), q'(a))}{da} \\ &= \sum_{i=1}^{s+1} \left[\frac{\partial \tilde{L}(q(a), q'(a))}{\partial q_i(a)} \cdot \frac{\partial q_i(a)}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{L}(q(a), q'(a))}{\partial q'_i(a)} \cdot \frac{\partial q'_i(a)}{\partial a} \right] \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $a \rightarrow 0$ ととると、 $q_i(a \rightarrow 0) = q_i$ 、 $q'_i(a \rightarrow 0) = q'_i$ であり、上式は、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{s+1} \left[\frac{\partial \tilde{L}(q, q')}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(a)}{\partial a} \Big|_{a=0} + \frac{\partial \tilde{L}(q, q')}{\partial q'_i} \frac{\partial q'_i(a)}{\partial a} \Big|_{a=0} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{s+1} \left[\left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \tilde{L}(q, q')}{\partial q'_i} \right) \frac{\partial q_i(a)}{\partial a} \Big|_{a=0} + \frac{\partial \tilde{L}(q, q')}{\partial q'_i} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial q_i(a)}{\partial a} \right) \Big|_{a=0} \right] \\ &= \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{i=1}^{s+1} \left(\frac{\partial \tilde{L}(q, q')}{\partial q'_i} \frac{\partial q_i(a)}{\partial a} \Big|_{a=0} \right) \right] \end{aligned}$$

となる。ここで、1行目から2行目へはオイラー・ラグランジュ方程式と、 a と τ に関する微分が交換することを用了。こうして、次の重要な結論を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\tau} &= 0, \tag{3.10} \\ I &\equiv \sum_{i=1}^{s+1} \frac{\partial \tilde{L}(q, q')}{\partial q'_i} \frac{\partial q_i(a)}{\partial a} \Big|_{a=0} \end{aligned}$$

すなわち、変換 a に対して物理法則が不変であれば、“時間” τ に関して、 I は保存する。これをネーターの定理という。

§§3.4.1 空間並進対称性と運動量保存則

一般化座標 q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) としてデカルト座標 \mathbf{r}_a をとる。ここで、添え字 a は質点を区別する指標である。空間並進

$$\mathbf{r}_a \longrightarrow \mathbf{r}_a + \mathbf{a}$$

のもとで、物理法則は不変である。このとき、時間は変換を受けない。すなわち、

$$q_{s+1} = t \longrightarrow q_{s+1} = t$$

すなわち、

$$\tau = t$$

ととればよい。従って、 $\tilde{L} = L$ 、 $q'_i = \dot{q}_i$ となり、ラグランジアンは $L(\mathbf{r}_a(\mathbf{a}), \dot{\mathbf{r}}_a(\mathbf{a}), t)$ と変数を持つ。こうして、ネーターの定理からただちに

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{s+1} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'_k} \frac{\partial q_k}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \mathbf{a}} \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} \\ &= \sum_a \mathbf{p}_a \end{aligned} \tag{3.11}$$

は保存する。ここで、運動量の定義 (3.2) を用了。時間 $\tau = t$ から、この量は

$$\frac{dI}{dt} = 0 \tag{3.12}$$

となることがネーターの定理から結論される。こうして、空間並進の対称性から運動量保存法則が再び得られた。

§§3.4.2 空間回転対称性と角運動量保存則

デカルト座標に基づき考えよう。簡単のため1質点に対し、 z 軸周りに回転角 a で回転しよう。

$$x = r \cos(\theta + a), \quad y = r \sin(\theta + a), \quad z = z$$

もちろん時間は変換せず、 $\tau = t$ ととればよい。こうして、ネーターの定理から、保存する I は

$$\begin{aligned} I &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x}{\partial a} \right|_{a=0} + \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial a} \right|_{a=0} = p_x(-r \sin \theta) + p_y r \cos \theta = -p_x y + p_y x \\ &= L_z \end{aligned} \quad (3.13)$$

となり、 z 軸周りの回転不変性に起因する保存する物理量として、確かに角運動量の z 成分が得られる。他の成分、多粒子系についても同様である。

§§3.4.3 時間並進対称性とエネルギー保存則

時間並進のもとで、物理法則は不変である。この変換は

$$q_i \longrightarrow q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad q_{s+1} (= t) \longrightarrow q_{s+1} + a (= t + a)$$

である。このとき保存する物理量 I は

$$I = \left. \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'_{s+1}} \frac{\partial q_{s+1}}{\partial a} \right|_{a=0}$$

である。以下、この量を具体的に計算していこう。まず、 $q'_{s+1} = dt/d\tau$ であること等を思い出すと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q'_{s+1}} &= \frac{\partial}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau}\right)} \left(L \left(q_i, \frac{dq_i}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau}, t \right) \frac{dt}{d\tau} \right) = L + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{d\tau} / \frac{dt}{d\tau}\right)} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{dt}{d\tau}\right)} \left(\frac{dq_i}{d\tau} \right) \cdot \frac{dt}{d\tau} \\ &= L + \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt}\right)} \cdot \left(-\frac{\frac{dq_i}{d\tau}}{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2} \right) \cdot \frac{dt}{d\tau} = L - \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{dq_i}{dt} \\ &= L - \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i \\ &\equiv -E \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで、2行目から3行目へは一般化運動量の定義を、3行目から4行目へはすでに定義した力学的エネルギー E を用いた。時間の変換から $\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}$ であるので、結局ネーターの定理から

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{dE}{dt} = 0 \quad (3.15)$$

が得られる。すなわち、力学的エネルギー E は時間に依存しない保存量であることが再び示される。

§3.5 力学的相似則

ラグランジアンを定数倍しても、オイラー・ラグランジュ方程式は変わらない。そこで、ラグランジアン中の相互作用を表すポテンシャル・エネルギー項 $V(q)$ が、すべての一般化座標 q_i を α 倍したとき、

$$V \longrightarrow V' \equiv V(\alpha q_1, \alpha q_2, \dots, \alpha q_s) = \alpha^k V(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

という関係式を満たしているとしよう。すなわち、 V が k 次の同次関数である場合を考える。このとき、変換

$$q_i \longrightarrow q'_i \equiv \alpha q_i, \quad t \longrightarrow t' \equiv \beta t$$

を考える。座標をすべて α 倍したとき、時間は β 倍しておく。このとき、運動エネルギー T は $\sum_i (m/2)(dq_i/dt)^2$ であるので、座標、時間の上式の変換のもとで、

$$T \longrightarrow T' \equiv \frac{\alpha^2}{\beta^2} T$$

と変換される。こうして、

$$\alpha^k = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \text{すなわち} \quad \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

という関係があれば、ラグランジアンは定数倍 (α^k 倍) されるだけであることがわかる。したがって、全ての質点の座標を α 倍した軌道に移り、時間が β 倍されるのであれば運動方程式は変わらず、同じ運動が起きる。すなわち、幾何学的に相似な別の軌跡に移るのみである。これを力学的相似則と呼ぶことにする。

典型的な軌跡の大きさを l と書こう。相似な別の軌跡の大きさは $l' = \alpha l$ と α 倍されているとする。質点がこの軌跡の運動に要する時間をそれぞれ、 t 、 $t' = \beta t$ とすると、運動に要する時間は

$$\frac{t'}{t} = \beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{k}{2}} \quad (3.16)$$

という関係があることがこれまでの議論からわかる。種々の力学量についても考えよう。たとえば、質点の速さ v については、

$$\frac{v'}{v} = \frac{\frac{l'}{t'}}{\frac{l}{t}} = \frac{l' t}{l t'} = \frac{l'}{l} \left(\frac{l'}{l}\right)^{-(1-\frac{k}{2})} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}$$

という関係があることがわかる。同様に、角運動量 $L (= |\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})|)$ 、エネルギー E は

$$\frac{L'}{L} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k$$

という関係を有することがわかる。

具体的な例を3つだけ挙げておこう。

§§3.5.1 地表付近での落体運動

地表付近では、物体は鉛直下向きに力 $F = mg$ を受ける。ここで g は重力加速度と呼ばれる*。このとき、ポテンシャル・エネルギーは、鉛直上向きに z 軸をとると

$$V(z) = mgz$$

*§6.1.2 で示される。

であり、座標 z を α 倍したとき、

$$V(\alpha z) = \alpha V(z)$$

となることから、 $k = 1$ であることがわかる。したがって、落体運動に要する時間は (3.16) から

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

となることがわかる。すなわち、落下距離 l は落下時間 t の 2 乗に比例する ($l \propto t^2$)。これはガリレオ・ガリレイが発見した落体の法則にほかならない。

§§3.5.2 振り子の等時性

次に、力が変位に比例する場合[†]を考える。このとき、ポテンシャル・エネルギー $V(q)$ と力 F は

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2, \quad F = -\frac{dV(q)}{dq} = -m\omega^2q$$

となる。ここで、 ω は或る定数である。振れ幅の小さな振り子は、このように変位に比例した力を受けて周期的な運動を行なう。今、座標 q を α 倍すれば、

$$V(\alpha q) = \alpha^2 V(q)$$

であるので、 $k = 2$ の場合の例になっている。このときには (3.16) から、

$$\frac{t'}{t} = 1$$

が得られる。すなわち、周期運動の周期は振れ幅（振幅）に依存せず一定値をとる。振り子の場合、この事実を振り子の等時性と呼び、ガリレオ・ガリレイにより発見された知見である。

§§3.5.3 ケプラーの第 3 法則

質量を持つすべての物体には、2 質点間の距離 r の 2 乗に反比例し、2 質点の質量の積 $m_1 m_2$ に比例した引力が働く[‡]。ポテンシャル・エネルギー V 、及び万有引力 \mathbf{F} は

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad \mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

と書ける。ここで、 G は万有引力定数と呼ばれる或る定数である。また $\hat{\mathbf{r}}$ は大きさ 1 で、2 点間を結ぶ方向に沿う外向きの単位ベクトルである。このとき、座標 r を α 倍すると、

$$V(\alpha r) = \frac{1}{\alpha} V(r)$$

となるので、 $k = -1$ の場合に相当する。こうして、(3.16) から、質点の軌跡の大きさ l と、軌道運動に要する時間 t の間には、

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

の関係が存在することがわかる。太陽との万有引力を受けて公転する惑星運動に適用した場合、 t を公転周期、 l を軌道の大きさ[§]として、両辺を 2 乗しておいて、公転周期の 2 乗は軌道の大きさの 3 乗に比例すると言える。この事実はケプラーの第 3 法則と呼び慣らわされている。

[†]フックの法則と呼ばれる。

[‡]詳しくは、§6.1.2 を見よ。

[§]正確には楕円軌道の長半径

§ 3.6 ビリアル定理

系の運動が有界でかつポテンシャルエネルギーが座標の同次関数であるとき、ビリアル定理とよばれる定理が成り立つことをみておこう。

今、運動エネルギー T を速度 \mathbf{v}_a で微分すると、

$$\sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = 2T$$

となるが、左辺は運動量の定義から

$$\sum_a \mathbf{v}_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_a \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{p}_a = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}_a$$

となる。こうして、

$$2T = \frac{d}{dt} \left(\sum_a \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{r}_a \right) - \sum_a \mathbf{r}_a \cdot \dot{\mathbf{p}}_a$$

長時間平均をとると、上の式の右辺第1項は運動が有界であることから零となる。すなわち、 F の長時間平均を \bar{F} と表わして

$$\frac{d\bar{F}}{dt} \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{dF}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{F(\tau) - F(0)}{\tau} = 0$$

である。ここで、 $F(\tau)$ は有界であるので、有限値をとることを考慮した。こうして、時間の完全微分の長時間平均は零になり、右辺第1項が0になることが言えた。また、 $\dot{\mathbf{p}}_a = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}_a}$ より、上式の長時間平均をとると、 V が \mathbf{r}_a に関して k 次の同次関数 $\left(\sum_a \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \mathbf{r}_a = kV \right)$ として

$$2\bar{T} = \overline{\sum_a \mathbf{r}_a \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_a}} = k\bar{V}$$

が得られる。これをビリアル定理と呼ぶ。

例を2つ挙げておこう。1次元単振動のときには、 $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ であり、ポテンシャルエネルギーは座標 x について2次の同次関数、すなわち $k = 2$ である。こうして、運動エネルギーの長時間平均とポテンシャルエネルギーの長時間平均は等しい： $\bar{T} = \bar{V}$ 。次に万有引力の場合を見ておこう。ポテンシャルエネルギーは $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ であり、 $k = -1$ である。こうして、 $2\bar{T} = -\bar{V}$ が得られる。

§§3.6.1 ビリアル定理の適用例

ビリアル定理の適用例の一つとして、恒星の重力崩壊を考えてみよう。前節でみたように重力の場合には $k = -1$ であり、

$$\begin{aligned} 2\bar{T} &= -\bar{V} \\ &= G\frac{Mm}{r} \equiv \bar{\Omega} \end{aligned} \quad (3.17)$$

である。ここで、 M は考えている星の内部の質量で、 m は星を構成する物質の質量と考えればよい。また便宜の為 $\bar{\Omega}$ を定義した。崩壊前の星を構成する物質のエネルギーは

$$E = \bar{T} + \bar{V} = \frac{\bar{\Omega}}{2} - \bar{\Omega} = -\frac{\bar{\Omega}}{2}$$

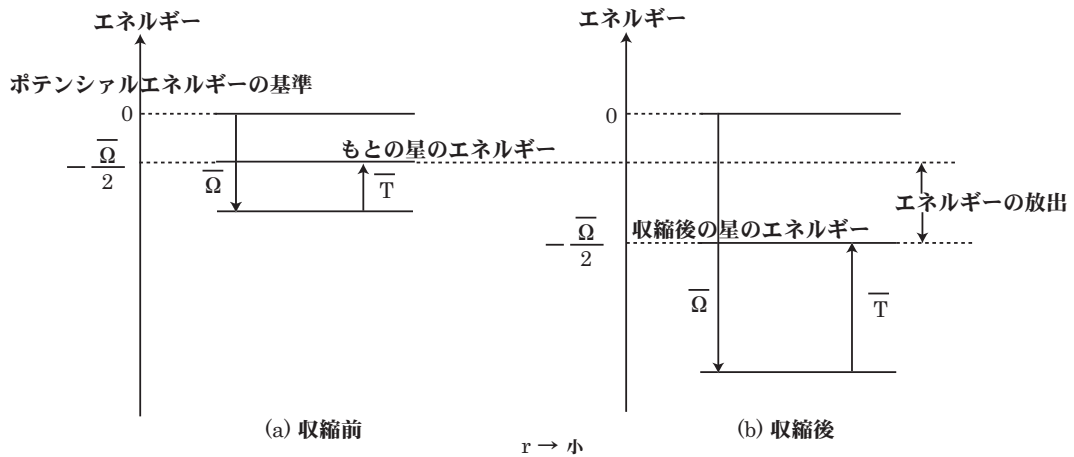


図 7:

である。恒星が重力崩壊し、星の質量はそのままで半径 r が縮んでいったとする。初めは図 7(a) のように、 $-\bar{\Omega}/2$ のエネルギーであるが、星が収縮し、半径 r が小さくなると (3.17) から $\bar{\Omega}$ が大きくなるのがわかる。結果的に星のエネルギーは、図 7(b) のように、 $\bar{\Omega}$ が大きくなったために低くなる。そうすることで、図のように収縮後と収縮前のエネルギー差の分だけエネルギーを放出する。一方、星を構成する物質の運動エネルギー \bar{T} も、 $\bar{\Omega}$ の増加に伴って増加していることは (3.17) からわかる。乱雑な運動をしている物質の運動エネルギーの平均は、気体分子運動論から知られているように温度であるので[¶]、 \bar{T} の増加は星の温度の上昇につながる。こうして、星が重力崩壊する際には、星の外部にエネルギーを放出しながら、星自身の温度も上昇することが言える。

[¶]絶対温度 T と

$$\bar{T} \equiv \frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

の関係がある。ここで、 $k_B = 1.38 \times 10^{23}$ [J/K] はボルツマン定数である。

4章 ハミルトン形式

§ 4.1 ハミルトン方程式

ラグランジアン L は一般化座標 q 、一般化速度 \dot{q} 、及び時間 t の関数である。ここでは、時間に依存しないとして、一般化座標と一般化運動量に基づく運動の記述法を構成する。

ラグランジアンは一般化座標と一般化速度の関数であるので、その全微分 dL は

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ &= \sum_i (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) \\ &= \sum_i \dot{p}_i dq_i - \sum_i dp_i \dot{q}_i + d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、1行目から2行目へはオイラー・ラグランジュ方程式を用い、2行目から3行目へは一般化運動量の定義を用いた。全微分でまとめると、

$$d \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) = - \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i \quad (4.1)$$

となる。ここで、ハミルトン関数 H を以下のように定義する：

$$H \equiv \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L \quad (4.2)$$

ここで、(3.7)、(3.8) 式を思い出すと、(4.2) は

$$\begin{aligned} H &\equiv \sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L \\ &= T + V \end{aligned} \quad (4.3)$$

となり、ハミルトン関数は系のエネルギーを一般化座標 q_i と一般化運動量 p_i の関数とみなしたものと言える。ハミルトン関数 H が q_i と p_i の関数であることは、(4.1) と (4.2) から

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i$$

であることからわかる。

上式よりただちに、

$$\begin{aligned} \dot{q}_i \left(= \frac{dq_i}{dt} \right) &= \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i \left(= \frac{dp_i}{dt} \right) &= - \frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (4.4)$$

が得られる。これをハミルトン方程式または正準方程式と呼ぶ。オイラー・ラグランジュ方程式は時間に関する2階の微分方程式であったが、ハミルトン方程式は一般化運動量を用いることで、時間に関する1階の微分方程式の形を持たせている。ただし、方程式の数が2倍になっている。

ハミルトン関数は一般化運動量と一般化座標を用いて書いた力学的エネルギーの形をしていたので、簡単に

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q)$$

の形を持つ場合が多い。このときには、ハミルトン方程式 (4.4) は

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_i} (\equiv F_i)\end{aligned}$$

となる。運動量 p_i を消去すれば、オイラー・ラグランジュ方程式（またはニュートン方程式）に帰着することがわかる。

§ 4.2 ポアソン括弧とハミルトン方程式

一般化座標 q_i 、一般化運動量 p_i 、及び時間 t の関数 $f(q, p, t)$ を考えよう。この関数の時間導関数は、一般化座標、一般化運動量が時間 t の関数であることに留意して

$$\begin{aligned}\frac{df(q, p, t)}{dt} &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。ここで、1行目から2行目へはハミルトン方程式 (4.4) を用いた。このとき、関数 $A(q, p)$ 、 $B(q, p)$ に対して、次のポアソン括弧を定義する。

$$\{A(q, p), B(q, p)\}_P \equiv \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \quad (4.5)$$

このポアソン括弧を用いると、先ほどの関数 f の時間導関数はハミルトン関数 H を用いて

$$\frac{df(q, p, t)}{dt} = \{f, H\}_P + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.6)$$

と簡潔に書ける。

今、関数 f が時間 t をあからさまに含んでいないとしよう。すなわち、 $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ であるときには関数 f の時間に関する全微分 (4.6) は

$$\frac{df(q, p)}{dt} = \{f, H\}_P$$

となる。ここで、 f が保存量、すなわち、時間に拘わらず一定値をとるならば、 $\frac{df}{dt} = 0$ であるので、

$$\{f, H\}_P = 0$$

となる。保存量とハミルトン関数のポアソン括弧は零となる。このように保存法則を表す表式がポアソン括弧を用いて新たに得られる。

さて、一般化座標 q_i と一般化運動量 p_i はハミルトン形式の下でハミルトン関数 H を決定する独立変数であるので、互いに独立である。したがって、例えば一般化座標 q_i 、または一般化運動量 p_i とハミルトン関数 H のポアソン括弧は、

$$\begin{aligned}\{q_i, H\}_P &= \sum_k \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \{p_i, H\}_P &= \sum_k \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i\end{aligned}$$

となる。ここで、それぞれ2番目の等式は q_i と p_i が独立であることから、

$$\begin{aligned}\frac{\partial q_i}{\partial p_k} &= 0, & \frac{\partial p_i}{\partial q_k} &= 0, \\ \frac{\partial q_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (\text{for } i = k) \\ 0 & (\text{for } i \neq k) \end{cases}\end{aligned}$$

となることを用いた。ここで、 δ_{ik} はクロネッカーのデルタと呼ばれ、 $i = k$ のときは値1を、それ以外は0をとる。また、最後の等式はハミルトン方程式 (4.4) を用いた。こうして、ハミルトン方程式は、ポアソン括弧を用いて、

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_P, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_P \quad (4.7)$$

と書けることがわかる。

ここで、ポアソン括弧の幾つかの性質を挙げておこう。証明は容易である。まず、ポアソン括弧は反可換であり、

$$\{f, g\}_P = -\{g, f\}_P$$

となる。また、双線形であり

$$\begin{aligned}\{f_1 + f_2, g\}_P &= \{f_1, g\}_P + \{f_2, g\}_P \\ \{f_1 f_2, g\}_P &= f_1 \{f_2, g\}_P + \{f_1, g\}_P f_2 \\ \{f, g_1 g_2\}_P &= g_1 \{f, g_2\}_P + \{f, g_1\}_P g_2\end{aligned}$$

が示される。さらに重要なことに、次のヤコビ恒等式を満たす。

$$\{f, \{g, h\}_P\}_P + \{g, \{h, f\}_P\}_P + \{h, \{f, g\}_P\}_P = 0$$

§ 4.3 正準変換

ハミルトン形式では、一般化座標と一般化運動量により運動は記述される。しかしながら、一般化座標とそれにより定義される一般化運動量は様々な形式でとることができる。例えば1質点系での一般化座標としてデカルト座標を採ることもできるし、極座標を採ることも可能である。ここでは、ハミルトン方程式（正準方程式）を不変に保つような一般化座標、一般化運動量の変換を考える。正準方程式を不変に保つ変換を正準変換と呼ぶ。

一般化座標と一般化運動量をそれぞれ、 q_i 、 p_i としよう。正準変換により、これらは新しい一般化座標 Q_i と一般化運動量 P_i に変換されたとする。すなわち、

$$Q_i = Q_i(q, p), \quad P_i = P_i(q, p)$$

この変換のもとで正準方程式が不変であるので、

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i}, & \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

となるべきである。ここで、 H' は変換後のハミルトン関数である。

ここで、最小作用の原理に立ち返ろう。元の一般化座標、一般化運動量 (q_i, p_i) のもとで、ラグランジアン L は

$$L = \sum_k p_k \dot{q}_k - H$$

であり、作用 S は

$$\begin{aligned} S &= \int dt L = \int dt \left(\sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} - H \right) \\ &= \int \left(\sum_k p_k dq_k - H dt \right) \end{aligned}$$

と書け、最小作用の原理は変分 δS が零であることを要求する。すなわち、

$$\delta S = \delta \int \left(\sum_k p_k dq_k - H dt \right) = 0$$

変換後の一般化座標、一般化運動量 (Q_i, P_i) の下でも同じ形の正準方程式が導かれるためには最小作用の原理が同じ形、すなわち

$$\delta S = \delta \int \left(\sum_k P_k dQ_k - H' dt \right) = 0$$

を持たねばならない。したがって、 (q_i, p_i) と (Q_i, P_i) による最小作用の原理を見比べて、

$$\sum_k p_k dq_k - H dt = \sum_k P_k dQ_k - H' dt + dF \quad (4.8)$$

であれば良い。ここで、 dF は関数 $F(q, Q)$ の全微分である。全微分 dF だけの不定性が許されるのは、最小作用の原理では積分の上端と下端の一般化座標が固定されていることによる。すなわち、 $\delta q(t_2) = \delta q(t_1) = \delta Q(t_2) = \delta Q(t_1) = 0$ である。こうして、

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dF = \delta [F(q(t_2), Q(t_2)) - F(q(t_1), Q(t_1))] = 0$$

が得られ、関数 F だけの不定性が存在しても運動方程式には影響しない。一旦整理しておこう。旧・新の一般化座標 q_i, Q_i の関数 F を、改めて $F_1(q, Q, t)$ と表すことにする。こうして、

$$\begin{aligned} dF_1 &= \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + [H'(Q, P, t) - H(q, p, t)] dt \\ &= \sum_k p_k dq_k + \sum_k Q_k dP_k - d \left(\sum_k P_k Q_k \right) + [H' - H] dt \\ &= -\sum_k q_k dp_k + d \left(\sum_k q_k p_k \right) - \sum_k P_k dQ_k + [H' - H] dt \\ &= -\sum_k q_k dp_k + \sum_k Q_k dP_k + d \left(\sum_k q_k p_k - \sum_k P_k Q_k \right) + [H' - H] dt \end{aligned}$$

のように、種々変形できる。こうして、まず、等式の2行目から、関数 $F_2(q, P, t)$ として

$$\begin{aligned} dF_2 &\equiv d\left(F_1 + \sum_k P_k Q_k\right) \\ &= \sum_k p_k dq_k + \sum_k Q_k dP_k + [H' - H]dt \end{aligned}$$

また、3行目から関数 $F_3(p, Q, t)$ として、

$$\begin{aligned} dF_3 &\equiv d\left(F_1 - \sum_k q_k p_k\right) \\ &= -\sum_k q_k dp_k - \sum_k P_k dQ_k + [H' - H]dt \end{aligned}$$

さらに4行目から関数 $F_4(p, P, t)$ として

$$\begin{aligned} dF_4 &\equiv d\left(F_1 - \sum_k q_k p_k + \sum_k P_k Q_k\right) \\ &= -\sum_k q_k dp_k + \sum_k Q_k dP_k + [H' - H]dt \end{aligned}$$

をそれぞれ定義することにする。以上より、ただちに

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad &F_1(q, Q, t) \\ &p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \text{(ii)} \quad &F_2(q, P, t) \\ &p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \text{(iii)} \quad &F_3(p, Q, t) \\ &q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ \text{(iv)} \quad &F_4(p, P, t) \\ &q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.9}$$

が得られる。これらの変換ではすべて正準方程式は不変に保たれる。変換を引き起こす関数 $F_1 \sim F_4$ を正準変換の母関数と呼ぶ。

§§4.3.1 正準変換の例

(i) 恒等変換

変換の母関数を

$$F_2(q, P, t) = \sum_k q_k P_k$$

ととる。このとき、(4.9) の (ii) から、

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i, \\ H' &= H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H \end{aligned}$$

が得られる。これは、一般化座標、一般化運動量ともに変換されていない。これを恒等変換と呼び、正準変換の自明な例である。

(ii) 点変換

変換の母関数を

$$F_3(p, Q, t) = - \sum_k g_k(Q) p_k$$

ととる。ここで、 $g_k(Q)$ は新しい一般化座標 Q_i の関数である。このとき、(4.9) の (iii) から、

$$\begin{aligned} q_i &= - \frac{\partial F_3}{\partial p_i} = g_i(Q), \\ P_i &= - \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial g_k(Q)}{\partial Q_i} p_k, \\ H' &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} = H \end{aligned}$$

が得られる。もとの一般化座標 q_i と新しい一般化座標 Q_i の関係は座標間同士の関係であり、座標間の変換に運動量が関与しないという意味で通常座標変換に他ならない。この変換を点変換と呼ぶ。

(ii-a) 極座標変換

デカルト座標 (x, y, z) から極座標 (r, θ, ϕ) へは、

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

である。この変換は正準変換であり、変換の母関数は

$$F_3(p, Q, t) = -(p_x r \sin \theta \cos \phi + p_y r \sin \theta \sin \phi + p_z r \cos \theta)$$

と取ればよい。実際、(4.9) の (iii) から

$$x = - \frac{\partial F_3}{\partial p_x}, \quad y = - \frac{\partial F_3}{\partial p_y}, \quad z = - \frac{\partial F_3}{\partial p_z},$$

を確かめるのは容易である。したがって、デカルト座標で表した運動量と、極座標で表した運動量の関係は(4.9) の (iii) から容易に計算でき、

$$\begin{aligned} p_r &= - \frac{\partial F_3}{\partial r} = p_x \sin \theta \cos \phi + p_y \sin \theta \sin \phi + p_z \cos \theta, \\ p_\theta &= - \frac{\partial F_3}{\partial \theta} = p_x r \cos \theta \cos \phi + p_y r \cos \theta \sin \phi - p_z r \sin \theta, \\ p_\phi &= - \frac{\partial F_3}{\partial \phi} = -p_x r \sin \theta \sin \phi + p_y r \sin \theta \cos \phi \end{aligned}$$

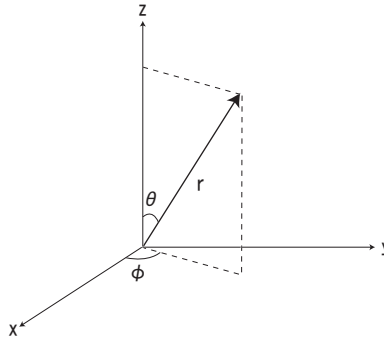


図 8: デカルト座標と極座標

と得られる。

(iii) 一般化座標と一般化運動量の交換
変換の母関数を

$$F_1(q, Q, t) = \sum_k q_k Q_k$$

ととる。このとき、(4.9) の (i) から、

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \\ P_i &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i, \\ H' &= H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H \end{aligned}$$

が得られる。もとの一般化座標と一般化運動量は符号を除いて新しい一般化運動量と一般化座標に変換されてしまう。このように、正準方程式を不変に保つ変換としては座標と運動量を交換してしまう変換も可能である。

(iv) ガリレイ変換
ハミルトン関数が

$$H = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + \sum_a \sum_{b(>a)} V(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b)$$

である一般的な系を考えよう。正準変換の母関数として、(4.9)(ii) のタイプの次の関数を考える。

$$F_2(\mathbf{r}_a, \mathbf{P}_a, t) = \sum_a \left(\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{r}_a - \mathbf{V} \cdot (\mathbf{P}_a t - m_a \mathbf{r}_a) - \frac{1}{2} m_a \mathbf{V}^2 t \right)$$

ここで、小文字で記された量 (\mathbf{r}_a 等) は変換前の量であり、大文字で記された量 (\mathbf{P}_a 等) は変換後の量である。また、 a は質点を識別する添え字である。さらに、 \mathbf{V} は速さの次元を持ったある定ベクトルである。母関数 F_2 が引き起こす正準変換は、(4.9) の (ii) より、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{P}_a} = \mathbf{r}_a - \mathbf{V} t, \\ \mathbf{p}_a &= \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{r}_a} = \mathbf{P}_a + m_a \mathbf{V}, \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{P}_a = \mathbf{p}_a - m_a \mathbf{V} \end{aligned}$$

となる。運動量 \mathbf{p}_a と速度 \mathbf{v}_a には $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$ の関係があることを思い出せば、これは §§2.3.1 で述べたガリレイ変換に他ならないことが理解される。したがって、ガリレイ変換は正準変換の一種である。このとき、ハミルトン関数 H は H' へ変換される。

$$\begin{aligned} H' &= H + \left. \frac{\partial F_2}{\partial t} \right|_{\mathbf{p}_a = \mathbf{P}_a + m_a \mathbf{V}, \mathbf{r}_a = \mathbf{R}_a + \mathbf{V}t} \\ &= \sum_a \frac{1}{2m_a} (\mathbf{P}_a + m_a \mathbf{V})^2 + \sum_a \sum_{b(>a)} V(\mathbf{R}_a - \mathbf{R}_b) + \left(-\mathbf{V} \cdot \sum_a \mathbf{P}_a - \sum_a \frac{1}{2} m_a \mathbf{V}^2 \right) \\ &= \sum_a \frac{\mathbf{P}_a^2}{2m_a} + \sum_a \sum_{b(>a)} V(\mathbf{R}_a - \mathbf{R}_b) \end{aligned}$$

こうして、ハミルトン関数はガリレイ変換の下で不変である。

§4.4 保存量と対称性

ネーターの定理から、連続的なある変換のもとで物理法則が不変であれば、時間とともに変化しない保存量が存在することが結論された。この節では、逆に保存量が連続的な変換に対する役割を考察する。

§§4.4.1 運動量と並進

演算子

$$\hat{\mathcal{L}}_i^p \equiv \{ p_i, \ }_P$$

を考える。この演算子は、ある物理量 \mathcal{O} に対して次の演算を行うことを意味している：

$$\hat{\mathcal{L}}_i^p[\mathcal{O}] = \{ p_i, \mathcal{O} \}_P$$

このとき、

$$\begin{aligned} e^{-a\hat{\mathcal{L}}_i^p} q_j &= \left(1 - a\hat{\mathcal{L}}_i^p + \frac{1}{2}a^2 (\hat{\mathcal{L}}_i^p)^2 + \dots \right) [q_j] \\ &= q_j - a\hat{\mathcal{L}}_i^p[q_j] + \frac{1}{2}a^2 \hat{\mathcal{L}}_i^p [\hat{\mathcal{L}}_i^p[q_j]] + \dots \\ &= q_j - a\{ p_i, q_j \}_P + \frac{1}{2}a^2 \{ p_i, \{ p_i, q_j \}_P \}_P + \dots \\ &= q_j - a(-\delta_{ij}) \\ &= q_j + a\delta_{ij} \end{aligned}$$

となる。よって、演算子 $\hat{\mathcal{L}}_i^p \equiv \{ p_i, \ }_P$ は、 $j = i$ のとき座標 q_i を $q_i + a$ だけ一様にずらす演算子として働く。すなわち、運動量 p_i を指数関数の肩にポアソン括弧の意味で載せた演算子は、空間並進を引き起こす演算子となっていることがわかる。

§§4.4.2 角運動量と回転

演算子

$$\hat{\mathcal{L}}_i^L \equiv \{ L_i, \ }_P$$

を考える。ここで、 L_i は角運動量の i 成分であり、簡潔に

$$L_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} q_j p_k,$$

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & \text{for } (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ 及びこの巡回置換} \\ -1 & \text{for } (i, j, k) = (3, 2, 1) \text{ 及びこの巡回置換} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

と書ける。ここに ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルである。たとえば、角運動量の第 3 成分、すなわち z 成分は

$$\begin{aligned} L_3 &= \epsilon_{312} q_1 p_2 + \epsilon_{321} q_2 p_1 \\ &= q_1 p_2 - q_2 p_1 = q_x p_y - q_y p_x \end{aligned}$$

であり、確かに各運動量の z 成分を与える。他の成分についても同様に確かめられる。以後、簡単のため各運動量の第 3 成分を例にとり考えていこう。今、 $\hat{L}_3^L = \{ q_1 p_2 - q_2 p_1, \}$ $_P$ であり、ポアソン括弧を計算することで、

$$\hat{L}_3^L[q_1] = -q_2 \{ p_1, q_1 \}_P = q_2, \quad \hat{L}_3^L[q_2] = q_1 \{ p_2, q_2 \}_P = -q_1$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned} e^{-\theta \hat{L}_3^L} q_1 &= \left(1 - \theta \hat{L}_3^L + \frac{1}{2} \theta^2 (\hat{L}_3^L)^2 + \dots \right) [q_1] \\ &= q_1 - \theta \hat{L}_3^L[q_1] + \frac{1}{2} \theta^2 \hat{L}_3^L [\hat{L}_3^L[q_1]] + \dots \\ &= q_1 - \theta q_2 - \frac{1}{2} \theta^2 q_1 + \frac{1}{3!} \theta^3 q_2 + \dots \\ &= q_1 \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) - q_2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \\ &= q_1 \cos \theta - q_2 \sin \theta \end{aligned}$$

となる。同様な計算により

$$e^{-\theta \hat{L}_3^L} q_2 = q_2 \cos \theta + q_1 \sin \theta$$

となることが示される。こうして、

$$e^{-\theta \hat{L}_3^L} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

とまとめることができる。こうして、演算子 \hat{L}_3^L は、3 軸に垂直な座標平面 (q_1, q_2) を角 θ だけ一様に回転させる演算子として働く。同様にして、すなわち、角運動量 L_i を指数関数の肩にポアソン括弧の意味で載せた演算子は、 i 軸に垂直な平面内で空間回転を引き起こす演算子となっていることがわかる。

§ 4.5 関数としての作用

§§4.5.1 一般化座標微分と一般化運動量

始点は同じであるが終点が異なる2つの古典軌道、経路1と経路2を考えよう。どちらの軌道も実際に起こり得る軌道である。経路1に従って求められる作用を S_1 、経路2に従って求められる作用を S_2 としよう。経路1から経路2に移ると、軌道は $\delta q(t) = q_2(t) - q_1(t)$ だけ変化する。ここで、 $q(t)$ は経路1で実現される一般化座標である。但し、始点は一致しているので、 $\delta q(t_0) = 0$ である。ここで、 t_0 は出発時の始点での時刻である。作用の変化 δS は

$$\begin{aligned} \delta S &= S_2(q_2, \dot{q}_2) - S_1(q_1, \dot{q}_1) \\ &= \int_{t_0}^t dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \int_{t_0}^t dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right) \\ &= \int_{t_0}^t dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^t \end{aligned}$$

と計算される。ここで、最終行の被積分関数は、オイラー・ラグランジュ方程式により零となり消える。従って、作用の変化 δS は、始点は一致しているので時刻 t_0 での一般化座標の変化は零 ($\delta q_i(t_0) = 0$) であることと、一般化運動量の定義 $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ を用いて

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \\ &= \sum_i p_i \delta q_i \end{aligned}$$

と得られる。こうして、作用 S は一般化座標 q_i の関数であることがわかり、上式から、

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \tag{4.10}$$

であることが言える。

一般化運動量の保存法則を、作用を用いて見直してみよう。図10のように、経路1と経路1'を考える。2つの経路は点Aから点Bへ、また点Dから点Cへのように一様に並進した経路である。もちろん、一様に回転

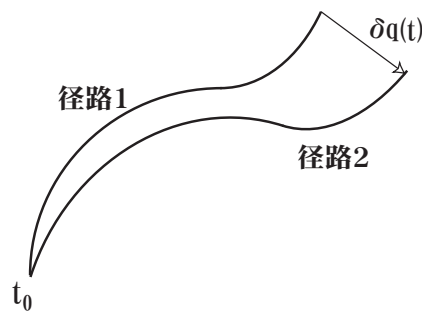


図 9:

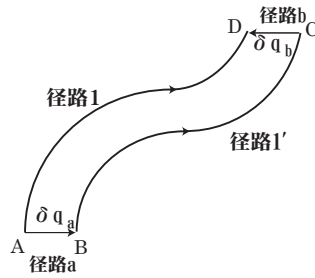


図 10:

したものと考えても良い。空間の一様性、または等方性から、径路 1 と径路 1' で作用は等しい。すなわち、

$$S_1 = S_{1'}$$

点 A から点 D まで質点が運動するが、径路を $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ と考えてみよう、ただし、 $A \rightarrow B$ 、 $C \rightarrow D$ は微少であるとする。径路 1 が本当の古典軌道であるなら、作用は最小であり、微少変換のもとで不変に保たれるはずである。すなわち、図 10 の径路 a と径路 b が微少である限り

$$S_1 = \delta S_a + S_{1'} + \delta S_b$$

となる。ここで、 δS_a 、 δS_b は径路 a、b での作用である。ところが、並進（または回転）対称性から、 $S_1 = S_{1'}$ が成り立ったので、上式は

$$\delta S_a + \delta S_b = 0, \quad \text{すなわち} \quad \delta S_a = -\delta S_b$$

が成り立つことを意味する。ここで、

$$\begin{aligned} \delta S_a &= \left. \frac{\partial S}{\partial q} \right|_a \delta q_a = p_a \delta q_a, \\ \delta S_b &= \left. \frac{\partial S}{\partial q} \right|_b \delta q_b = p_b \delta q_b, \end{aligned}$$

と表される。ここで p_a 、 p_b は A 点、D 点での一般化運動量である。図 10 より $\delta q_a = -\delta q_b$ であるので、 $\delta S_a = -\delta S_b$ の関係を用いると、

$$p_a = p_b$$

が導かれる。すなわち、空間の対称性（並進または回転）から、一般化運動量は A、D において同じ値を持つ、すなわち保存することが再び得られた。

§§4.5.2 時間微分とエネルギー

今度は始点と終点ともに固定して考えよう。ただし、2 つの異なる軌道で、質点が終点に到達する時刻が異なるとする。作用 S はラグランジアン L の時間積分 $S = \int dt L$ であるので、作用の時間導関数はラグランジアン L そのものであり、

$$\frac{dS}{dt} = L$$

が成り立つ。一方、作用は前節で見たように一般化座標 q の関数でもあったので、時間に関する全微分は

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i\end{aligned}$$

と書き表わされる。ここで、(4.10) を用いた。こうして、 $\frac{dS}{dt} = L$ であることを用いて、上式は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= - \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \frac{dS}{dt} \right) \\ &= - \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L \right) \\ &= -H\end{aligned}$$

となる。ここで、ラグランジアン L とハミルトン関数 H の関係 (4.2) を用いた。まとめると、

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H \quad (4.11)$$

が得られる。すなわち、作用の時間偏微分はハミルトン関数 H に負号を付けたものを与える。

§§4.5.3 簡約化された作用

ラグランジアン L とハミルトン関数 H を結ぶ関係式 $L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H$ から、作用 S は

$$S = \int_{t_0}^t dt L = \int_{t_0}^t dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H \right)$$

と書ける。ハミルトン関数 $H(q, p, t)$ が時間に依存しないとき、 $H(q, p) = E = \text{定数}$ として、作用 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_{t_0}^t dt \sum_i p_i \dot{q}_i - E(t - t_0) \\ &\equiv S_0 - E(t - t_0)\end{aligned}$$

となる。ここで、 S_0 として

$$S_0 = \int_{t_0}^t dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \int p_i dq_i \quad (4.12)$$

と定義する。この S_0 を簡約化された作用と呼ぶ。

§ 4.6 ハミルトン・ヤコビ方程式

ハミルトン関数 $H(q, p, t)$ は一般化座標 q と一般化運動量 p 、及び時間 t の関数であるが、一般化運動量 p_i は作用を一般化座標で偏微分したものの $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ であることが前節で示された。従って、(4.11) 式は、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0 \quad (4.13)$$

と書き表される。これはハミルトン・ヤコビ方程式と呼ばれる。

ハミルトン・ヤコビ方程式が解ければ、運動は解けたことになる。一般的な方法を述べておこう。作用 S は s 個の一般化座標 q_i ($i = 1, 2, \dots, s$) と 1 個の時間 t の、あわせて $s + 1$ 個の変数を持つ関数である。ハミルトン・ヤコビ方程式はこの $s + 1$ 個の変数を持つ関数 S に対する 1 階偏微分方程式に他ならない。したがって、この方程式が解ければ $s + 1$ 個の積分定数 ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_0$) が出てくるはずである。ハミルトン・ヤコビ方程式は S 自身は含まず、 S の導関数のみ含んでいるので、方程式が解けた場合には積分定数のうちの一つは必ず加法的になっている。つまり、微分したら積分定数の内の一つは消える。したがって、解 S は、

$$S = S_{\text{sol}}(q_1, q_2, \dots, q_s, t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) + \alpha_0$$

という形を持つ。このとき、 $S_{\text{sol}}(q, \alpha)$ を、 q を一般化座標、 α を新しい運動量 P とする正準変換の母関数と考えよう。式 (4.9) では $F_2 = S_{\text{sol}}$ ということを意味する。こうして、(4.9) の (ii) から

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S_{\text{sol}}}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial S_{\text{sol}}}{\partial \alpha_i} (\equiv \beta_i), \\ H' &= H + \frac{\partial S_{\text{sol}}}{\partial t} (= 0) \end{aligned}$$

となる。第 3 式は、ハミルトン・ヤコビ方程式から零になる。新しい一般化座標 $Q_i (= \beta_i)$ と一般化運動量 $P_i (= \alpha_i)$ は、ハミルトン関数 H' が 0 であることから、時間発展しない $\left(-\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0\right)$ 。すなわち定数である。こうして、運動は解けたことになる。

§§4.6.1 振動

一様な重力場のもとに置かれた単振り子を考えよう。振り子の鉛直線からの角を θ 、振り子に付けられた質点の質量を m 、振り子の糸の長さを l 、重力加速度を g とし、位置エネルギーの基準を振り子の支点の高さに取ると、ラグランジュ関数 L は

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$$

で与えられる。ここで、 t を時間として $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}$ である。変数 θ に関する運動方程式 (オイラー・ラグランジュ方程式) は

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

となる。一般化運動量 p_θ は定義により

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$$

であるので、ハミルトン関数 $H(\theta, p_\theta)$ は

$$H(\theta, p_\theta) = p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$$

となる。ハミルトン関数 $H(\theta, p_\theta)$ に対して、ハミルトン・ヤコビ方程式を書こう。簡約化された作用を S_0 とし、 $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{dS_0}{d\theta}$ であるので、

$$\frac{1}{2ml^2} \left(\frac{dS_0}{d\theta} \right)^2 - mgl \cos \theta = E$$

となる。このハミルトンヤコビ方程式を解くと、 $S = S_0 - Et$ より

$$S = -Et \pm \sqrt{2ml^2} \int \sqrt{E + mgl \cos \theta} d\theta$$

と形式的に書ける。この S の両辺を E で微分すると、

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \sqrt{\frac{ml^2}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{E + mgl \cos \theta}}$$

となるが、左辺の $\frac{\partial S}{\partial E} \equiv \beta$ は、ハミルトン・ヤコビの一般論から定数であることがわかる。以下では、簡単のために複号 \pm を取っておこう。上の式は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{E}{mgl} + 1 \right) \equiv k^2, \quad \sin \frac{\theta}{2} \equiv k \sin \phi$$

とおくと、

$$t + \beta = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

と書き直される。右辺に現れた積分

$$F(\phi, k) \equiv \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \equiv u$$

は第1種の楕円積分と呼ばれる。逆にこれを $\sin \phi$ について解いたと考え、

$$\sin \phi = \text{sn}(u, k)$$

と書く。この $\text{sn}(u, k)$ をヤコビの楕円関数と呼ぶ。こうして、振動の運動方程式は

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \text{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} (t + \beta), k \right)$$

と楕円関数で表わされることになる。求めたいのは $\theta(t)$ であったことを思い出そう。この式により、 $\theta(t)$ は完全に解けており、解は逆三角関数と楕円関数で表わされることになる。4つ前の式と5つ前の式から、積分の上端が $\phi = \frac{\pi}{2}$ になったときに振れの角 θ は最大に達する ($\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \phi \rightarrow k$) ことがわかる。振り子の周期を T とすると、これは4分の1周期の時におきるので、4つ前の式から $t + \beta = 0$ で $\phi = 0$ 、 $t + \beta = \frac{T}{4}$ のときに $\phi = \frac{\pi}{2}$ として

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} \equiv 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$$

となる。ここで、

$$K(k) \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

は第1種の完全楕円積分と呼ばれる。この被積分関数を k が小さいとして展開してから積分する。ここで、振れの角の最大値を θ_0 として、 $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ であるので、 k が小さいと言うことは、振れの角の最大、すなわち振り子の振幅が小さいということである。積分を実行していくと、

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right)$$

となる。こうして、右辺の級数の第2項以降は振幅に関係した量 k の2乗またはそれ以上のべきに比例し、振幅が小さいときには無視して良い。こうして、振幅が小さい場合には、振り子の周期として

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

が得られる。これは、ガリレオ・ガリレイが発見したとされる振り子の等時性に他ならない。

§ 4.7 リュービルの定理

一般に、 n 変数の1階連立微分方程式系

$$\frac{d\xi_i}{dt} = P_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t) \tag{4.14}$$

があったとしよう。この方程式系が積分定数 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を用いて

$$\xi_i = \xi_i(a_1, a_2, \dots, a_n, t)$$

と解けたとする。このとき、次のヤコビ行列式

$$u(t) = \det \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} \right| = \sum_P (-)^P \frac{\partial \xi_1}{\partial a_{j_1}} \frac{\partial \xi_2}{\partial a_{j_2}} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial a_{j_n}}$$

について考察しよう。ここで、 (j_1, j_2, \dots, j_n) は $(1, 2, \dots, n)$ の互換であり、それを P で表している。和はすべての互換についてとり、偶置換では $(-)^P = 1$ 、奇置換では $(-)^P = -1$ である。最右辺は行列式の定義である。

今、ヤコビ行列式 u を変数 t で微分しよう。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \sum_P \sum_{k=1}^n (-)^P \frac{\partial \xi_1}{\partial a_{j_1}} \dots \frac{\partial \frac{d\xi_k}{dt}}{\partial a_{j_k}} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial a_{j_n}} \\ &= \sum_P \sum_{k=1}^n (-)^P \frac{\partial \xi_1}{\partial a_{j_1}} \dots \frac{\partial P_k}{\partial a_{j_k}} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial a_{j_n}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial \xi_l} \sum_P (-)^P \frac{\partial \xi_1}{\partial a_{j_1}} \dots \frac{\partial \xi_l}{\partial a_{j_k}} \dots \frac{\partial \xi_n}{\partial a_{j_n}} \end{aligned}$$

と計算できる。1行目から2行目へは(4.14)を用いた。最終行の置換 P についての和は行列式の定義になっているが、 $l \neq k$ では行または列に同じものが現れ、行列式は零となる。よって、 l についての和は $l = k$ のみが残る。こうして、 P についての和はヤコビ行列式 u に戻り、結局、

$$\frac{du(t)}{dt} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} \right) u(t) \quad (4.15)$$

が得られる。

このとき、(4.15)の右辺の括弧内が零であれば、 u は t に依らない定数となることがわかる。解を求めたときの積分定数 a_i を、 $t = 0$ での値 $a_i = \xi_i(t = 0)$ にとれば、ヤコビ行列式 u は $u(t = 0) = \det \frac{\partial \xi_i(t = 0)}{\partial \xi_j(t = 0)} = 1$ となり、 u が t に依らないことから、このときには、

$$u(t) = \det \left| \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial \xi_j(0)} \right| = 1 \quad (4.16)$$

が得られる。これをリュービルの定理と呼ぶ。

この定理を力学に適用しよう。ハミルトン方程式は1階の連立微分方程式系であり

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

であったので、リュービルの定理にあわせて

$$\begin{aligned} \xi_i &= q_i, & \xi_{s+i} &= p_i, & (i = 1, 2, \dots, s) \\ P_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & P_{s+i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, & (i = 1, 2, \dots, s) \end{aligned}$$

と書こう。このとき、 $n = 2s$ である。式(4.15)の括弧内は

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial P_k}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) = 0$$

より、ヤコビ行列式は定数1となる。ハミルトン形式では位置と運動量は対等に扱われているので、位置と運動量を纏めた空間 (q, p) を位相空間(相空間)[†]と呼ぼう。相空間の体積

$$\Gamma = \int \int \cdots \int dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s$$

を考える。これは時間発展とともに不変である。すなわち、

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int \int \cdots \int dq_1(t) dq_2(t) \cdots dq_s(t) dp_1(t) dp_2(t) \cdots dp_s(t) \\ &= \int \int \cdots \int \det \left| \frac{\partial \xi_i(t)}{\partial \xi_j(0)} \right| dq_1(0) dq_2(0) \cdots dq_s(0) dp_1(0) dp_2(0) \cdots dp_s(0) \\ &= \Gamma(0) \end{aligned}$$

となる。ここで、ヤコビ行列式が定数1であることを用いた。

さて、系の時間発展は正準変換として表すことができた。時間発展で相空間の体積素片が不変であるので、一般に正準変換のもとでも相空間の体積は不変であることが予想される。以下にこれを示そう。今、相空間の変数をまとめて、

$$\mathbf{a} \equiv (q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s)$$

[†]数学で言う topological space ではなく、物理学で用いる phase space のことであるが、訳語が同じになってしまうので、相空間と呼ぶことにする。

と記す。正準変換後は

$$\mathbf{A} \equiv (Q_1, Q_2, \dots, Q_s, P_1, P_2, \dots, P_s)$$

である。ハミルトン方程式は正準変換の下で不変であるので、

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{l=1}^{2s} J_{il} \frac{\partial H}{\partial a_l}, \quad \frac{dA_i}{dt} = \sum_{l=1}^{2s} J_{il} \frac{\partial H}{\partial A_l} \quad (4.17)$$

と書ける。ただし、 J_{il} として

$$J_{il} = \begin{cases} \delta_{i+s,l} & (i, l = 1, 2, \dots, s) \\ -\delta_{i,l-s} & (i, l = s+1, s+2, \dots, 2s) \end{cases}$$

である。このとき、(4.17) の第 2 式の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{dA_i}{dt} &= \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial a_j} \frac{da_j}{dt} \\ &= \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial a_j} \sum_k J_{jk} \frac{\partial H}{\partial a_k} = \sum_j \sum_k \frac{\partial A_i}{\partial a_j} J_{jk} \sum_l \frac{\partial H}{\partial A_l} \frac{\partial A_l}{\partial a_k} \\ &= \sum_l \left(\sum_j \sum_k \frac{\partial A_i}{\partial a_j} J_{jk} \frac{\partial A_l}{\partial a_k} \right) \frac{\partial H}{\partial A_l} \end{aligned}$$

となる。ここで、1 行目から 2 行目へはハミルトン方程式 (4.17) を用いている。これをハミルトン方程式 (4.17) の第 2 式と比較すると、

$$\sum_j \sum_k \frac{\partial A_i}{\partial a_j} J_{jk} \frac{\partial A_l}{\partial a_k} = J_{il}$$

が得られる。表記を簡単にするために、 $M_{ij} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial a_j}$ を導入すると、上式は

$$\sum_j \sum_k M_{ij} J_{jk} M_{lk} = J_{il}, \quad \text{または} \quad MJ {}^tM = J$$

と書ける。ここで、第 2 式は行列表記をした。 tM は行列 M の転置行列である。行列式をとると $\det M = \det {}^tM$ より、

$$(\det M)^2 = 1$$

が得られるが、恒等変換のときには明らかに $M = 1$ と単位行列になることから、上式から

$$\det M \left(= \det \left| \frac{\partial A_i}{\partial a_j} \right| \right) = 1$$

となる。こうして、正準変換前の相空間の体積 Γ と変換後の相空間の体積 Γ' は

$$\begin{aligned} \Gamma' &\equiv \int \int \cdots \int dQ_1 dQ_2 \cdots dQ_s dP_1 dP_2 \cdots dP_s \\ &= \int \int \cdots \int \det \left| \frac{\partial A_i}{\partial a_j} \right| dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s \\ &= \int \int \cdots \int dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s \\ &= \Gamma \end{aligned} \quad (4.18)$$

となり、正準変換の下で相空間の体積は不変であることが示される。これをリュービルの定理と呼ぶ。

5章 リュービルの定理から統計力学への道

本章では、しばらく、粒子が極めて多数存在する状況を扱う。そのため、一つ一つの粒子の運動を追う代わりに、多数の粒子について、物理量の統計平均を扱う。

§5.1 粒子の確率分布

§4.7において、位相空間の体積は、系の時間発展で不変であることを見た。この事実がリュービルの定理を構成している。

$$\Gamma(t) = \int \cdots \int dq_1 dq_2 \cdots dq_s dp_1 dp_2 \cdots dp_s \left(\equiv \int dqdp \right) = \Gamma(0) \quad (5.1)$$

今、 $2s$ 次元の位相空間を考え、位相空間の領域 $d\Gamma = dqdp$ に存在する粒子を考え、その確率密度分布を $\rho(q, p)$ としよう。位相空間の領域 $d\Gamma$ に存在する粒子の確率は

$$\rho(q, p) dqdp \quad (5.2)$$

で与えられる。粒子数は保存するので、位相空間上で、粒子の連続の方程式が成り立つべきである。位相空間での粒子数分布の速度は $v_i = \left(\frac{dq}{dt}, \frac{dp}{dt} \right)$ と書けるので、位相空間上での $2s$ 次元ベクトルの“発散”を div と書くと

$$\frac{\partial \rho(q, p)}{\partial t} + \text{div } j = 0 \quad (5.3)$$

が成り立つ。ここで、 $j_i = \rho v_i$ であり、発散は $\text{div } j = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial j_i}{\partial q_i} + \frac{\partial j_{i+s}}{\partial p_i} \right)$ と定義される。こうして、位相空間上での粒子数の保存則を示す連続の方程式 (5.3) は、確率密度分布 ρ が座標 q と運動量 p の関数であることに注意して

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho(q, p)}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\rho \frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\rho \frac{dp_i}{dt} \right) \right) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{dq_i}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{dp_i}{dt} \right) \right) + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

となる。ここで、正準方程式（ハミルトン方程式）

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.5)$$

を用いよう。ここで、 H は系のハミルトン関数である。このとき、(5.4) 式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (5.6)$$

と書ける。ここで、座標微分と運動量微分は交換すること、及びポアソン括弧の定義 (4.5) を用いることで、(5.6) 式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{ H, \rho \}_P \quad (5.7)$$

と纏められる。これは位相空間での粒子の確率分布関数が満たす方程式で、リュービル-フォン・ノイマン方程式と呼ばれる。

さて、確率分布関数の時間に関する完全導関数を導いてみよう。確率分布関数が座標 q と運動量 p を通しても時間に依存することに注意して

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial\rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \{ \rho, H \}_P \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

と示される。ここで、1行めから2行目へは正準方程式を用い、2行目から3行目へはポアソン括弧の定義を用いた。最後の等式は、リュービル-フォン・ノイマン方程式が満たされることから成り立つ。こうして、位相空間上での粒子の確率分布関数は時間に依存しないことが示された。したがって、(5.2) 式の粒子の存在確率は、リュービルの定理 (5.1) と、 ρ 自身が時間に依存しないことから、時間に依存しない定数と考えるよいことがわかる。

さて、 ρ は位相空間 (q, p) における粒子の確率分布関数であったので、全位相空間での積分は1に規格化されている。

$$\int \rho(q, p) dq dp = 1 \tag{5.9}$$

こうして、物理量 $f(q, p)$ の統計平均 \bar{f} は

$$\bar{f} \equiv \int f(q, p) \rho(q, p) dq dp \tag{5.10}$$

として与えられる。

ここからは、考えている全系 (1+2) を2つの部分系 (1) と (2) に分け、それぞれの部分系はエネルギーのみやり取りできるとしよう。[‡] 元の系を合成系として考えると、確率分布は $\rho_{(12)}(q, p) dq dp$ であるが、これを2つの部分系の言葉で表すと、

$$\rho_{(1+2)}(q, p) dq dp = \left(\rho_{(1)}(q^{(1)}, p^{(1)}) dq^{(1)} dp^{(1)} \right) \left(\rho_{(2)}(q^{(2)}, p^{(2)}) dq^{(2)} dp^{(2)} \right) \tag{5.11}$$

となる。よって、

$$\rho_{(1+2)} = \rho_{(1)} \rho_{(2)} \tag{5.12}$$

と、部分系の分布関数の積で表される。したがって、その対数をとると、

$$\ln \rho_{(1+2)} = \ln \rho_{(1)} + \ln \rho_{(2)} \tag{5.13}$$

と加法的に書ける。ここで、(5.8) より、全系の確率分布関数 $\rho_{(1+2)}$ は時間に依存しないことが示されている。したがって、 $\rho_{(1+2)}$ は時間に依存しない保存量の特殊な組み合わせで表されるべきである。有限の系を考えると、箱に閉じ込める状況を考慮すると、運動量や角運動量は良い保存量ではない。唯一残される保存量はエネルギー E である。エネルギーは加法的であるので、(5.13) の $\ln \rho$ が加法的であることから、

$$\ln \rho = \alpha + \beta E \tag{5.14}$$

[‡]粒子をやり取りできる場合は後に議論する。

と書けるだろう。ここで、 α 、 β はある定数である。こうして

$$\rho = Ce^{\beta E}, \quad (C = e^\alpha), \quad \text{ただし } E = H(q, p) \quad (5.15)$$

と表されることがわかる。 C は規格化 (5.9) から決まる定数である。ここで注意しておくべきは、部分系の $\rho_{(1)}$ や $\rho_{(2)}$ はもはや時間に対して不変ではないことである。エネルギーをやり取りできるので、(5.14) に現れる E は各部分系のエネルギー E_1 または E_2 であり、これら自身は保存しない。時間に依らず一定であるのは、その和、 $E = E_1 + E_2$ である。

次にエントロピーと呼ばれる量を導入しよう。位相空間の微小な体積 $\Delta q \Delta p$ を、粒子が取り得る状態数と考えよう。量子力学では取り得る量子状態の個数は勘定できるが、古典力学では位相空間の拡がりになってしまう。そこで、半古典論でのボーア・ゾンマーフェルトの条件を考慮し、[§] 1 自由度あたり、 $p_x dx$ は位相空間の面積 $2\pi\hbar$ の領域当たり n の状態数の存在に対応していると考えよう。今、 s 自由度であるので、量子論に対応する状態数 $\Delta\Gamma$ として

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s} \quad (5.16)$$

をとれば良い。こうして、系のエントロピー S を

$$S = k_B \ln \Delta\Gamma = k_B \ln \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s} \quad (5.17)$$

と導入しよう。ここで、 k_B はボルツマン定数と呼ばれる定数である。考えている部分系ではもはや ρ は時間に依らない一定量ではなく、それとともに位相空間の体積 $\Delta q \Delta p$ も時間に依存するようになるが、(5.2) から、部分系ではあっても $\rho \Delta q \Delta p$ は時間に依らない定数であった。したがって、(5.17) は

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln \frac{\Delta q \Delta p}{(2\pi\hbar)^s} \\ &= -k_B \ln \rho + (\text{定数}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

と表される。こうしてエントロピーは導入されるが、未知の定数項の為、古典論ではエントロピーの絶対値は決まらないことがわかる。

一般に、系が基底状態（エネルギー最低状態）にしか存在しないとき、(5.17) で定義されるエントロピー S は零になる。後に導入する絶対温度で絶対零度の時には系は基底状態にあるので、絶対零度でエントロピーは零である。これを熱力学第 3 法則と呼ぶ。これにより、古典論でもエントロピーの絶対値を求めることが出来る。

§ 5.2 エントロピー増大の法則と平衡状態

エントロピーの定義 (5.17) から、位相空間の体積 $\Delta\Gamma$ は

$$\Delta\Gamma = e^{\frac{1}{k_B} S} \quad (5.19)$$

となる。自然が進む方向は、位相空間の体積 $\Delta\Gamma$ が大きくなる方向である[¶]。系が取り得る状態数が多くなると言ってよい。自然は $\Delta\Gamma$ が大きくなる方向に進むということは、(5.18) から、エントロピー S が増大する方

[§] $\oint pdq = 2\pi\hbar n$ と “量子化” される。ここで、 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

[¶] 容器に満たされた水に、一滴、インクを垂らしたと考えればよい。容器の水を外界とする、部分系としてのインクの分子集団は、限られた運動量を持って狭い領域に留まっていることは無い。やがて、容器全体に拡がっていく。部分系の取り得る配位空間（通常の体積）が増加しているので、当然、位相空間は大きくなっている。逆に、拡がっていたインクの分子が狭い配位空間（狭い体積の領域）にひとりでに集積してくることは無い。

向ということである。系が時間発展する方向はエントロピーが増える方向であることを、エントロピー増大の法則と呼ぶ。また、熱力学第 2 法則の内容である。

多数の粒子からなる系が時間発展を行い、それ以上、見かけ上の巨視的な変化が起こらなくなったとき、系は平衡状態にあると呼ぼう。このとき、増大したエントロピーは最大の状態にあると言える^{||}。系を 2 つに分けて考えてみよう。確率密度関数 ρ はエネルギーの関数であったので、エントロピーもまたエネルギーの関数である。全体系のエントロピー S は、部分系 1 と 2 のエントロピーの和 $S = S_1 + S_2$ であることは (5.13) と (5.18) から明らかである。部分系のエネルギーをそれぞれ E_1 、 E_2 とすると、全系のエネルギー $E = E_1 + E_2$ は一定であり、 E_1 または E_2 で特徴づけられるので、 $E_2 = E - E_1$ を考慮すると、 $S(E) = S_1(E_1) + S_2(E_2)$ であるが、全系のエネルギー E は一定で固定されているとすると、すべて E_1 の関数と考えると

$$S(E_1) = S_1(E_1) + S_2(E_2 = E - E_1) \quad (5.20)$$

と表される。ここで、全系は平衡状態にあり、エントロピーは最大化されているとしよう。このとき、エネルギー E_1 の変化によっても全系は変化しないので、

$$\frac{dS(E_1)}{dE_1} = \frac{dS_1(E_1)}{dE_1} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dE_1} = 0 \quad (5.21)$$

であるが、中辺第 2 項は $\frac{dE_2}{dE_1} = -1$ であることに注意すると、上式は

$$\frac{dS_1(E_1)}{dE_1} = \frac{dS_2(E_2)}{dE_2} \quad (5.22)$$

となる。こうして、平衡で等しい量として絶対温度 T を導入しよう。

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T} \quad (5.23)$$

エントロピーが最大になり、部分系 1 と 2 が平衡にある時、(5.22) と温度の定義 (5.23) から

$$T_1 = T_2 \quad (5.24)$$

が成り立つ。

今、絶対温度をエントロピーのエネルギー変化率の逆数で導入した。互いに平衡にない部分系 1、2 を考えると、全系のエントロピーは未だ増大している。すなわち $\frac{dS}{dt} > 0$ である。ここで、 t は時間である。全系のエネルギー E は一定であるとして、こうして、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} = \frac{dS_1}{dE_1} \frac{dE_1}{dt} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dt} \\ &= \frac{dS_1}{dE_1} \frac{dE_1}{dt} + \frac{dS_2}{dE_2} \frac{dE_2}{dE_1} \frac{dE_1}{dt} = \left(\frac{dS_1}{dE_1} - \frac{dS_2}{dE_2} \right) \frac{dE_1}{dt} \\ &= \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \frac{dE_1}{dt} \\ &> 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

が得られる。ここで、物体 2 の方が物体 1 より温度が高い ($T_2 > T_1$ 、すなわち $\frac{1}{T_1} > \frac{1}{T_2}$) としよう。このとき、(5.25) より、 $\frac{dE_1}{dt} > 0$ が得られる。こうして、エネルギーは高温の物体 2 から低温の物体 1 へ時間とともに流れていくことが理解される。

^{||}宇宙全体を考えると、エントロピー増大の法則から宇宙は平衡状態にあり、何ら変化を起こさなくなると考えるかもしれない(宇宙の熱的死と呼ばれる)。しかしながら、一般相対論のところで見たように、宇宙論的に考えると、重力場は時空の計量を決めるので、物体が置かれている外的条件としての時空間の計量は本質的に時間に依存し、宇宙膨張、あるいは重力による宇宙の収縮等、平衡に成り得ない。

§ 5.3 熱力学第 1 法則

系のエネルギーの時間変化があるパラメータ λ で決定されているとしよう。エネルギー E の時間変化は、パラメータ λ で支配されているので、

$$\frac{dE(\lambda)}{dt} = \frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad (5.26)$$

となる。統計平均を考え、物理量 A の統計平均を \bar{A} で表すことにする。統計平均と時間微分の操作は可換であるので

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\overline{E(\lambda)}}{dt} = \overline{\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}} \quad (5.27)$$

となる。一方、系のエネルギーはパラメータ λ とエントロピー S の関数であるとみると、エントロピー一定の条件では

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \right)_S \frac{d\lambda}{dt} \quad (5.28)$$

と書ける。ここで、微分の下付き添え字 S は、変数 S を一定にとって λ で微分することを意味する。こうして、エントロピー一定の過程では

$$\overline{\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda}} = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda} \right)_S \quad (5.29)$$

となる。エントロピー一定で変化する過程を断熱過程と呼ぶ。

さて、ポテンシャル・エネルギーの座標微分に負号を付けたものが力であった。位置 \mathbf{r} に働く力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.30)$$

であるが、(5.29) から、多粒子系での平均の力 $\bar{\mathbf{F}}$ は

$$\bar{\mathbf{F}} = -\overline{\frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}} = -\left(\frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} \right)_S = -\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.31)$$

と表される。ここで、 V は考えている系の体積である。体積を位置 \mathbf{r} で微分したものは、位置ベクトル \mathbf{r} に垂直な平面の面積素片 ds に他ならない。ここに、 ds は、大きさが面積素片、方向は面積素片に垂直な \mathbf{r} 方向を向くベクトルである。こうして、(5.31) は

$$\bar{\mathbf{F}} = -\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S ds \quad (5.32)$$

と書ける。単位面積あたりに働く力は圧力であったので、単位面積に働く圧力の大きさ P は

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \quad (5.33)$$

と得られる。

さて、系のエネルギー E が、エントロピー S と体積 V の関数と考えよう。エネルギーの体積微分は (5.33) で与えられており、エントロピー微分は (5.23) の逆から

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_V = T \quad (5.34)$$

と得られる。こうして、

$$dE = TdS - PdV \quad (5.35)$$

が成り立つことがわかる。これは熱力学第1法則として知られる関係式である。

さて、(5.31)式に戻ってみよう。物体に働く力によって物体が $d\mathbf{r}$ の方向に体積 dV だけ膨張した時、物体は外に仕事をしている。従って、物体がした仕事は

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{r} &= - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_S \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= PdV \end{aligned} \quad (5.36)$$

と書ける。逆に、これに負号をつけると、物体がされた仕事になる。すなわち、物体は

$$dW = -PdV \quad (5.37)$$

の仕事 dW をされている。 dW の仕事により、系のエネルギーは dE だけ増加するはずである。これが、(5.35)の右辺第2項の意味合いである。では、第1項 TdS は何であろうか。これは、直接外界から系へエネルギーが流入している効果であると考えられる。物体が接触している他の物体から直接エネルギーをやりとりする。このエネルギーの移動形態を熱と呼ぶ。従って、系に流入した熱 dQ は

$$dQ = TdS \quad (5.38)$$

と書ける。こうして、熱力学第1法則 (5.35) は

$$\begin{aligned} dE &= dQ + dW, \\ \text{ただし } dQ &= TdS, \quad dW = -PdV \end{aligned} \quad (5.39)$$

とも表現される。こうして、熱力学第1法則は、外から為された仕事 dW と、外から移動してきた熱 dQ により、系のエネルギーは dE だけ増加することを示している。従って、ここで考えているエネルギー E は静止した系のもつエネルギーであり、系全体の並進や回転運動のエネルギーは除く。系が持つ固有のエネルギーを内部エネルギーと呼ぶ。

§ 5.4 カノニカル分布

前章で得られた (5.23) の温度の定義と、エントロピーの定義を用いると

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} = -k_B \beta \quad (5.40)$$

となるので、係数 β が $\beta = -\frac{1}{k_B T}$ と得られる。こうして、(5.15) は

$$\rho(E) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad (5.41)$$

ときまる。ここで、 $Z^{-1} = C (= e^\alpha)$ は、確率の和が 1 であること、すなわち $\sum_n w(E_n) = 1$ または (5.9) により決定される。

$$Z = \int \frac{dqdp}{(2\pi\hbar)^s} e^{-\frac{H(q,p)}{k_B T}} \quad (5.42)$$

導出から明確であるように、全系を部分系と外界(熱浴と呼ばれる)に分け、部分系に着目して得られたものであり、着目する(部分)系は外界とエネルギーのやり取りをする。この下で得られた分布をカノニカル分布、または正準分布と呼ぶ。また、ギブス分布とも呼ばれる。また、 Z は分配関数と呼ばれ、カノニカル分布のすべての情報を含んでいる。

§ 5.5 マクスウェル分布

粒子のエネルギーは、各粒子の運動エネルギー $K(p)$ とポテンシャルエネルギー $U(q)$ の和で表される。こうして、正準分布関数 $\rho(q,p)$ から、位相空間での確率分布は

$$dw = \frac{1}{Z} e^{-\frac{K(p)+U(q)}{k_B T}} \quad (5.43)$$

となる。ここで、一つの粒子に着目し、その運動量分布のみ考えよう。考えている粒子の運動エネルギーを残し、他の粒子の運動量及び、すべての座標について積分した量を考える。

$$\begin{aligned} dw_v &= \frac{1}{Z} \int \dots \int e^{-\frac{K(p) - \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2}{k_B T}} e^{-\frac{U(q)}{k_B T}} e^{-\frac{\mathbf{p}^2}{k_B T}} dqdp \\ &= A e^{-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \end{aligned} \quad (5.44)$$

ここで、着目している粒子の運動量 \mathbf{p} を残して、すべて積分した。新たに記述した定数 A は、確率が 1 となるように決める。*

$$\begin{aligned} 1 &= \int \int \int dw_v dv_x dv_y dv_z = A \left(\frac{2\pi k_B T}{m} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ \text{すなわち} \quad dw_v &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \end{aligned} \quad (5.45)$$

これは粒子の速度分布を決める確率分布関数であり、この分布をマクスウェル分布と呼ぶ。

**積分として

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{3}{4\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

が得られる。第 2、3 番目は第 1 番目の積分式を α で微分していけば得られる。

粒子の運動エネルギーの平均値を考えてみよう。確率分布が (5.45) で与えられたので、ある方向 (x 方向としよう) の運動エネルギーの平均は

$$\overline{\frac{1}{2}mv_x^2} = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}} dv_x = \frac{1}{2}k_B T \quad (5.46)$$

と得られる。他の方向も同じである。すなわち、1 自由度あたり同じエネルギー $\frac{1}{2}k_B T$ が分配されているといえる。この事実はエネルギー等分配則と呼ばれる。粒子の運動エネルギーの平均は 3 方向あわせて $\frac{3}{2}k_B T$ となる。したがって、相互作用の無い ($U(q) = 0$) 自由粒子の集団の場合、系の温度を単位温度 (1K と呼ぶ) 上昇させるのに必要なエネルギー C は

$$C = \frac{dE}{dT} = N \cdot \frac{3}{2}k_B \quad (5.47)$$

となる。ここで、 N は全粒子数である。

§ 5.6 ボルツマン分布

系の粒子の確率分布が古典的なカノニカル分布であるとしよう。エネルギー E_k を持つ粒子の平均数 n_k は、当然その存在確率に比例するので、

$$n_k = n e^{-\frac{E_k}{k_B T}} \quad (5.48)$$

と書ける。ここで、 n は全粒子数が N であることから決まる定数である。今、カノニカル分布で運動量積分を実行し、さらに注目している粒子以外の座標積分も実行したとしよう。注目している粒子のポテンシャルエネルギーを $u(x, y, z)$ とすると、粒子が位置 (x, y, z) にある確率 $dw_{\mathbf{r}}$ は、確率の和を 1 とするための係数を a として、

$$dw_{\mathbf{r}} = a e^{-\frac{u(x, y, z)}{k_B T}} dx dy dz \quad (5.49)$$

とかけるので、体積素片 $dV = dx dy dz$ にある粒子数 $n(x, y, z)$ は

$$n(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{u(x, y, z)}{k_B T}} \quad (5.50)$$

と書ける。この粒子分布をボルツマン分布と呼ぶ。

例えば、地表面で鉛直上向きに z 軸をとると、質量 m の粒子に働く重力によるポテンシャルエネルギーは、重力加速度を g とし、地表面をエネルギーの基準面にとると $u(x, y, z) = mgz$ であるので、地表面での粒子密度を n_0 とし、

$$n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}} \quad (5.51)$$

と表されることがわかる。地表面付近での空気分子の粒子は (5.51) に従い分布する。上空に行くほど分子数は少なくなることがわかる。

6章 物質粒子の波動性—量子力学—

第1章では、物質粒子には波動性が伴うことを主張した。電子による二重スリットの実験結果から、物質粒子に伴う波は、粒子を見いだす確率密度を表すものであることを述べた。この波動の伝搬を表すファインマンの径路積分を導いたが、そこに現れる作用 S が決まらないので、第2章で粒子の古典軌道運動を頼りに作用を決めることになった。

ここでは、粒子の波動性については話の本流から離れてしまったので、本章では再び粒子の波動性に焦点を当てて、粒子に伴う確率波が従う方程式を導くことにする。また、導かれた波の方程式から、どのように古典運動と対応関係が存在するかを、“ファインマンの径路積分での作用が最小となる径路”という以外の対応関係を見ておこう。

§6.1 アインシュタイン・ドブロイの関係

簡単のために1次元の古典運動を考えよう。ハミルトン関数 H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

と書ける。ハミルトン・ヤコビ方程式は

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

である。今、ハミルトン関数は時間をあからさまに含まないで、エネルギーは保存される。系のエネルギーを E として、 $H = E$ より、ハミルトン・ヤコビ方程式と一般化運動量 p は

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= -E, \\ \frac{\partial S}{\partial q} &= p = \sqrt{2m(E - V(q))} \end{aligned}$$

となる。以上より、作用 S は

$$S(q, t) = -Et + \int dq \sqrt{2m(E - V(q))}$$

と得られる。

自由粒子のときには、相互作用ポテンシャル $V(q)$ は0である。このときには運動量 p も保存量であり、積分は実行でき、

$$\begin{aligned} S(q, t) &= -Et + q\sqrt{2mE} \\ &= -Et + pq \end{aligned}$$

と得られる。ここで、 $p = \sqrt{2mE}$ である。

ここまでは、古典運動を考えていただけであるが、1章に立ち返り、粒子に伴う確率波の伝搬を考えよう。我々は、自由粒子の場合には、確率波の伝搬に必要な作用 S をすでに手にしている。初期には $t_0 = 0$ 、 $q_0 = 0$ とし、 $q = x$ と記すと、ファインマンの径路積分は

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \int \mathcal{D}[x(t)] K(x, 0; t, 0) \psi(0, 0), \\ K(x, 0; t, 0) &= \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t)} = \mathcal{N} e^{-\frac{i}{\hbar} (Et - px)} \end{aligned}$$

となる。従って、“波” $\psi(x, t)$ は平面波

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$$

のように振る舞う。

一方、一般の波動現象では、代表的な正弦波では、

$$\sin(\omega t - kx) = \sin\left(2\pi\nu t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

の様に記述される。ここで、 ω は角振動数、 ν は振動数、 k は波数、 λ は波長であり、各々

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

という関係がある。ここで、 T は周期である。数学的には、 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の関係があるので、複素数の波 $e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}$ も同じ角振動数、波数を持つ正弦波の重ね合わせで書かれている。従って、粒子に伴う確率波を、通常の角振動数、波数を持つ波で表せば、

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} = e^{-i(\omega t - kx)}$$

と書かれるべきものである。両辺を見比べると、粒子のエネルギー E 、運動量 p と、波の角振動数 ω 、波数 k の間に、次の関係が存在することがわかる。

$$\begin{aligned} E &= \hbar\omega (= h\nu), \\ p &= \hbar k \left(= \frac{h}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここで、 $h \equiv 2\pi\hbar$ と定義した。関係 (6.1) を、アインシュタイン・ド・ブロイの関係と呼ぶ。定数 h をプランク定数と呼ぶ。これを 2π で割った \hbar がよく使われる。

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0545716 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

§ 6.2 シュレーディンガー方程式

粒子に伴う波の伝搬を記述するために、ホイヘンスの原理に基づき、(1.1)、(1.2) 式から出発した。再掲しておこう。

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t + dt) &= \int d^3\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt) \psi(\mathbf{r}', t), \\ K(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; dt) &= \mathcal{N} e^{iS(\mathbf{r}, \mathbf{r}', dt)/\hbar} \end{aligned} \quad (6.2)$$

確率波を扱うだけでは作用 S は決まらなかったが、空間の一様・等方性、時間の一様性、ガリレイの相対性原理から決定された。時間間隔 dt は微少であるので、作用 S は

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{r}', dt) = \int dt L \sim Ldt = \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{dt} \right)^2 - V(\mathbf{r}) \right) dt$$

となる。ここで、速度ベクトルは 2 点間の位置ベクトルの差 $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ を、要した時間 dt で割ったものであり、また、時間間隔 dt が微少であることから位置エネルギー V の引き数は \mathbf{r} を採用した。こうして、確率波の時間発展 (6.2) 式は

$$\psi(\mathbf{r}, t + dt) = \mathcal{N} \int d^3\mathbf{r}' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2dt} - V(\mathbf{r})dt \right)\right) \psi(\mathbf{r}', t) \quad (6.3)$$

となる。以下では計算を簡単化するために、1次元で考え、 \mathbf{r} を x と記すことにする。

$$\psi(x, t + dt) = \mathcal{N} \int dx' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x-x')^2}{2dt} - V(x)dt\right)\right) \psi(x', t) \quad (6.4)$$

右辺の被積分関数中の $\psi(x', t)$ を x の周りで展開すると

$$\psi(x', t) = \psi(x, t) + \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial x}(x' - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2}(x' - x)^2 + \dots$$

となる。この展開式を (6.4) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \psi(x, t + dt) &= \mathcal{N} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m(x-x')^2}{2dt} - V(x)dt\right)\right) \\ &\quad \times \left(\psi(x, t) + \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial x}(x' - x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2}(x' - x)^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

と書けるが、ガウス・フレネル積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{i\alpha z^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$\text{すなわち} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{i\frac{m}{2\hbar dt}(x-x')^2} = \sqrt{\frac{\pi\hbar 2dt}{m}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx' (x-x')^2 e^{i\frac{m}{2\hbar dt}(x-x')^2} = i\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\hbar 2dt}{m}\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{および} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx' (x-x') e^{i\frac{m}{2\hbar dt}(x-x')^2} = 0,$$

を用いれば、時刻 $t + dt$ での波 $\psi(x, t + dt)$ は

$$\psi(x, t + dt) = \psi(x, t) e^{-\frac{i}{\hbar} V(x)dt} + \frac{1}{2} i \frac{1}{2} \left(\frac{2\hbar dt}{m}\right) \frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} e^{-\frac{i}{\hbar} V(x)dt} + \dots$$

と書ける。ここで、 $dt \rightarrow 0$ で左辺と右辺が一致するように、規格化因子 \mathcal{N} として $\mathcal{N} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar dt}}$ ととった。

さらに、 dt が微少であることから、 $e^{-\frac{i}{\hbar} V(x)dt} = 1 - \frac{i}{\hbar} V(x)dt + \dots$ と展開し、後で $dt \rightarrow 0$ の極限操作をすることをあらかじめ考慮して、 dt^2 以上の微少量を無視すると、

$$\psi(x, t + dt) = \psi(x, t) - \psi(x, t) \frac{i}{\hbar} V(x)dt + i\hbar \frac{1}{2m} \frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2} dt + \dots$$

となる。微分の定義 $\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\psi(x, t + dt) - \psi(x, t)}{dt}$ を思い出すと、上式で両辺 dt で割ってから $dt \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} V(x)\psi(x, t) + i\hbar \frac{1}{2m} \frac{\partial^2\psi(x, t)}{\partial x^2}$$

となる。ここまでは、空間1次元として考えてきたが、3次元空間に戻すと $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ のところが、

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \longrightarrow \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と、ラプラシアンに変わる。こうして、物質粒子に伴う確率波の従う方程式が得られる。

$$i\hbar \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.5)$$

波動性を決定するこの方程式はシュレーディンガー方程式とよばれ、確率波 $\psi(\mathbf{r}, t)$ は波動関数と呼ばれる。

自由粒子では、相互作用のポテンシャル関数 $V(\mathbf{r}) = 0$ であるので、シュレーディンガー方程式の解として、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

が得られる。ここで、 A は方程式だけでは決まらない定数である。これは §5.1 での平面波であり、自由粒子では確かに平面波として波は伝搬していくことがわかる。この解を用いると、たとえば、ベクトル \mathbf{p} の x 成分を p_x などとして

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{r}, t) = p_x \psi(\mathbf{r}, t), \quad \text{すなわち} \quad -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p} \psi(\mathbf{r}, t)$$

となっている。§5.1 で記述したように、平面波の \mathbf{p} は粒子の運動量に対応していたので、古典力学での運動量 \mathbf{p} は、演算子 $\hat{\mathbf{p}} \equiv -i\hbar \nabla$ に置き換わったとも言える。こうして、シュレーディンガー方程式 (6.5) は、

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t), \\ \hat{H} &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \\ \hat{\mathbf{p}} &= -i\hbar \nabla \left(= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

こうして、 $\hat{\mathbf{p}}$ は運動量演算子と呼ばれ、 \hat{H} は古典力学のハミルトン関数と形式的に同じ形を持つことになるので、演算子 \hat{H} をハミルトニアンと呼ぶ。

ポテンシャル関数 $V(\mathbf{r})$ が零でない場合でも、系のエネルギーは確定した値を持つことが多い。このときには、シュレーディンガー方程式 (6.6) の解を $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r})$ として時間に依存する部分と座標に依存する部分に変数分離し、シュレーディンガー方程式に代入することにより、

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\mathbf{r}), \\ \hat{H} \psi(\mathbf{r}) &= E \psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

という第 2 の式が得られる。これを時間に依存しないシュレーディンガー方程式、または単にシュレーディンガー方程式とよぶ。

粒子の波動性が顕著に現れる物理現象では、作用を最小にする古典軌道を考えているだけでは不十分であり、相互作用の場 $V(\mathbf{r})$ のもとでシュレーディンガー方程式を解いて系を記述することが必要となる。これに関しては第 4 部で詳述しよう。

§6.3 重ね合わせの原理

第 1 章において、系の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ の絶対値の 2 乗は、時刻 t に位置 \mathbf{r} に粒子を見出す確率密度を表すと考えることが、電子の 2 重スリットの実験結果を理解する上で必要な解釈であることを述べた。系の波動性は波動関数 ψ で表わされることになり、系の状態は波動関数で決定される。古典物理学では系の状態は物理量の組によって決定され、その時間発展は物理量自身の時間発展を考えることで決定された。すなわち、古典物理学では系の状態と物理量は不可分のものであった。ところが、粒子の波動性をも対象にする量子物理学では、系の状態は波動関数で記述されるが、物理量は演算子となっており、状態と物理量は分離される。

例えば平面波 $\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{-i(Et - \mathbf{P} \cdot \mathbf{r})/\hbar}$ に対して、物理量としての運動量は、運動量演算子 $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ である。では、系の状態からいかにして物理量を引き出すのだろうか。数学的には、状態関数である波動関数に物理量である演算子を作用させることで、数値としての物理量を得ることになる。平面波と運動量の例では

$$\hat{\mathbf{p}} \psi(\mathbf{r}, t) = -i\hbar \nabla Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{P} \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{p} \psi(\mathbf{r}, t)$$

となる。

一般に、状態関数としての波動関数 $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ に、物理量 \hat{A} を作用させたとき、結果 a_n が得られたとする。このとき、

$$\hat{A}\psi_n(\mathbf{r}, t) = a_n\psi_n(\mathbf{r}, t)$$

となるであろう。このとき、 a_n を物理量 \hat{A} に対する固有値、 $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ を \hat{A} に対する固有関数と呼ぶ。この操作は、物理的には、系の状態 ψ_n に対して物理量 \hat{A} の測定を行った結果、測定値 a_n が得られ、かつ系の状態は変化しなかったことを意味しており、測定過程を数学的にあらわしたものと考えられる (図 11)。

シュレーディンガー方程式は波動関数 ψ に対して線形な微分方程式であるので、波動関数 ψ_1, ψ_2 がともにシュレーディンガー方程式の解

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \hat{H}\psi_1, \quad i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \hat{H}\psi_2$$

であるなら、 c_1, c_2 を定数として $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ もまた同じシュレーディンガー方程式の解である。これを重ね合わせの原理と呼ぶ。一般に、任意の波動関数は、ある演算子の固有関数の重ね合わせで書ける。すなわち、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n(t)\psi_n(\mathbf{r}) \tag{6.8}$$

もちろん、固有関数の指標 n が連続量である場合には、 n についての和は積分に置き換わる。たとえば、運動量演算子の固有関数である平面波を ψ_n とする場合には、 $n \rightarrow \mathbf{p}$ となり、

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \iiint d^3\mathbf{p} c_{\mathbf{p}}(t)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

と表わされる。これは数学的には \mathbf{r} から \mathbf{p} へのフーリエ変換に他ならない。

§ 6.4 波動関数の確率解釈

§§6.4.1 波動関数の確率解釈

波動関数が (6.8) のように、演算子 \hat{A} の固有状態の重ね合わせで書かれているときには、物理量 \hat{A} の確定値を与えることはできない。実際

$$\hat{A}\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n c_n(t)\hat{A}\psi_n(\mathbf{r}) = \sum_n a_n c_n(t)\psi_n(\mathbf{r}) \neq A\psi(\mathbf{r}, t)$$

であり、もとの状態 ψ に比例しない。この状態関数 ψ には、固有値 a_n を与える固有状態 ψ_n が複数の n について混じっている。では、この状態関数 ψ はどのように解釈されるべきであろうか。

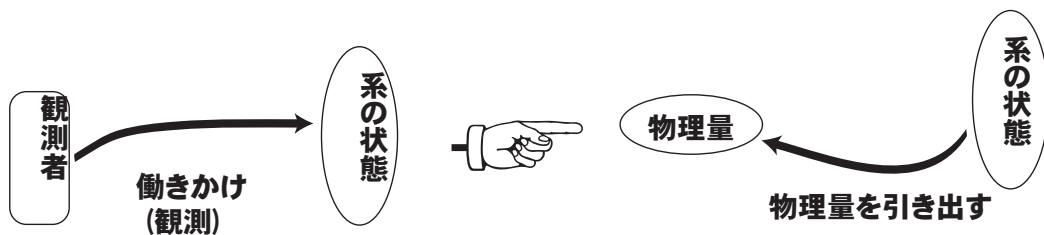


図 11:

波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は粒子を \mathbf{r} の位置に見いだす確率密度であったことを思い起こそう。粒子を確実に位置 \mathbf{r}_0 に見いだす “位置の固有状態” は

$$\hat{\mathbf{r}}\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_0\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$$

という固有値方程式を満たすべきである。この解は

$$\psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

である。ここで右辺の $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ はディラックのデルタ関数と呼ばれ、

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = 1, \quad x\delta(x) = 0$$

を満たす。よって、任意の波動関数は

$$\psi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}_0 c_{\mathbf{r}_0} \psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r})$$

と重ね合わせで書けるはずであるが、 $\psi_{\mathbf{r}_0}$ として上式のデルタ関数を代入して積分を実行すると、展開係数 $c_{\mathbf{r}_0}$ は

$$c_{\mathbf{r}} = \psi(\mathbf{r})$$

となる。こうして、 $|c_{\mathbf{r}}|^2$ は $|\psi(\mathbf{r})|^2$ と一致し、位置の固有関数で波動関数を展開した場合の展開係数の絶対値の2乗は、位置 \mathbf{r} に粒子を見いだす確率密度に一致することがわかる。言い換えれば、 $|c_{\mathbf{r}}|^2$ は状態が位置の固有状態 $\psi_{\mathbf{r}}$ である確率を表していると言って良い。

こうして、一般に、展開係数 c_n の絶対値の2乗、 $|c_n|^2$ は、ある物理量 \hat{A} の固有状態 ψ_n に系の状態を見いだす確率を表していると考えられる。

§§6.4.2 物理量とエルミート演算子

観測される物理量は実数であるから、固有値方程式 $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$ の両辺を転置して複素共役をとると

$$\psi_n^* \hat{A}^\dagger = a_n \psi_n^*$$

が得られる。ここで、 $\hat{A}^\dagger \equiv {}^t\hat{A}^*$ は \hat{A} のエルミート共役である。両辺に右から ψ_n を掛けてから積分すると

$$\int d^3\mathbf{r} \psi_n^* \hat{A}^\dagger \psi_n = a_n \int d^3\mathbf{r} \psi_n^* \psi_n = a_n$$

となる。ここで、全空間にわたって粒子を見いだす確率は1であるので、 $\int d^3\mathbf{r} \psi_n^* \psi_n (= \int d^3\mathbf{r} |\psi_n(\mathbf{r})|^2) = 1$ を用いた。一方、もとの固有値方程式 $\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n$ に左から ψ_n^* を掛けてから積分すると

$$\int d^3\mathbf{r} \psi_n^* \hat{A} \psi_n = a_n \int d^3\mathbf{r} \psi_n^* \psi_n = a_n$$

が得られる。ともに右辺は a_n であるので、固有値が実数であるという条件から、物理量を表す演算子 \hat{A} に条件がついて、

$$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$$

となる。すなわち、演算子 \hat{A} は自己共役である。この性質を持つ演算子のことをエルミート演算子と呼ぶ。さて、物理量 \hat{A} に対し、異なる固有値を与える固有状態 ψ_n 、 ψ_m があったとしよう。

$$\hat{A}\psi_n = a_n\psi_n, \quad \hat{A}\psi_m = a_m\psi_m, \quad a_n \neq a_m \text{ for } n \neq m$$

このとき、第1式に左から ψ_m^* を掛け、第2式のエルミート共役な式に右から ψ_n を掛けてそれぞれ積分すると

$$\int d^3\mathbf{r}\psi_m^*\hat{A}\psi_n = a_n \int d^3\mathbf{r}\psi_m^*\psi_n, \quad \int d^3\mathbf{r}\psi_m^*\hat{A}^\dagger\psi_n = a_m \int d^3\mathbf{r}\psi_m^*\psi_n$$

が得られる。第2式で \hat{A} がエルミート演算子である ($\hat{A} = \hat{A}^\dagger$) ことを用い、辺々引き算すると

$$0 = (a_n - a_m) \int d^3\mathbf{r}\psi_m^*\psi_n$$

が得られる。ここで、 $n \neq m$ のときに $a_n \neq a_m$ であることと、 $n = m$ では波動関数の確率解釈から全空間にわたっての波動関数の絶対値の2乗の積分は1であることから、

$$\int d^3\mathbf{r}\psi_m^*(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases} \quad (6.9)$$

と書ける。これを波動関数の規格直交性と呼ぶ。

§§6.4.3 物理量の期待値

ある物理量の固有状態が重ね合わされた波動関数は、その物理量が確定した値を持たないことがわかった。したがって、この状態に対しては、測定毎に違う観測値 a_n が、確率 $|c_n|^2$ で得られることになる。どの固有値 a_n を得るかは確率的 ($|c_n|^2$) である。ここで、次の量を考えてみる。

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &\equiv \int d^3\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{A}\psi(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}\psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{A} \sum_n c_n(t)\psi_n(\mathbf{r}) \\ &= \int d^3\mathbf{r} \sum_m c_m^*(t)\psi_m^*(\mathbf{r}) \cdot \sum_n c_n a_n(t)\psi_n(\mathbf{r}) \\ &= \sum_m \sum_n a_n c_m^*(t)c_n(t) \int d^3\mathbf{r}\psi_m^*(\mathbf{r})\psi_n(\mathbf{r}) \\ &= \sum_n a_n |c_n(t)|^2 \end{aligned}$$

ここで、3行目から4行目へは波動関数の規格直交性を用いた。最終行は、固有値 a_n を、その固有値が得られる確率 $|c_n|^2$ で重みを付けて全ての n について和をとったものである。物理量 \hat{A} の期待値である。こうして、1行目の定義である、物理量 \hat{A} を波動関数（とその複素共役）で挟んで積分した量は、その物理量の期待値を表すことがわかる。

§§6.4.4 確率の流れの密度と確率の保存

ある領域 V 中に粒子を見いだす確率は、 $\int_V d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ である。もちろん V として全空間をとれば積分は 1 に帰着する。時間微分を考えよう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 &= \int_V d^3\mathbf{r} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \cdot \psi + \psi^* \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_V d^3\mathbf{r} \left\{ \left(\hat{H}^* \psi^*(\mathbf{r}, t) \right) \psi(\mathbf{r}, t) - \left(\psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \right) \right\} \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_V d^3\mathbf{r} \left\{ \psi(\mathbf{r}, t) \hat{H} \psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t) \hat{H} \psi(\mathbf{r}, t) \right\} \\ &= \frac{i}{\hbar} \int_V d^3\mathbf{r} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \right] \end{aligned}$$

ここで、2番目の等式へはシュレーディンガー方程式を用い、3番目の等式へはハミルトニアン \hat{H} がエルミート^{††}であることを使った。最後の等式は、

$$\hat{H} \equiv \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r})$$

より得られる式

$$\begin{aligned} \psi \hat{H} \psi^* - \psi^* \hat{H} \psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi \nabla^2 \psi^* - \psi^* \nabla^2 \psi) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \end{aligned}$$

より示される。以上をまとめて、

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = - \int_V d^3\mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{j} = - \int_S dS \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$$

ここで、

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \tag{6.10}$$

を定義した。これを確率の流れの密度と呼ぶ。任意の V について成り立つので

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0 \\ \mathbf{j} &= \frac{i\hbar}{2m} [\psi(\mathbf{r}, t) \nabla \psi^*(\mathbf{r}, t) - \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \end{aligned} \tag{6.11}$$

この式は、確率密度 $|\psi|^2$ に対する連続の方程式であり、確率の保存を意味している。

簡単な例を挙げておこう。自由粒子の場合、波動関数は $\psi(\mathbf{r}, t) = N \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \right]$ となっていた。このとき、確率の流れの密度 \mathbf{j} は、

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{p}}{m} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = (\text{速度}) \times (\text{確率密度})$$

と表されることがわかる。

^{††}すなわち、 $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ 、今の場 $\rightarrow \hat{H}^* = {}^t \hat{H}^\dagger = {}^t \hat{H}$ 。

§ 6.5 古典力学との対応

§§6.5.1 エーレンフェスト (Ehrenfest) の定理

粒子に伴う波動性について吟味してきたが、今一度、古典論との対応を考察しておこう。もちろん、ファインマンの径路積分に立ち返り、作用が最小となる軌道が実現する古典軌道ではあるが、本節では別の見方について考察する。

古典論では実現する軌道の運動方程式が基本となっている。ここでは、ニュートン方程式を考えよう。ニュートン方程式では位置の2階時間導関数が力に比例した。粒子の波動性に基づくこれまでの記述では、このような運動方程式は現れるのであろうか。

まず、粒子の位置の期待値 $\langle \mathbf{r} \rangle$ は、前節から

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t)^* \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t)$$

と表わされる。この期待値の時間微分をとろう。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} &= \int d^3\mathbf{r} \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t) + \int d^3\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \left\{ \psi^* \mathbf{r} \cdot \hat{H} \psi - \hat{H}^* \psi^* \cdot \mathbf{r} \psi \right\} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \left\{ \psi^* \mathbf{r} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \right) - \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) \mathbf{r} \psi \right\} \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int d^3\mathbf{r} \psi^* (\mathbf{r} \nabla^2 \psi - \nabla^2 (\mathbf{r} \psi)) \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \int d^3\mathbf{r} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{m} \int d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r}, t) (-i\hbar \nabla) \psi(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \rangle \end{aligned}$$

と計算される。ここで、1行目から2行目へはシュレーディンガー方程式とその複素共役な方程式を用い、2行目から3行目へはハミルトニアンが $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) = \hat{H}^*$ である事実を用いた。さらに3行目から4行目へは被積分関数の第2項を部分積分し、最後に運動量演算子とその期待値の定義を用いた。以上をまとめておくと、

$$\frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle \mathbf{p} \rangle \quad (6.12)$$

となる。これは、速度と運動量の古典的な関係式に一致している。ただし、期待値の意味で成り立つ関係式である。

同様にして、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\langle \mathbf{p} \rangle &= -i\hbar \frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \\
 &= -i\hbar \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} + \psi^* \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\
 &= -i\hbar \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}^* \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \psi^* \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \hat{H} \psi \right) \\
 &= \int d^3\mathbf{r} \left\{ \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi^* \nabla \psi - \psi^* \nabla \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi \right\} \\
 &= \int d^3\mathbf{r} \{ V \psi^* \nabla \psi - \psi^* \nabla (V \psi) \} \\
 &= - \int d^3\mathbf{r} \psi^* \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \psi \\
 &= \left\langle -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle
 \end{aligned}$$

と計算される。ここで、1行目から2行目へは時間微分を実行し、2行目から3行目へは波動関数の時間微分をシュレーディンガー方程式とその複素共役な方程式を用いてハミルトニアンを用いてあらわした。3行目から4行目へはハミルトニアンを具体形を代入し、運動エネルギー項は部分積分を用いると消えてしまい、ポテンシャル項のみ残ることを用いて5行目の式を得る。それを整理したものが6行目であり、これはポテンシャル・エネルギーを座標で微分したものの期待値になっている。以上をまとめておくと、

$$\frac{d\langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle \quad (6.13)$$

が得られる。これは、ニュートン方程式の形をしている。すなわち、期待値の意味で、運動量の時間微分はポテンシャル関数の座標微分に負号を付けたもの、すなわち“力”に等しいというニュートン方程式が得られることになる。こうして、量子論から古典論への橋渡しが得られた。本小節の内容は、エーレンフェストの定理として知られている。

ニュートン方程式の対応が得られたが、得られた方程式は $\frac{d\langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = -\frac{\partial \langle V \rangle}{\partial \mathbf{r}}$ であることに注意しておこう。

§§6.5.2 半古典近似

次に、シュレーディンガー方程式から古典論の方程式を導く対応関係を見ておこう。粒子に伴う波の伝搬では $e^{iS/\hbar}$ という因子が重要であった。そこで、波動関数自身を

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) = \exp\left(\frac{1}{\hbar} (iS + \hbar \ln a)\right) \quad (6.14)$$

ととる。但し、 S は作用であり、

$$\begin{aligned}
 S &\equiv \int dt L = \int dt \left[\frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \right] \\
 &= \int dt (\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - H)
 \end{aligned}$$

と書ける。波動関数 (6.14) をシュレーディンガー方程式 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi$ に代入すると、

$$i\hbar \left\{ \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} a + \frac{\partial a}{\partial t} \right\} e^{\frac{i}{\hbar} S} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 (\nabla S)^2 a + 2 \frac{i}{\hbar} \nabla a \cdot \nabla S + \frac{i}{\hbar} a \nabla^2 S + \nabla^2 a \right\} e^{\frac{i}{\hbar} S} + V a e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (6.15)$$

となる。ここで、物理定数 \hbar を小さいとして、 \hbar の冪展開をし、 \hbar の各冪で比較しよう。

$$\begin{cases} \hbar^0 ; & -\frac{\partial S}{\partial t} a = \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 a + V a \\ \hbar ; & i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{m} \nabla a \cdot \nabla S - \frac{i\hbar}{2m} a \nabla^2 S \end{cases}$$

整理して、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m} \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla S \cdot \nabla a = 0 \quad (6.17)$$

となる。ここで、(6.16) 式は、古典力学のハミルトン・ヤコビ方程式に他ならない。すなわち、

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -H \left(= -\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \right) \right) \\ \nabla S = \mathbf{p} \end{cases}$$

が、 \hbar の零次の次数で得られたことになる。こうして、 $\hbar \rightarrow 0$ の極限で、再び量子論は古典論を再現する。

さて、次に (6.17) を見ていこう。この式の両辺に $2a$ をかけると

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(a^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{\nabla S}{m} &= \frac{\mathbf{p}}{m} \equiv \mathbf{v} \\ a^2 &= |\psi|^2 \equiv \rho \end{aligned}$$

である。ただし、 \mathbf{v} は粒子の古典的な速度、 ρ は粒子を見出す確率密度の意味で用いている。これらを用いて上式は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

が得られる。これは確率の保存を表す連続の方程式に他ならない。こうして、 \hbar の1次の次数では、古典論を超えた確率概念が現われていることが理解されよう。

半古典近似については、第4部で改めて記述することにしよう。

7章 特殊相対論と電磁気学

§7.1 アインシュタインの特殊相対性原理とローレンツ変換

2章ではラグランジアンを構成するためにガリレオの相対性原理を採用した。ガリレオの相対性原理は、すべての慣性系で力学法則が同じ形を取るべきであることを要請した。もっと条件を厳しくして、すべての慣性系で物理法則が同じ形を取るべきであると要請してみよう。この要請を、ガリレオの相対性原理と区別して、アインシュタインの特殊相対性原理と呼ぶことにしよう。慣性系に限っている点でまだ“特殊”なのである。

アインシュタインの特殊相対性原理を認めると力学法則が若干変更を受けることになる。これを以下で見よう。

§§7.1.1 光速度不変の原理と同時刻の相対性

光の伝搬を考えよう。光が伝搬することも物理法則であるとするなら、すべての慣性系において、光の伝搬の仕方は同じであるはずであろう。光の速度が有限であることは種々の実験・観測で示されているので、光の伝搬の法則がすべての慣性系で等しいならば、すべての慣性系において光速度は有限な一定値をとると結論される。この光速を c と書くことにする。光速は定義値であり、

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

である。すべての慣性系にとって、光速が同じ値をとるならば、たちどころに日常の経験的世界観を変更せざるを得なくなる。

今、2つの慣性系があり、相対速度 V で、ある方向に一様に運動しているとしよう。運動方向に x 座標をとり、一つの慣性系を静止系 K ととする。もう一つの慣性系は静止系 K に対して x 方向に速さ V で運動しており、この運動座標系を K' とする。図12のように、 K 系と K' 系の座標軸は互いに同じ方向を向いているとする。今、 K' 系で図12のA点で光を灯したとしよう。A点から等距離にあるB点、C点に光が到達する時刻を考えてみよう。光速度不変の原理から、 K' 系では光源Aから運動方向前方にあるC点へも、後方にあるB点へも、等しい速さで光は伝わっていくはずである。このとき、ABとACの距離が等しいので、B点、C点へ光が到達する時刻は同じである。すなわち、慣性系 K' 系にいる観測者は、光がB点、C点に到達するのは同時刻の出来事であると観測する。

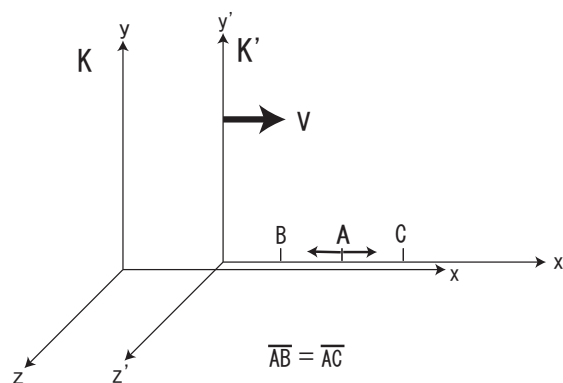


図 12:

一方、この同じ現象を慣性系 K にいる観測者はどのように観測するであろうか。光が A 点を発した後、 x の正方向（前方）へも負方向（後方）へも、 K 系に静止した観測者には光は同じ速さで伝わる。これが光速不変の原理であり、光源の運動状態に依らず、光は同じ速さで伝搬する。ところが、 K' 系は x の正方向へ速さ V で運動しているため、 B 点は光が発せられた点に近づいて来て、 C 点は遠ざかって行く。すなわち、光が進まねばならない距離は明らかに後方にある B 点の方が短い。すなわち、 K 系に静止している観測者は、 A 点で発せられた光は B 点に到達したのち C 点に到達したと観測する。

こうして、 K' 系の観測者には同時刻に起きた事象が、 K 系の観測者には同時刻に起きてはいない。これは、光速が運動状態に依らず、すべての慣性系において等しいという光速不変の原理から導かれたことであり、真理である。すなわち、時刻概念は慣性系ごとに決まる相対的なものである。これまで述べた現象は象徴的に同時刻の相対性と呼ばれることが多い。こうして、時間はすべての慣性系において共通のパラメータではなく、慣性系に固有の量であることを認めなければならない。

§§7.1.2 ローレンツ変換

慣性系ごとに時間を考えねばならないことが前節で議論された。そこで、2つの慣性系の間にはどのような関係が存在するかを考察しよう。2章ではガリレイ変換 (2.6) が議論された。しかしながら、そこでは光速は現れてこず、いわば光速は無限大と陰に考えられていた。そこでは同時刻の相対性は議論の俎上にのぼらず、すべての慣性系で時間は共通、すなわち $t' = t$ であることが暗に仮定されていた。しかしながら、同時刻の相対性から、時間は慣性系に固有のものであり、慣性系間の変換で空間座標とともに時間も変換されるべきである。ここでは、2つの慣性系間の変換を考察しよう。

今、 x 軸方向に互いに一樣に運動している2つの慣性系を考える。便宜上、静止系を K 、 K に対して K 系の x 軸正の方向に速度 V で一樣に運動している慣性系を K' としよう。それぞれの慣性系 K 及び K' の座標は時間も含めて (x, y, z, t) 、 (x', y', z', t') と記す。運動方向は x または同じことであるが x' 方向であるので、運動方向に直交する座標は両系で常に等しい。すなわち、

$$y' = y, \quad z' = z$$

今、時刻 $t = t' = 0$ で座標の原点は重なっていたとする。このとき、 K 系で、時刻 $t = 0$ に原点から x 軸正の向きに出た光の先端の位置 x 、及び同じく光の先端を K' 系で観測した場合の位置 x' は、

$$x = ct, \quad x' = ct'$$

となる。ここで、 t 、 t' は K 系、 K' 系で測定した時刻である。光の伝搬は物理法則であるので、 K 系で成り立つ事実は K' 系でも成り立つはずである。そこで、

$$x' - ct' = \lambda(x - ct)$$

という式が成り立っていれば良いことがわかる。ただし、 λ は未定の定数であり、1である必然性はない。同様な考察から、 x 軸負の方向へ伝搬する光に関しては

$$x' + ct' = \mu(x + ct)$$

となっていれば良い。ここに、 μ も未定の定数である。上の2式を辺々足したり引いたりすると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x + \rho ct, & ct' &= \gamma ct + \rho x \\ \gamma &\equiv \frac{\lambda + \mu}{2}, & \rho &\equiv \frac{\mu - \lambda}{2} \end{aligned}$$

と整理される。ここで、 $x' = 0$ の点は、上式から

$$0 = \gamma x + \rho ct, \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{\rho}{\gamma} ct$$

となる。 K' 系の原点 $x' = 0$ は、 K 系に対して速さ V で運動していることから、 $x = Vt$ と見比べると

$$\rho = -\frac{V}{c}\gamma$$

と、未定の定数が一つ減る。上で導いた $x' = \dots$ と $ct' = \dots$ の式から ρ を消去すると

$$\begin{aligned} x' &= \gamma x - \gamma \frac{V}{c} ct, \\ ct' &= \gamma ct - \gamma \frac{V}{c} x \end{aligned}$$

となるが、これらの式を逆に解くと

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{V}{c}\right)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} ct' \\ ct &= \frac{ct'}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} + \frac{\left(\frac{V}{c}\right)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2\right]} x' \end{aligned}$$

と表わされる。これは、 K' 系から K をみていることに対応しており、 K' 系を静止系、 K 系を K' 系に対して x' 軸負の方向に速度 $-V$ で一様に運動している系の変換とみなせるので、 ρ を消去した $x' = \dots$ 、 $ct' = \dots$ の式で、 $x' \leftrightarrow x$ 、 $ct' \leftrightarrow ct$ 、 $V \leftrightarrow -V$ としたものに他ならないので、

$$\begin{aligned} x &= \gamma x' + \gamma \frac{V}{c} ct' \\ ct &= \gamma ct' + \gamma \frac{V}{c} x' \end{aligned}$$

と同じ式であるべきである。よって、比較することにより、未定の γ が決定される。

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

これをもとの式に戻すことで2つの慣性系間を結ぶ関係を得る。

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \frac{V}{c} ct}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \\ ct' &= \frac{ct - \frac{V}{c} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ y' &= y, \quad z' = z \end{aligned} \tag{7.1}$$

2つの慣性系間を結ぶ変換 (7.1) をローレンツ変換と呼ぶ。今は、 x 方向のみ運動しているので、 x 方向へのローレンツブーストと呼ぶ。もちろん、 $V/c \rightarrow 0$ の極限で、ローレンツ変換はガリレイ変換に帰着する。すなわち、光速に比べて系の運動の速さが遅いときには、ガリレイ変換、ニュートン力学で十分であり、また、時間はすべての慣性系において共通 ($t' \approx t$) となる。

さて、2つの慣性系間を結ぶ関係が導出できたが、2つの慣性系で不変な量はどのような形を持っているだろうか。3次元空間回転の場合には $x^2 + y^2 + z^2$ が回転不変量であったが、ローレンツ変換では時間の変換も含

み不変ではない。しかしながら 3次元空間回転をも含んでいるので、長さの組み合わせも含まれるであろう。ローレンツ不変な組み合わせは簡単に見つけることができ、

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

である。ローレンツ変換を実際に使うと、容易に

$$\begin{aligned} s'^2 &\equiv ct'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ &= c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \\ &\equiv s^2 \end{aligned}$$

であることが確かめられる。 s のことを世界間隔と呼ぶ。

§§7.1.3 ローレンツ変換からの帰結

2つの慣性系間をつなぐローレンツ変換が導いたので、そこから得られる簡単な帰結を紹介しておこう。

2つの慣性系 K 系と K' 系の原点 ($x = 0$, $x' = 0$) に置かれた時計を考えよう。 K 系を静止系と見て、それに対して K' 系は x 方向に速さ V で動いているとする。 K' 系の原点におかれた時計は K 系からみて、速さ V で動くので、 K' 系の原点に置かれた時計の座標は K 系から見ると $x = Vt$ である。ローレンツ変換より

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{V}{c}Vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ &= ct\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

である。ここで K' 系の時計の位置 $x = Vt$ を代入している。こうして、 K' 系での時間 t' と、 K 系での時間 t の間には

$$t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

の関係があることがわかる。すなわち、 $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1$ から $t' < t$ であり、静止系に対して運動している慣性系の時間 t' は、静止慣性系の時間 t からみて遅れることがわかる。

次に、 K' 系に固定された長さ l_0 の物体 AB を考える (図 13)。この長さ l_0 は K' 系において測定されており、物体に対して静止した観測者が測定する物体の固有の長さである。物体 AB の両端の位置は、 K' 系で見て x'_2 と x'_1 であり、 $l_0 = x'_2 - x'_1$ となる。この物体の両端の座標を K 系で測定する。 K' 系での座標値に対応し、 K 系ではそれぞれ x_2 , x_1 であり、 K' 系に固定された物体 AB を K 系の観測者が測定した長さ l は、 $l = x_2 - x_1$ となる。ローレンツ変換から、 x'_i と x_i ($i = 1, 2$) には関係があり、代入すると

$$\begin{aligned} l_0 &= x'_2 - x'_1 \\ &= \frac{x_2 - \frac{V}{c}ct}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} - \frac{x_1 - \frac{V}{c}ct}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \\ &= \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

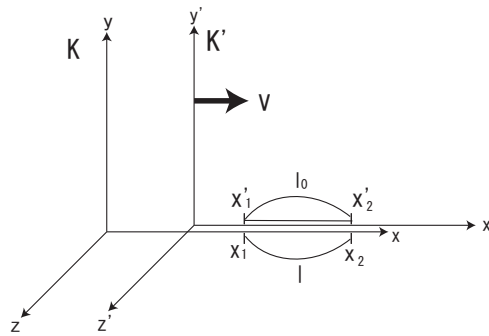


図 13:

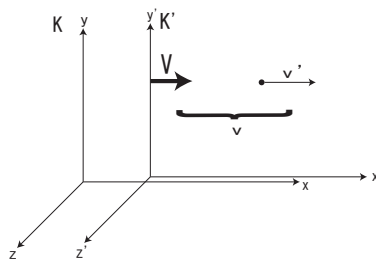


図 14:

が得られる。すなわち、

$$l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

であり、 $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} < 1$ より $l < l_0$ である。すなわち、動いている物体の長さを静止系から測る (l) と、物体固有の長さ (l_0) に比べて縮んで観測されることがわかる。これをローレンツ収縮と呼ぶ。

さて、速度はどのように変換されるだろうか (図 14)。ガリレイ変換では (2.6) であったが、明らかに光速不変の原理に反している。今、 K' 系から K 系を見ると、 K 系は x の負の方向に速さ V で進んでいるので、 K 系が K' 系に対して動く速度は、 $-V$ である。ローレンツ変換の式で $x \leftrightarrow x'$ 、 $t \leftrightarrow t'$ 、 $V \rightarrow -V$ とすればよいので、

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}},$$

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

となる。辺々割り算すると、

$$\frac{x}{t} = \frac{x' + Vt'}{t' + \frac{V}{c^2}x'}$$

$$= \frac{\frac{x'}{t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{x'}{t'}}$$

となる。ここで、 K 系から見た物体の速さ v は $v = \frac{x}{t}$ であり、 K' 系から見た物体の速さ v' は $v' = \frac{x'}{t'}$ であるので、

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$$

となる。これが相対論での速度の合成則である。たとえば、 K' 系での光の速さが c であれば、上式に $v' = c$ を代入すれば、 K 系で見た光の速さ v は確かに $v = c$ となることがわかる。すなわち、光速不変の原理を満たしている。もちろん、 $V/c \rightarrow 0$ 、 $v'/c \rightarrow 0$ となるような、光速に比べて物体や慣性系の速さが小さいときには、速度の合成則は (2.6) に戻る。

§ 7.2 相対論的力学

§§7.2.1 最小作用の原理

2章では、ガリレイの相対性原理にもとづき、質点の運動を記述するラグランジアンを構成した。ここでは、アインシュタインの特殊相対性原理にもとづき、力学を構成しなおそう。もちろん、光速を $c \rightarrow \infty$ とすれば通常のニュートン力学に戻るべきである。

1つの自由粒子の運動について考察しよう。我々の行うべきことは、作用を構成することである。物理法則はすべての慣性系で同じ形を取るべきであるので、作用の形は慣性系に依らない。慣性系を結ぶ変換はローレンツ変換であったので、作用はローレンツ変換の下で不変であるべきである。ローレンツ変換で不変な粒子に関する量は、粒子が時間経過とともに運動した世界間隔しかない。すなわち、微小な時間間隔 dt に粒子は微小な変位 (dx, dy, dz) をとったとき、ローレンツ変換で不変な量は、微小な世界間隔 ds であり、

$$ds \equiv \sqrt{(cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$

である。これが積分の測度となり、ローレンツ変換で不変な作用 S として、

$$\begin{aligned} S &= -\alpha \int ds \\ &= \int \left(-\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) dt \\ &\equiv \int dt L, \\ L &\equiv -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 α は後に決める定数であり、便宜上負号を付した。また、 $v = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}/dt$ は粒子の速さである。作用 S を時間積分で表わしたときの被積分関数がラグランジアンであったので、ラグランジアン L を定義した。

光速 c が考えている速さ v に比べて大きいとき、すなわち $v/c \rightarrow 0$ のとき、ローレンツ変換がガリレイ変換に戻ったことから、定数 α はガリレイの相対性原理に基づき構成されたラグランジアンに戻るよう決定される。すなわち、 v/c が小さいとして上のラグランジアンを展開すると、

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

となる。これが、運動に影響しない付加定数を除いて (2.8) に一致するためには、 $\alpha = mc$ ととらなければならない。このとき、 $L \approx -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ となり、第 1 項の付加定数を除き運動エネルギーの形を持つ。こうして、定数 α が決定されたので、相対論的な作用、及びラグランジアンが決定された。

$$\begin{aligned} S &= -mc \int ds = \int L dt \\ L &= -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (7.2)$$

§§7.2.2 運動量・エネルギー

運動量は空間並進不変性に基づくものであったので、定義は変わらず、

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

となる。実際、 $v/c \ll 1$ のとき、分母は 1 となって、 $\mathbf{p} \sim m\mathbf{v}$ と、非相対論的に得られた運動量の表式に帰着する。

次に、エネルギーを考えよう。エネルギーは時間並進の不変性に基づく物理量であったので、非相対論でも相対論でも定義は変わらず、

$$E \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.3)$$

と得られる。ここで、 $v/c \ll 1$ のときには、

$$E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

となり、確かに第 2 項に運動エネルギーが現れる。しかしながら、 $v = 0$ の静止した粒子に対しても (7.3) 式は、

$$E = mc^2$$

となり、静止粒子のエネルギーは零と異なる。すなわち、粒子の質量に光速の 2 乗をかけたエネルギーが常に存在する。これは静止エネルギーと呼ばれる。こうして、相対性理論から質量とエネルギーは等価であり、互いに転換し得るという重要な結論が得られた。これを質量とエネルギーの等価性と呼ぶ。

運動量とエネルギーの表式を組み合わせ得られる関係式を 2 つあげておこう。

$$\begin{aligned} E^2 &= (\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2 \\ \mathbf{p} &= E \frac{\mathbf{v}}{c^2} \end{aligned}$$

§§7.2.3 一般のローレンツ変換

さて、我々は、2 つの慣性系を結ぶ変換としてローレンツ変換を導いたが、 x 方向に相対して運動する慣性系に限った。そこで、一般に、2 つの慣性系が相対速度 \mathbf{V} で運動している場合のローレンツ変換を形式的に書き下しておこう。

ローレンツ変換で不変な量は、世界間隔 $ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ であった。そこで、世界間隔を不変にする一般的な変換の形式を書くことを目標にする。

まず、世界間隔は、 $dx^{\mu=0} \equiv cdt$ 、 $dx^1 \equiv dx$ 、 $dx^2 \equiv dy$ 、 $dx^3 \equiv dz$ として、

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と書ける。ここで、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ、今の場合

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義される。また、最右辺は繰り返す添え字については0から3まで和をとるという規約を用いる（アインシュタインの規約）。また、

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

も定義しておく。

ここで、一般に

$$\begin{aligned} X^\mu &\equiv (X^0, \mathbf{X}), \\ X_\mu &\equiv g_{\mu\nu} X^\nu = (X^0, -\mathbf{X}) \end{aligned}$$

という4元ベクトルを導入する。ここで、 \mathbf{X} は3次元空間の回転に対する3次元ベクトルである。上付き添え字を持つ X^μ を反変ベクトル、下付添え字を持つ X_μ を共変ベクトルと呼ぶ。これらを用いると、世界間隔は

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu$$

とも書き表される。これを見ると、添え字の上、下は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ 、 $g^{\mu\nu}$ で移動させることができることがわかる。また、

$$g_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu \equiv \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

となる。ここで、 δ_μ^ν はクロネッカーのデルタである。

一般のローレンツ変換は、新しい慣性系の座標をプライムを付けて表すと、

$$dx^{\mu'} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^{\mu'}_\nu dx^\nu \equiv \Lambda^{\mu'}_\nu dx^\nu$$

と書き表わすことができる。ここで、 $\Lambda^{\mu'}_\nu$ は変換を表す量であり、 μ, ν は0から3まで走る。本章では、ギリシャ文字の添え字は0から3までの値をとるとしよう。この Λ の満たす性質を見よう。ローレンツ変換は世界間隔を不変にする変換であった。一般に、4元ベクトルのノルム（長さ） $X_\mu X^\mu$ を不変に保つ。今、 $X^\mu = dx^\mu$ と考えておけばよい。ローレンツ変換後の4元ベクトルのノルム $X'^\mu X'^\mu$ は変換前のノルム $X_\mu X^\mu$ と等しくなるのがローレンツ変換であったので、

$$\begin{aligned} X'^\mu X'^\mu &= g_{\mu\nu} X'^\mu X'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma X^\rho X^\sigma \\ &\equiv g_{\rho\sigma} X^\rho X^\sigma \end{aligned}$$

が成り立つはずである。こうして、ローレンツ変換を表す行列 Λ に対して、条件

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma} \quad (7.4)$$

が課せられる。両辺に $g^{\tau\rho}$ をかけて、 ρ について和をとり、 $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$ の関係を用いると、

$$\Lambda_\nu^\tau\Lambda^\nu_\sigma = \delta^\tau_\sigma, \\ \text{すなわち} \quad \Lambda_\nu^\tau = (\Lambda^{-1})^\tau_\nu$$

となる。これが、ローレンツ変換 Λ の従うべき条件である。ローレンツ変換 Λ^μ_ν は 4×4 行列で 16 個の成分があるが、条件式 (7.4) は $g_{\mu\nu}$ が μ, ν に対して対称であることから 10 個の条件式を与える。従って、 Λ^μ_ν のうち独立な成分は 6 個となる。このうち 3 個は時間変数を変換しない 3 次元空間の回転であり、残りの 3 つが x 方向、 y 方向、 z 方向へのローレンツブーストである。

§§7.2.4 ローレンツスカラー・ベクトル・テンソル

ローレンツ変換のもとで不変な量を (ローレンツ) スカラーと呼ぶ。

$$C' = C$$

たとえば、世界間隔はスカラー量である。また、時空座標の関数 $C(x)$ に対してローレンツ変換のもとで

$$C'(x') = C(x)$$

となる量を、スカラー場と呼ぶ。

ローレンツ変換に対して

$$X'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu, \\ X'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} X_\nu = \Lambda_\mu^\nu X_\nu$$

と変換される量 X^μ 、 X_μ をそれぞれ反変ベクトル、共変ベクトルと呼ぶ。また、

$$X'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu(x), \\ X'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} X_\nu(x)$$

となる量をそれぞれ、反変ベクトル場、共変ベクトル場と呼ぶ。

添え字が複数ついている量は、一般にテンソルと呼ばれる。たとえば、

$$G'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} G^{\rho\sigma}(x)$$

と変換される量は、2 階反変テンソル場と呼ばれる。

§§7.2.5 ローレンツ群

ローレンツ変換は群を為している。ローレンツ変換 Λ^μ_ρ と計量テンソル $g_{\mu\nu}$ には (7.4) の関係があるので、両辺の行列式をとることと、 $\rho = \sigma = 0$ ととることから、

$$\det\Lambda = \pm 1, \\ (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \geq 1$$

が得られる。よって、ローレンツ変換は4つの連結成分に分けられる。

- (1) $\det\Lambda = 1, \Lambda^0_0 \geq 1$, 単位元 1 に連結
- (2) $\det\Lambda = -1, \Lambda^0_0 \geq 1$, 空間反転 P に連結
- (3) $\det\Lambda = -1, \Lambda^0_0 \leq -1$, 時間反転 T に連結
- (4) $\det\Lambda = 1, \Lambda^0_0 \leq -1$, 空間時間反転 PT に連結

ここで、空間反転 P と時間反転 T は、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。以後、(1) の場合のみ考える。このローレンツ変換は本義ローレンツ変換と呼ばれる。

「リー群とリー代数」の節で述べられたことを参照しよう。まずは無限小変換を考える。変換しないときには $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$ のように対角成分のみ 1 であり、 $x'^\mu = x^\mu$ となる。よって、無限小変換を

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu$$

と書こう。このとき、(7.4) に代入し、 ϵ^μ_ν の 1 次までとると

$$\epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0$$

すなわち、 $\epsilon_{\mu\nu}$ は反対称であることが示される。こうして、独立な成分は 6 つであることがわかる。このとき、ローレンツ変換はアインシュタインの規約を用いて

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + \epsilon^\mu_\nu x^\nu \equiv \left(1 - \frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} M_{\rho\sigma}\right)^\mu_\nu x^\nu \\ (M_{\rho\sigma})^\mu_\nu &\equiv i(\delta_\rho^\mu g_{\sigma\nu} - \delta_\sigma^\mu g_{\rho\nu}) \\ 1^\mu_\nu &\equiv \delta^\mu_\nu \end{aligned}$$

と表わすことができる。直接の計算から

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

を示すことができる。こうして、 $M_{\mu\nu}$ に関する交換子は閉じており、この交換関係は $so(3,1)$ 代数の生成子が満たすものとなっている。リー群、リー代数の言葉では

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \exp\left(-\frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} \hat{M}_{\rho\sigma}\right) \approx 1 - \frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} \hat{M}_{\rho\sigma}, \\ [\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] &= -i(g_{\mu\rho} \hat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} \hat{M}_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} \hat{M}_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} \hat{M}_{\mu\rho}) \end{aligned}$$

$\{\hat{\Lambda}\}$ は $SO(3,1)$ 群の元であり、 $\hat{M}_{\rho\sigma}$ はリー代数 $so(3,1)$ の生成子、 $(M_{\rho\sigma})^\mu_\nu$ はその表現行列である。

さて、リー代数 $so(3,1)$ の生成子から

$$\begin{aligned} J_i &\equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \hat{M}^{jk} = (\hat{M}_{23}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{12}), \\ K_i &\equiv \hat{M}_{i0} (= -\hat{M}_{0i}) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

を定義しよう。ここで、 ϵ_{ijk} は $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ の偶置換のときは 1、奇置換のときは -1 、それ以外は 0 である完全反対称テンソルである。このとき、交換子は

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k$$

と計算される。ここで、繰り返すラテン添え字は 1 から 3 まで和をとることを意味する。生成子 $\{J_i\}$ は $su(2)$ 代数を満たし、3次元回転の生成子を与える。また、 $\{K_i\}$ はローレンツ・ブーストの生成子である。こうして、ローレンツ変換群要素は

$$\hat{\Lambda} = \exp(i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + i\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})$$

と書ける。ここで、 $\boldsymbol{\theta} = -(\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12})$ 、 $\boldsymbol{\beta} = (\epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \epsilon_{30})$ とおいた。具体的に行列表示を書き下しておこう。空間回転に関して、1 軸周りの回転は

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_1 \\ 0 & 0 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (1 + i\theta_1 J_1)X$$

および、これと同様にして J_i を定義すると、

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ローレンツブーストに関しては、1 軸方向へのローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & -\frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ = (1 + i\beta_1 K_1)X$$

及び、同様な計算で K_2, K_3 を定義すると

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。このとき、この行列表現から、 J_i, K_i は $so(3, 1)$ 代数の交換関係を満足することは容易に確かめられる。

さらに、

$$\mathbf{A} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}), \quad \mathbf{B} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$$

を定義すると、 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} の間の交換関係は

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k, \quad [B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k, \quad [A_i, B_j] = 0$$

が得られる。こうして、ローレンツ群 $so(3,1)$ は2つの $su(2)$ 代数の積として表現される^{††}。

§§7.2.6 4元形式でのエネルギー、運動量

まず、固有時 τ を、ローレンツ不変な量として導入する。

$$ds = cd\tau, \quad d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

固有時は明らかにローレンツスカラーである。この固有時を用いて、4元ベクトルとしての4元速度 u^μ を導入しよう。

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

定義から、 $u_\mu u^\mu = c^2$ となる。ここで、 dx^μ は4元ベクトル、 $d\tau$ はスカラーであるので、4元速度 u^μ はローレンツ変換に対して4元ベクトルとして振舞う。今、 $p^\mu \equiv mu^\mu$ も4元ベクトルであり、

$$\begin{aligned} p^\mu &\equiv mu^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \\ &= \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 E はエネルギー、 \mathbf{p} は3次元の運動量ベクトルである。こうして、エネルギー、運動量はあわせて4元ベクトルを構成する。ここで、

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2$$

という関係式が得られる。ここで m は粒子の質量であり、ローレンツスカラー量である。

さて、4元力 F^μ を導入し、粒子の“運動方程式”を

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

と書き下してみよう。固有時 $d\tau$ は $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ であったので、上の“運動方程式”の空間成分 ($\mu = 1, 2, 3$) は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}$$

となるが、ニュートン力学での力 \mathbf{f} は $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}$ を満たすものであったので、上の式は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \mathbf{f} = \mathbf{F} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \mathbf{F} &\equiv \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

^{††}数学的にはコンパクトな4次元回転群 $o(4)$ が $su(2) \times su(2)$ と同型であり、非コンパクトな $so(3,1)$ は $su(2) \times su(2)$ には数学的な意味では同型ではないが、表現を作るときには便利である。

と書き直される。時間成分 ($\mu = 0$) については

$$\frac{dE}{dt} \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F^0$$

と書き直されるが、エネルギー E の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \frac{1}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} c^2 \mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \end{aligned}$$

となる。ここで、§§11.2.2 で示した関係式 $c^2 \mathbf{p}/E = \mathbf{v}$ 、及びニュートン方程式を用いてニュートンの力 \mathbf{f} を用いた。この式は、エネルギーの時間微分が仕事率に等しいという式そのものである。

こうして、4元力 F^μ は3次元的な力 \mathbf{f} と粒子の速度 \mathbf{v} を用いて、

$$F^\mu = \left(\frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

と表されることがわかる。

§§7.2.7 粒子の崩壊・融合・衝突

質量 M の物体が、質量 m_1 と m_2 の2つの物体に崩壊したとしよう。もちろん、エネルギー保存法則から $M > m_1 + m_2$ でなければこの過程は生じない。崩壊前の粒子が静止している座標系で考えよう。崩壊後の粒子のエネルギーをそれぞれ E_{10} 、 E_{20} 、運動量を \mathbf{p}_{10} 、 \mathbf{p}_{20} とし、エネルギーと運動量の保存法則から、

$$\begin{aligned} Mc^2 &= E_{10} + E_{20}, \\ 0 &= \mathbf{p}_{10} + \mathbf{p}_{20}, \quad \text{すなわち} \quad E_{10}^2 - m_1^2 c^4 = E_{20}^2 - m_2^2 c^4 \end{aligned}$$

となる。ここで、運動量保存法則の第2の表式は、 $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ の関係を用いている。以上の式から、崩壊後の粒子のエネルギーは

$$E_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2, \quad E_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} c^2$$

と得られる。

今度は崩壊の逆過程、2つの粒子の融合を考えよう。すなわち、質量 m_1 の粒子1と質量 m_2 の粒子2の2つの粒子が融合して質量 M の粒子になったとする。実験室系では粒子2が静止していて、そこに粒子1が E_1 のエネルギー、 \mathbf{p}_1 の運動量を持って入射してきたものとする。系の全エネルギー E と全運動量 \mathbf{p} は、

$$\begin{aligned} E &= E_1 + m_2 c^2, \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2$ はローレンツ変換でスカラー量として振る舞うので、ローレンツ変換の下で不変である。実験室系から慣性中心系にローレンツ変換すると、 $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 \equiv M^2 c^4$ としたときの M は慣性中心系で静止している融合後の粒子の質量である。よって、

$$\begin{aligned} M^2 c^4 &= E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = (E_1 + m_2 c^2)^2 - \mathbf{p}_1^2 c^2 \\ &= (E_1^2 - \mathbf{p}_1^2 c^2) + (m_2 c^2)^2 + 2m_2 c^2 E_1 \end{aligned}$$

であるが、 $(E_1^2 - \mathbf{p}^2 c^2) = m_1^2 c^4$ であることに気づくと、結局、融合後の粒子の質量は融合前の2粒子の質量と実験室系での入射エネルギー E_1 で決まり、

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 \frac{E_1}{c^2}$$

となる。また、慣性中心の速度、すなわち実験室系で見た融合後の粒子の速度 \mathbf{V} は

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} = \frac{\mathbf{p}_1 c^2}{E_1 + m_2 c^2}$$

となっている。

最後に、質量 m_1 の粒子1と質量 m_2 の粒子2の2つの粒子の弾性衝突を考えよう。弾性衝突であるので、エネルギーは散逸しない。そこで、衝突前の4元運動量を p_1^μ 、 p_2^μ と書き、衝突後のそれを $p_1'^\mu$ 、 $p_2'^\mu$ とすると、エネルギー・運動量の保存則から

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

である。実験室系では静止した粒子2に粒子1が入射してきて衝突が起きたものとしよう。すなわち、

$$p_2^0 = \frac{E_2}{c} = m_2 c, \quad p_2^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

4元運動量の保存の式から、2乗をとると

$$(p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu)^2 = (p_2'^\mu)^2$$

が得られるが、 $\sum_\mu p_1^\mu p_{1\mu} = \sum_\mu p_1'^\mu p_{1\mu} = m_1^2 c^2$ 、 $\sum_\mu p_2^\mu p_{2\mu} = \sum_\mu p_2'^\mu p_{2\mu} = m_2^2 c^2$ の関係を用いると、

$$m_1^2 c^2 + \sum_{\mu=0}^3 p_{1\mu} p_2^\mu - \sum_{\mu=0}^3 p_{1\mu} p_1'^\mu - \sum_{\mu=0}^3 p_{2\mu} p_1'^\mu = 0$$

と変形できる。ここで、実験室系では、粒子1の衝突前の運動量 \mathbf{p}_1 と衝突後の運動量 \mathbf{p}_1' のなす散乱角を θ_1 として、

$$\begin{aligned} \sum_\mu p_{1\mu} p_2^\mu &= p_{10} p_2^0 = E_1 m_2, & \sum_\mu p_{2\mu} p_1'^\mu &= p_{20} p_1'^0 = E_1' m_2, \\ \sum_\mu p_{1\mu} p_1'^\mu &= \frac{E_1 E_1'}{c^2} - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1' = \frac{E_1 E_1'}{c^2} - |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_1'| \cos \theta_1 \end{aligned}$$

となっているので、代入して、

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1' (E_1 + m_2 c^2) - E_1 m_2 c^2 - m_2^2 c^4}{|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1'| c^2}$$

が得られる。同様にして、入射粒子1の衝突前の進行方向から、1の衝突により粒子2が散乱される角 θ_2 は

$$\cos \theta_2 = \frac{(E_1 + m_2 c^2)(E_2' - m_2 c^2)}{|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2'| c^2}$$

と得られる。

§ 7.3 電磁場中の粒子の力学

§§7.3.1 電磁場との相互作用

電磁場中の粒子の運動を考えよう。自由粒子のラグランジアンは相対論的に構成することができた。電磁場に関しては、古典的には電磁場の振動で現れる電磁波の速度は光速 c であるので、電磁場を考える際には相対論的に扱うことを免れることはできない。そこで、電磁場を特徴付ける場を 4 元ベクトル場 $A^\mu(x)$ として記述しよう。粒子に関する 4 元ベクトルは dx^μ しかないので、粒子と電磁場から作られる相対論的に不変な量のうち最も簡単なものは、2つの 4 元ベクトルの“内積”、 $A_\mu(x)dx^\mu$ である。そこで、粒子と電磁場との相互作用を q で特徴付けることにしよう。この q のことを、粒子の持つ電荷と呼ぶ。例えば、陽子の持つ電荷は e 、電子のそれは $-e$ である。ここで、 e は素電荷と呼ばれ、

$$e = 1.6021764 \times 10^{-19} \text{ C}$$

という値を持つ。こうして、自由粒子の作用に付け加える電磁相互作用の作用 S_{int} は

$$S_{\text{int}} = -q \int A_\mu(x) dx^\mu$$

となる。便宜上、負号をつけた。ここで、電磁場を表す 4 元ベクトルを、時間成分と空間成分にわけて、

$$A^\mu(x) = \left(\frac{\phi(x)}{c}, \mathbf{A}(x) \right), \quad A_\mu(x) = \left(\frac{\phi(x)}{c}, -\mathbf{A}(x) \right)$$

とする。ここで導入した $\phi(x)$ 、 $\mathbf{A}(x)$ はそれぞれスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルと呼ばれる。こうして、作用、及びラグランジアンは

$$\begin{aligned} S &= \int (-mcds - qA_\mu(x)dx^\mu) \\ &= \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{v} - q\phi(x) \right) dt \\ &\equiv \int L dt \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$L \equiv -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{v} - q\phi(x) \tag{7.6}$$

と得られる。ここで、 $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$ は粒子の速度である。

電磁場中の粒子の運動方程式は、最小作用の原理から得られるオイラー・ラグランジュ方程式により与えられる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

具体的に計算を実行しよう。右辺は

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = q \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{v}) - q \frac{\partial \phi(x)}{\partial \mathbf{r}}$$

であるが、ベクトル解析の公式

$$\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot } \mathbf{b}$$

と、 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = 0$ とから、

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = q(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + q\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} - e\nabla\phi$$

と変形できる。運動方程式の左辺については、 $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ となるので、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = q(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + q\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} - q \text{grad } \phi$$

とまとまる。さらに、時間についての全微分は

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}(x)}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{A} \\ &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \end{aligned}$$

となるので、結局、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A} - q\nabla\phi$$

となる。右辺の“力”の部分で、粒子の速度に依存しない力と速度に依存する力の部分に分割し、最終的に次の運動方程式を得る。

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E}(x) + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(x) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{E}(x) \equiv -\nabla\phi(x) - \frac{\partial \mathbf{A}(x)}{\partial t}$$

$$\mathbf{B}(x) \equiv \text{rot } \mathbf{A}(x) \quad (7.8)$$

式(7.7)の右辺の力をローレンツ力と呼ぶ。また、 $\mathbf{E}(x)$ を電場、 $\mathbf{B}(x)$ を磁束密度と呼ぶ。粒子の速度が光速に近く、相対論的に扱う際には $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ であるが、粒子の速度 v が光速 c に比べて小さい場合には非相対論的な $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ を用いて運動を扱えば十分である。非相対論的な範囲で、系のハミルトニアンを求めておこう。ラグランジアン(7.6)式は、非相対論的な近似では、 $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}$ より

$$L \equiv -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + q\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{v} - q\phi(x)$$

となる。定数 $-mc^2$ は運動方程式に寄与しないので落とす。正準運動量 \mathbf{p} は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}(x)$$

となるので、はハミルトニアン H は定義により

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L \\ &= \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m} \right) - \frac{1}{2}m \left(\frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m} \right)^2 - q\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}}{m} \right) + q\phi(x) \\ &= \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(x))^2 + q\phi(x) \end{aligned} \quad (7.9)$$

と書ける。この表式は電磁場中での荷電粒子の非相対論的な運動の記述に用いられる。

§§7.3.2 4元形式での運動方程式

前小節で導いた電磁場中の粒子の運動方程式を、4元形式のまま導出してみよう。4元形式で書かれた作用から出発する。

$$S = \int (-mc ds - qA_\mu dx^\mu)$$

作用が最小、すなわち $\delta S = 0$ から運動方程式が導かれる。今、 $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$ 、 $\delta ds = \frac{dx_\mu \delta(dx^\mu)}{ds}$ 、 $\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta x^\nu$ より、

$$\delta S = - \int \left(mc \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} + qA_\mu \delta dx^\mu + q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\mu \delta x^\nu \right) = 0$$

である。右辺の被積分関数の第2項と第3項を部分積分し、表面項は零であることを用いる。また、第3項で和の記号を μ を ν 、 ν を μ と書き直す。さらに、4元速度 u_μ を利用して $\frac{dx_\mu}{ds} = \frac{1}{c} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{1}{c} u_\mu$ であることから、

$$\delta S = - \int \left(m du_\mu - q dA_\mu + q \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} dx^\nu \right) \delta x^\mu = 0$$

と書き換えられる。さらに第2項は $dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$ より、全体を $d\tau$ で割った後に再び掛けて

$$\delta S = - \int \left(m \frac{du_\mu}{d\tau} - q \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) u^\nu \right) \delta x^\mu d\tau = 0$$

が得られる。任意の δx^μ に対して成り立つので、オイラー・ラグランジュ方程式として、

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = -q F_{\mu\nu} u^\nu \quad (7.10)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \quad (7.11)$$

が得られる。もちろん、これは (7.7) と同じ運動方程式である。ここで定義した $F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルであり、具体的に書くと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と、先に定義した電場、磁束密度の成分で表される。明らかに $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ の関係がある反対称テンソルである。

§§7.3.3 ゲージ不変性

4元形式で書かれた運動方程式 (7.10) は、時空座標のローレンツスカラーの任意関数 $f(x)$ を用いた次の変換

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \quad (7.12)$$

に対して不変である。この変換をゲージ変換と呼ぶ。実際、ゲージ変換に対して電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ が不変であるので、運動方程式も形を変えない。電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ がゲージ変換の下で不変であることは、微分

$\partial/\partial x^\mu$ がすべての μ に対し可換であることから簡単に示される。時間成分であるスカラーポテンシャル、空間成分であるベクトルポテンシャルの言葉でゲージ変換を見ると、

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \phi(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial t}, \\ \mathbf{A}'(x) &= \mathbf{A}(x) + \nabla f(x)\end{aligned}$$

となっている。もちろん、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(x) &= -\nabla\phi'(x) - \frac{\partial\mathbf{A}'(x)}{\partial t} \\ &= -\nabla\left(\phi(x) - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial\mathbf{A}(x)}{\partial t} + \frac{\partial\nabla f}{\partial t}\right) \\ &= -\nabla\phi(x) - \frac{\partial\mathbf{A}(x)}{\partial t} \\ &= \mathbf{E}(x) \\ \mathbf{B}'(x) &= \text{rot } \mathbf{A}'(x) \\ &= \text{rot } (\mathbf{A}(x) + \nabla f(x)) = \text{rot } \mathbf{A}(x) \\ &= \mathbf{B}(x)\end{aligned}$$

となり、電場、磁束密度はゲージ変換で不変である。

この事実を用いて、自然界はゲージ変換に対して不変である、と考える。これを基礎原理にとり、ゲージ原理と呼ぶ。

§§7.3.4 電磁場の方程式

電磁場を表す電磁ポテンシャルとして A_μ を導入したが、運動方程式に現れる電場、磁束密度はゲージ変換に対して不変であった。また、作用自身も

$$\begin{aligned}S_{\text{int}} &= -q \int A_\mu dx^\mu \longrightarrow \\ S'_{\text{int}} &= -q \int A'_\mu dx^\mu = -q \int \left(A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu \\ &= -q \int A_\mu dx^\mu + qf|_{\text{表面項}} = -q \int A_\mu dx^\mu = S_{\text{int}}\end{aligned}$$

となって不変である。

今度は、電磁場のみからなる項を作用の一部として考えよう。粒子との電磁相互作用と同じく、ローレンツ不変であり、かつゲージ変換に対して不変であるように作用を考える。最も簡単な組み合わせとして、 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ が考えられる。電磁テンソル $F_{\mu\nu}$ 自身はゲージ不変である。そこで、作用として、

$$S = - \int mc ds - q \int A_\mu dx^\mu - \frac{\epsilon_0 c}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x$$

と、第3項を加えよう。ここで、 ϵ_0 は未定の定数であり、便宜上、光速 c とともに入れた。後の便宜のため、電荷が連続的に分布している場合を考えよう。電荷 q を電荷密度 $\rho(\mathbf{r}, t)$ に置き換えるのであるが、電荷密度は単位体積あたりの電荷量であるので、3次元体積がローレンツ不変な量でないことから、電荷密度はローレン

ツスカラーではなく、4元ベクトルの時間成分と同じ変換を受ける*。こうして、上の作用を書き直すと

$$\begin{aligned} S &= -\sum \int mc ds - \int \rho(x) dV A_\mu dx^\mu - \frac{\epsilon_0 c}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \\ &= -\sum \int mc ds - \frac{1}{c} \int \rho(x) A_\mu \frac{dx^\mu}{dt} d^4x - \frac{\epsilon_0 c}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \end{aligned}$$

となる。ここで、第1項は電荷分布を形作る粒子についての和をとることを意味している。第2項は cdt で割って、ローレンツ不変な4次元体積 $cdt \cdot dV = d^4x$ で書いた。ここで、4元電流 j^μ を導入しておく。

$$j^\mu(x) \equiv \rho(x) \frac{dx^\mu}{dt} = (c\rho(x), \mathbf{j}(x)), \quad \mathbf{j}(x) \equiv \rho(x)\mathbf{v} = \rho(x) \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

4元電流を用いると、作用は、

$$S = -\sum \int mc ds - \frac{1}{c} \int A_\mu j^\mu d^4x - \frac{\epsilon_0 c}{4} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (7.13)$$

と得られる。ここで、2階反変テンソルで書かれた電磁場テンソルは、定義により

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と得られる。

さて、電磁場自身が満たす方程式を、(7.13)の作用から導こう。力学の運動方程式を導く際には、粒子の位置に関する変分 $\delta S = 0$ からオイラー・ラグランジュ方程式が導かれたが、今度は、場 A_μ の変分に関して作用が最小であるという最小作用の原理を要請しよう。場の変分から場の方程式が導出される。すなわち、

$$\frac{\delta S}{\delta A^\mu} = 0$$

を考えることになる。これからは、 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ を ∂_μ と書こう。確かに反変ベクトル x^μ での偏微分は、共変ベクトルの変換性を示すことは容易に確かめられる。この表記では電磁場テンソルは $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と書ける。作用の第3項の A に関する変分は

$$\begin{aligned} \delta \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x &= 2 \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x = 2 \int F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) d^4x \\ &= -2 \int [(\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu - (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta A_\mu] d^4x \\ &= 4 \int (\partial_\nu F^{\mu\nu}) \delta A_\mu d^4x \end{aligned}$$

となる。ここで、1行目から2行目へは部分積分と表面項は零になることを用い、2行目から3行目へは被積分関数の第1項で和の添え字を $\mu \leftrightarrow \nu$ の入れ替えを行なった後に電磁場テンソルの反対称性 ($F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$) を用いた。こうして、作用(7.13)の A_μ に関する変分から、

$$\delta S = - \int \left(\frac{1}{c} j^\mu + c\epsilon_0 \partial_\nu F^{\mu\nu} \right) \delta A_\mu d^4x = 0$$

*4次元体積 d^4x はローレンツ不変である。また電荷 ρdV もローレンツ不変である。ここで、 $dV = d^3x$ は体積素片である。従って、 ρ 自身は時間成分 dx^0 と同じ変換を受けるべきである。

が得られ、任意の δA_μ に対して作用が最小であることから、

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} j^\mu \quad (7.14)$$

が得られる。これは Maxwell 方程式の第 2 の組と呼ばれる電磁場の方程式を与える。ここで、 $\mu = 0$ の時間成分と、 $\mu = i = 1, 2, 3$ の空間成分をとると、電磁場テンソル、4 元電流をあからさまに書いて

$$\begin{aligned} \mu = 0 ; & \quad -\frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} c\rho \\ \mu = i : & \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} \end{aligned}$$

となる。ここで、新たに

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \equiv \mu_0, \quad \text{すなわち} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

を満たす μ_0 を導入する。ここで、 ϵ_0 を真空の誘電率、 μ_0 を真空の透磁率と呼ぶ。値は実験的に決定すべきものである。また、

$$\mathbf{D}(x) \equiv \epsilon_0 \mathbf{E}(x), \quad \mathbf{H}(x) \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(x) \quad (7.15)$$

により、電束密度 \mathbf{D} 、磁場 \mathbf{H} を定義すると、上のマクスウェル方程式の第 2 の組は

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}(x) &= \rho(x), \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(x) &= \mathbf{j}(x) + \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.16)$$

と表される。一方、電場、磁束密度の定義 $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 、 $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ と、数学の恒等式 $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = \nabla \times \nabla \phi = 0$ 、 $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ から、

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(x) &= -\frac{\partial \mathbf{B}(x)}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

が得られる。これをマクスウェル方程式の第 1 の組と呼ぶ。

真空中での電磁場の方程式は (7.15)~(7.17) で決定される。物質中では真空の誘電率、真空の透磁率の代わりに物質の誘電率 ϵ 、物質の透磁率 μ に変えた一連の式が得られる。