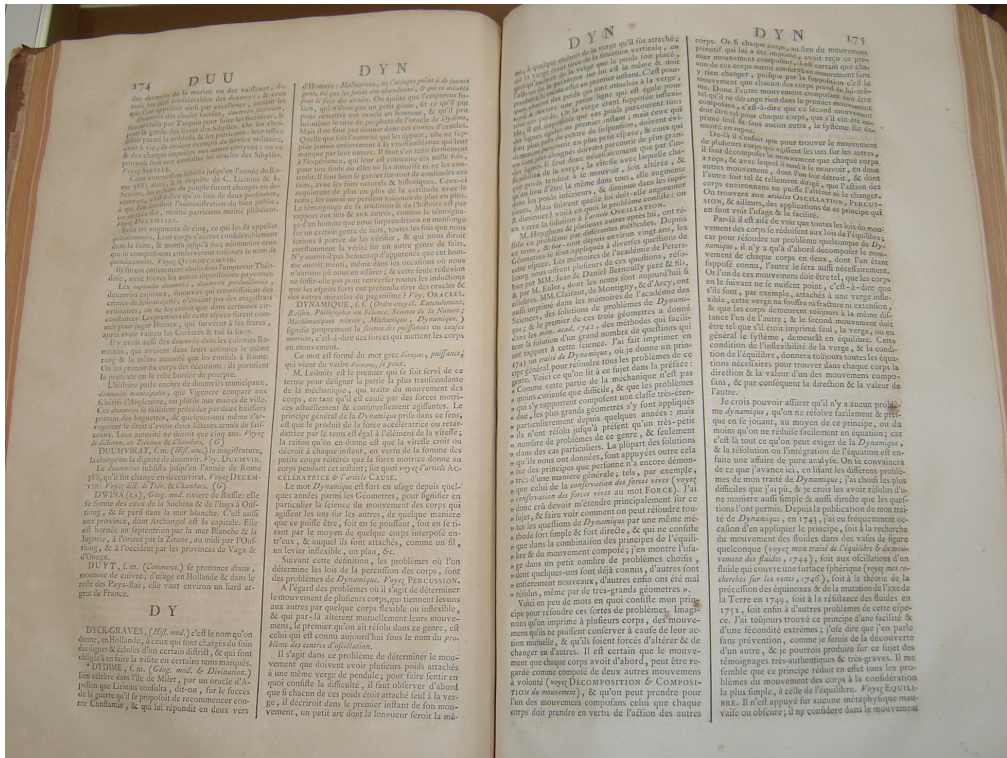


力学



「百科全書（初版）」Dynamique（動力学）の頁（高知大学附属図書館蔵）

高知大学理工学部数学物理学科

津江保彦*

*© Yasuhiko TSUE ホームページは、<http://www.cc.kochi-u.ac.jp/~tsue/>

目次

1章	はじめに	2
§1.1	ニュートンの登場 (1687:プリンピキア) までに知られていたこと	2
§§1.1.1	ケプラー (Kepler) の発見	2
§§1.1.2	ガリレオ (Galileo) の発見	3
2章	ニュートンの法則	5
§2.1	ニュートンの三法則	5
§2.2	単位系	6
3章	ニュートン力学の数学的扱い	7
§3.1	位置と座標系	7
§3.2	ベクトルの演算	8
§3.3	微分係数としての速度・加速度	9
4章	万有引力	10
§4.1	惑星運行の観測事実と万有引力の法則	10
§4.2	地表面付近の重力場	13
5章	微分方程式としてのニュートンの第2法則—運動方程式—	14
§5.1	運動方程式	14
§§5.1.1	地表付近での物体の上下方向の運動	14
§§5.1.2	単振り子	14
§§5.1.3	大気から速さ v に依存した抵抗を受けて自由落下する質点	16
§§5.1.4	演習問題	17
6章	保存則	19
§6.1	運動量保存則	19
§§6.1.1	運動量保存則	19
§§6.1.2	慣性中心	20
§6.2	中心力と角運動量保存則	20
§§6.2.1	中心力	20
§§6.2.2	角運動量保存則	21
§6.3	保存力と力学的エネルギー保存則	22
§§6.3.1	保存力	22
§§6.3.2	エネルギー保存則	23
§6.4	対称性と保存則	24
7章	中心力の問題	25
§7.1	2体問題と換算質量	25
§7.2	角運動量保存則の役割	26
§7.3	中心力場のもとでの運動	27
§7.4	ケプラー問題	28
§7.5	潮の満ち干き	30

§§7.5.1 再び、角運動量保存則	32
8章 粒子の散乱	37
§8.1 散乱角	37
§8.2 散乱断面積	38
§8.3 ラザフォード散乱	39
9章 振動	41
§9.1 単振動	41
§9.2 減衰振動	42
§9.3 強制振動	44
§9.4 摩擦のあるときの強制振動	46
§9.5 パラメータ共鳴	47
§9.6 多自由度系での微小振動	49
§§9.6.1 連成振動	51
§9.7 連続体の振動	54
10章 波動現象	57
§10.1波動方程式	57
§10.2振動数・波長	58
§10.3弾性棒を伝わる波	59
§10.4弦を伝わる波	59
§10.5音波	60
11章 剛体の回転	63
§11.1 回転の表現	63
§§11.1.1回転の行列表示	63
§§11.1.2オイラーの定理とオイラー角	65
§11.2 剛体の角速度・慣性テンソル・角運動量	67
§§11.2.1剛体	67
§§11.2.2角速度	68
§§11.2.3剛体の角運動量と慣性モーメント	69
§§11.2.4剛体の回転のエネルギー	71
§11.3 剛体回転の運動方程式	72
§§11.3.1剛体回転の運動方程式	72
§§11.3.2剛体回転の例:対称コマの自由回転	73
§§11.3.3剛体の釣り合い	74
§11.4 オイラーの運動方程式	75
§11.5 剛体の運動の例	76
§§11.5.1地球の自転	76
§§11.5.2一様な重力場内での対称コマの運動	76
§§11.5.3逆立ちコマ	80
12章非慣性基準系における運動	83

1章 はじめに

§1.1 ニュートンの登場 (1687:プリンピキア) までに知られていたこと

§§1.1.1 ケプラー (Kepler) の発見

デンマーク、ウラニボリ天文台で天文観測を続けていたティコ・ブラーエ (1546-1601) は、惑星運行の『観測』データを 1576 年から 1596 の 20 年にわたって蓄積していた。そこでは、地球から見た太陽と惑星の位置が記されている。この観測データから太陽系像を数学的に構築できなかったが、弟子となったケプラーにより解析される。

ヨハン・ケプラー (1571-1630) はティコ・ブラーエの火星に関する観測データを与えられ、地球と火星の軌道・運行速度を解析した。ケプラーがまず発見したことは

- (0) 火星の軌道面と地球の軌道面の交線上に太陽がある … 太陽が太陽系の中心にあること。
- (1) 火星の軌道は楕円であり、太陽はその焦点にある。
- (2) 面積速度は一定である。

ということであった。後にケプラーの法則として纏まることになる。

(第1法則) すべての惑星は太陽を焦点とする楕円上を運行する。[1609年]

(第2法則) 動径 (太陽と惑星を結ぶ線分) が単位時間に掃く面積は一定である。[1609年]

(第3法則) 惑星の公転周期の2乗は軌道の大きさ (長径) の3乗に比例する。[1619年]

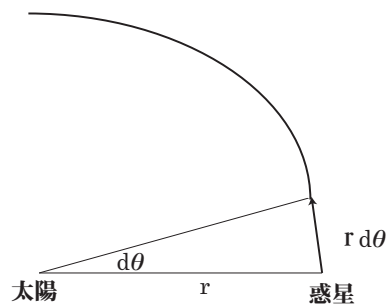


図 1:

ケプラーが如何にしてケプラーの法則に到達したか、紹介しておこう。

◎ケプラーの計算方法

1. S、E、M が一直線に並ぶときをデータから見つけ、このときの時刻を t_0 [s] とする。このとき、E は E_0 にいるとする。
2. 687 日 (火星の周期) 後 (時刻 t_1 [s] とする) の E の位置を E_1 とする。角度 $\theta_1 = \angle E_0SE_1$ はデータからわかる。角度 $\phi_1 = \angle SE_1M$ もデータからわかる。
3. 三角形 MSE_1 の形はこれでわかった。よって、長さ $\overline{SE_1}$ [m] は \overline{SM} [m] 単位でわかる。
4. 同様に、687 日後 (時刻 t_2 [s] とする) にも $\overline{SE_2}$ [m] が \overline{SM} [m] 単位でわかる。
5. これを続けると、軌道の形はわかる。 \implies 第1法則へ。

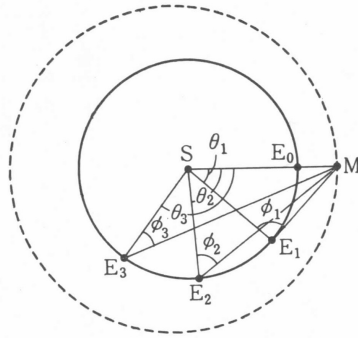


図 2: S · 太陽、E · 地球、M · 火星 (朝永振一郎「物理学とは何だろうか」岩波新書より)

6. E_0, E_1, E_2, \dots がわかったので、対応する時刻 t_0, t_1, t_2, \dots から 365 (地球の 1 周期) の適当な整数倍を引くことにより、太陽を 1 週する過程での地球の通過日時がわかる。よって、軌道上の地球の位置と通過日時から、地球の運行速度が \overline{SM} 単位でわかる。 \implies 第 2 法則へ。
7. E と M の役割を入れ替えて、365 日毎に M の位置を決めていく。すると、今までやったのと同様に、M の軌道、運行速度が \overline{SM} 単位でわかる。
8. 軌道の大きさの比がわかる。公転周期はわかっている。 \implies 第 3 法則へ。

最後に、ケプラーの第 3 法則を観測から確かめておこう。

	軌道長半径 a [天文単位]	周期 T [太陽年]	a^3/T^2
水星	0.3871	0.2409	0.9995
金星	0.7233	0.6152	0.9998
地球	1.0000	1.0000	1.0000
火星	1.5237	1.8809	0.9999
木星	5.2026	11.862	1.0008
土星	9.5549	29.438	1.0052

§§1.1.2 ガリレオ (Galileo) の発見

イタリアのガリレオ・ガリレイ (1564-1642) は、数々の発見をするが、ここでは後に必要となる振り子の等時性と等加速度運動を紹介しておく。

振り子の等時性とは、振り子の周期が振幅に依らないことを言う[†]。

次に、等加速度運動の発見について見ておこう。図 3 のように、斜面を転がる球の進む距離は、最初の単位時間に進んだ距離を 1 とすると、引き続き単位時間に進む距離は 3、引き続き 5、7、9... と進んでいくことが、ガリレオにより実験事実として認められた。これを数式で表現すると、単位時間 $t = 1$ に進む距離を $a/2$ として、時刻 t に進む距離 s は、

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

[†]ガリレオが 19 歳の時、教会のシャンデリアが風に揺れているのを見て発見したと言われている。

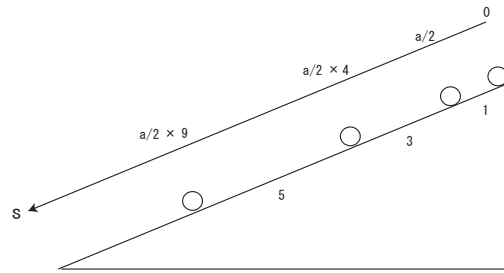


図 3:

と表すことができる。ここで、 a は定数であり、動いた距離を時間で微分したものが速度 v 、すなわち $v = \frac{ds}{dt} = at$ であり、さらに速度の時間変化率 $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$ は加速度である。加速度が一定のこの運動を等加速度運動と呼ぶ。斜面の傾きを 90° にすると、物体の自由落下になる。このときの加速度はおおよそ 9.8 m/s^2 であり、重力加速度と呼び、 g と書く。

最後に、相対性原理を認識していたことに触れておこう。当時の天動説の有力な論拠として、大地が動くなから、高い塔から石を落としたときには石が着地するまでに大地は動き、塔の根本に落ちないはずである、ということが言われていた。ガリレオは投射体の実験からの推論から、一定速度で動く船のマストの上から物体を落下させたときのことを想像し、マストの上から落とした物体は常にマストの根本に落ちるはずと反論し、天動説の論拠を崩した。すなわち、大地が運動しているかどうかは落体運動の結果からはわからないということである。言い換えると、物体が新たな運動を得るとき、その運動はもとの慣性運動に影響を与えることなく合成されるので、慣性運動を共にしている観測者には新たな運動しか見えない、ということになる。この事実は(ガリレイの)相対性原理と呼ばれる。

2章 ニュートンの法則

§2.1 ニュートンの三法則

ケプラー、ガリレイの発見した運動を、より基本的な（少数の）法則から理解することを求めよう。

まず、数学的定式化の第一歩として、ある物体の運動を記述するとき、その大きさが無視できる物体のことを考える。これを質点と呼ぶ。

アイザック・ニュートン(1642-1727)は、次の3つの法則を基本法則と考えた。

第1法則 (慣性の法則)	すべての物体は、外力によって強制されない限り、静止の状態、または直線上の様な運動の状態（等速直線運動）を続ける。
第2法則 (運動の法則)	物体の運動（量）の変化は、作用する力の大きさに比例し、力の向きにおこる。 $F = m a$ (力) = (慣性質量) × (加速度)
第3法則 (作用・反作用の法則)	作用には反作用を伴い、2物体相互の作用は常に大きさが等しく、逆向きである。

法則1は、ガリレオ・ガリレイの慣性の法則を精密化したものであり、慣性系が存在することを述べている。また、“物体は慣性を持つ”ことをも意味する

法則2は法則1を受けて、“運動の変化”と“力”を定量的に結んでいる。すなわち、法則1が成り立つ“慣性系”において法則2は成り立つ。また、物体に働く力は同じでも、“運動形態”には様々なものがあり得ることを暗示している。すなわち、運動形態の多様性は力の多様性に依るという考え方は否定される。ここで、慣性質量と力は第2法則から導けるかについて考察しておこう。2物体間に働く力の大きさを f [N] とすると[‡]、第2法則から、力の向きまで考慮すると

$$f = m_0 a_0, \quad -f = m_1 a_1$$

となる。ここで、負符号は力の向きが反対であることを意味する。したがって、慣性質量 m_1 [kg] は m_0 [kg] を単位質量として

$$m_1 = \left| \frac{a_0}{a_1} \right| m_0$$

と表わすことができる。加速度 a_0 [m/s²]、 a_1 [m/s²] は、「時計」と「物差し」で測れるので、すべての物体の慣性質量は m_0 [kg] を単位に測定できることになる。慣性質量が定義できるので力 f は $f = ma$ [kg m/s²] で決められる。

法則3は法則1とあわせると、幾つかの物体からなる系の“慣性中心(重心)”は静止、または一様な直線運動をすることを示すことができる (§5.1.2で見ると)。体系内の物体同士の相対運動は慣性中心の運動に無関係であることを意味する。これは、ガリレイの相対性原理そのものである。

[‡]単位については §2.3 を見よ。

§ 2.2 単位系

ここでは MKSA 単位系と呼ばれる単位系を用いる。まず、長さ ([L])、時間 ([T])、質量 ([M]) の単位を与える。

長さ (距離) : メートル (m)
 時間 : 秒 (s)
 質量 : キログラム (kg)

その他の力学量はこの 3 つの組み合わせで表せる。たとえば、

速度 : (距離) / (時間) \dots m/s
 加速度 : (速度の変化) / (変化に要した時間) \dots m/s²
 力 : $F = ma$ \dots kg m/s² \equiv N

ここで、力の単位は、普通、kg m/s² の代わりに、N (ニュートン) を用いる。

2019 年 5 月 19 日までは、1 秒は「セシウム 133 原子の基底状態における 2 つの超微細構造準位間の遷移に対応する放射の 9192631770 周期の継続時間」、1m は、「光が 1/299792458 秒間に真空中を進行する距離」、1kg は「フランスのセヴレ市にある国際度量衡標準局に保存されているプラチナ・イリジウム合金円柱の質量」と定義されていた。また、電磁気現象では、長さ、時間、質量に加えて、電流の単位、アンペア ([A]) を用いた。1A は、「1m 離して真空中に平行おかれた導線に、同方向に流れる 2 本の直線電流間に働く力が導線 1m あたり 1N であるときの電流の大きさ」として導入された。

「時間」はもともと、地球の自転、つまり太陽の南中時（高度が最も高くなる時刻）から、次の南中までを 24 時間とし、1 時間を 60 分、1 分を 60 秒として 1 秒を決めていた。「長さ」は、地球の北極から赤道までの距離の 1 万分の 1 を 1 メートルとした。「質量」は 0.1 メートル (10 センチメートル) 四方の直方体に入れた水の質量を 1 キログラムとしていた。これらの量を精確に決めたものが上記の単位の定義であった。

しかしながら、2019 年 5 月 20 日からは、物理の基礎定数を基にして、新たに単位の定義が決め直され、より精度良い定義となった。正確な言い回しではないが、概ね、次のようになった。

- ・ 温度が零ケルビンのセシウム 133 原子の基底状態の 2 つの超微細構造の準位間の遷移に対応する放射の周波数が、秒 (s) を単位として 9192631770 (91 億 9263 万 1770) s⁻¹ (Hz、ヘルツ) と定めることによって秒を定義する。
- ・ 真空中の光の速さが 299792458 m/s となる長さの単位をメートル (m) と定義する。
- ・ プランク定数 h の値を $6.62607015 \times 10^{-34}$ kg m²/s と定めることによって質量の単位、キログラム (kg) を定義する。

プランク定数 h については、「力学 I」では出てこない。「量子力学」の授業に期待してください。

・ 電気素量 e の値を $1.602176634 \times 10^{-19}$ C (クーロン) として電荷の単位クーロン (C) を定義する。
 1 秒間に 1 クーロンの電荷を運ぶ電流が 1 アンペア (A) となる。ついでに、1 秒の定義に出てきた“温度”であるが、次のように定義される。

- ・ ボルツマン定数の値を 1.380649×10^{-23} kg m² / (s² K) と定めることによって温度の単位ケルビン (K) を定義する。

3章 ニュートン力学の数学的扱い

§3.1 位置と座標系

粒子の運動を記述するには、粒子の位置と速度を精確に記述する必要がある。今、位置の記述に際し、基準点 O から、点 P へ、 $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ として、大きさと向きを持つ量、ベクトルで表す。ベクトルは太文字で表わすことにする[§]。

基準点 O からある方向に x 軸をとり、それに垂直な方向に y 軸、さらに x 軸と y 軸に垂直に z 軸をとる。このとき右手の親指、人差し指、中指で3つの直交する軸を表したときに指の向く方向をそれぞれ x 、 y 、 z 軸の正の方向になるように取る（右手系）。これをデカルト座標系と呼ぶ。

長さ1の単位ベクトルをそれぞれの軸の正方向にとり、それらを \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z と書くと位置ベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

と記すことができる。ベクトルを“成分”で表すと、

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書ける。

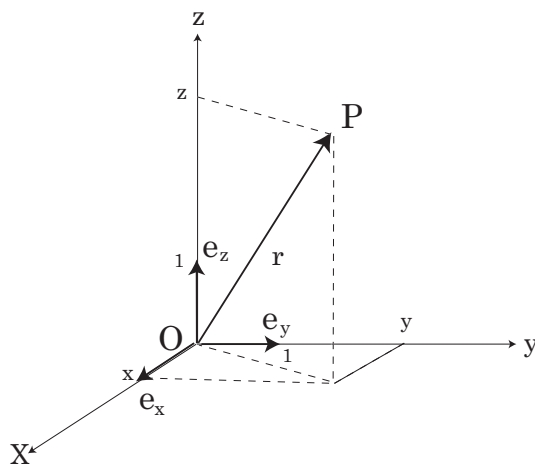


図 4:

[§]高等学校では \vec{a} 等と表わしていたものを、 \mathbf{a} と記す。

§ 3.2 ベクトルの演算

以下、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ 等とする。

- ベクトルの大きさ（長さ）

ベクトルの大きさは、ベクトルの長さのことである。三平方の定理を使うと、容易に

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

であることがわかる。

- ベクトルの加法・減法

2つのベクトルを足し合わせたベクトル

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

は、次の成分を持つ新しいベクトル

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + c_z \end{pmatrix}$$

である。また、減法（引き算）のためには次の関係を知っていればよい。

$$-\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix}$$

こうして、

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) .$$

- ベクトルの内積（スカラー積）

2つのベクトルから、ある数を生じる次の演算を、ベクトルの内積と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= ab \cos \theta . \end{aligned}$$

ここで、 θ は2つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角である。

- ベクトルの外積（ベクトル積）

2つのベクトルから新しいベクトルを生じる次の演算を、ベクトルの外積と呼ぶ。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} .$$

新しいベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を成分で書くと

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

となる。ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が向いている方向は、ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} を含む平面に垂直で、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{e} の順に右手系をなす単位ベクトル \mathbf{e} の方向である。またベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは $ab \sin \theta$ となる。ここで θ は2つのベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} のなす角である：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{e} .$$

(問) \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} を3次元のベクトルとすると、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

§ 3.3 微分係数としての速度・加速度

ある時刻に質点が位置 $\mathbf{r}(t)$ にいたが、微小時間 Δt 経過後には $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ に到達していたとする。すなわち、質点は微小時間 Δt に $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ だけ移動している。このとき、時刻 t での質点の速度 $\mathbf{v}(t)$ は

$$\mathbf{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

により表される。

デカルト座標では、ベクトル表示を成分で表して

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

と書ける。

さらに加速度 $\mathbf{a}(t)$ は速度 $\mathbf{v}(t)$ の変化率であるので、速度を導いたときと同様な考え方で

$$\mathbf{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

と導かれる。デカルト座標では、ベクトル表示を成分で表して

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

と書ける。ここで、 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 等は時間 t についての2階微分である。

(問) x 軸上を、 $x(t) = A \sin(\omega t)$ で運動する質点の速度と加速度を求めよ。また加速度を $x(t)$ を用いて表せ。

(問) 地球をまわる月の軌道はほぼ円形であり、平均半径は 3.84×10^8 m である。月が完全に地球の周りを1回転するには、地球を動かないものとして、27.3日を要する。このとき、月の平均軌道速度、及び向心加速度を求めよ。

4章 万有引力

運動の3法則によって、ケプラーの発見した惑星運動の法則を記述するには、物体間に働く「力の法則」が必要になる。ニュートンは万有引力の法則として、重力質量を持つ物体間に普遍的に働く力を導入した。

万有引力の法則 重力質量を持つ2つの物体間には、両者を結ぶ直線の方に、両物体の重力質量の積に比例し、距離の2乗に反比例する引力が働く。

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2.$$

ここで、 m_1 [kg]、 m_2 [kg] は2物体それぞれの重力質量[¶]、 r [m] は2物体間の距離、 G は万有引力定数と呼ばれる定数である。

§ 4.1 惑星運行の観測事実と万有引力の法則

万有引力の法則を導出するため、ケプラーの観測事実を用いよう。ケプラーは (I) 全ての惑星は太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く、(II) 惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に掃いていく面積速度は一定である、という事実を惑星の観測データから導いていた。観測事実 (I) から、惑星は、太陽を原点として

$$r = \frac{C}{1 + e \cos \theta} \quad (4.1)$$

という楕円軌道を描くことが言える。ここで、 r は太陽と惑星を結ぶ距離であり、 θ は太陽と惑星が最短距離となる惑星の位置の方向に x 軸をとったとき、惑星が居る位置の x 軸からの角度である。このとき、 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ より、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ となるので、(4.1) から、^{||}

$$\frac{(x + ea)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.2)$$

ここで $a = \frac{C}{1 - e^2}$, $b = \frac{C}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 - e^2}$

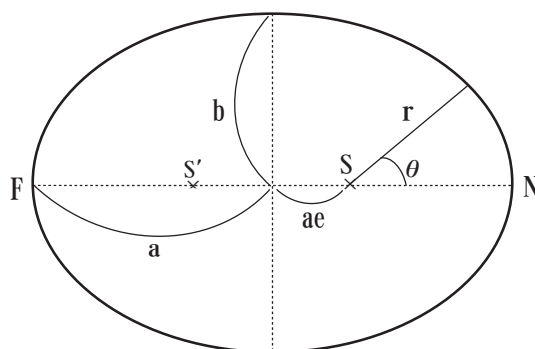


図 5:

[¶]第2法則に現れる「慣性質量」は、物体の“動きにくさ(慣性の大きさ)”を表す量であり、一方、万有引力の法則に現れる「重力質量」は物体間に働く“力の大きさ”を決める量であり、本来無関係なものである。しかし、実験によると、これらの2つの量の比はすべての物体で等しいので、この比を1に取って両者を区別しないことにする。アインシュタインは1915年に、慣性質量と重力質量が同じものであるという「等価原理」のもとで、一般相対性理論を組み立てた。

^{||}(4.1)を両辺逆数をとってから計算すると容易。

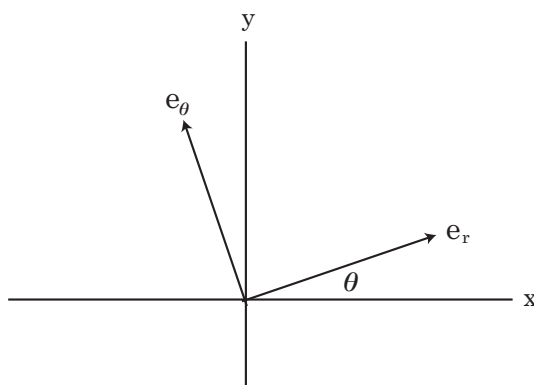


図 6:

と変形できる。これは図5に示されるように、 $x = -ae$ を中心に持つ楕円そのものである。 a は長半径、 b は短半径である。

さて、太陽を原点にとり、太陽から惑星に向く大きさ1の単位ベクトルを e_r 、それに直交する単位ベクトルを e_θ とする (図6)。このとき、

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

となることは図から読み取れる。惑星の運動とともに、これらの単位ベクトルも θ とともに時間変化する。こうして、

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r \quad (4.4)$$

が得られる。今、惑星は

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \quad (4.5)$$

に居るので、惑星の速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta, \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) \mathbf{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (4.6)$$

と計算される。

ここで、ケプラーの観測事実 (II) 面積速度一定の事実を用いよう。図7のように惑星が運動し、微小な角 $d\theta$ だけ移動したとしよう。太陽と惑星を結ぶ線分が掃く面積 dS は、図から三角形を直角三角形と近似して

$$dS = \frac{1}{2}r \cdot r d\theta \quad (4.7)$$

となる。面積の時間変化 $\frac{dS}{dt}$ が面積速度であるので、面積速度を σ で表すと

$$\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (4.8)$$

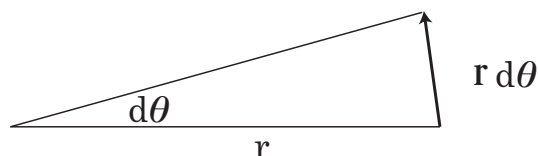


図 7:

となる。今、ケプラーの観測事実から、面積速度は時間に依らず一定なのであるから、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} \left(2r \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \\ &= \frac{r}{2} \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

が成り立つ。もちろん $r \neq 0$ より、第 2 行の右辺の括弧の中が 0 でなければならない。これは、(4.7) の加速度の式の第 2 項と同じなので、 e_θ の項は零になり、惑星が感じる加速度は

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r \quad (4.10)$$

となる。すなわち、加速度は太陽と惑星を結ぶ線分の方角であることがわかった。

さて、(4.10) を計算するために、ケプラーの観測事実 (I)、すなわち惑星は太陽を楕円の焦点に持つ楕円軌道を描くこと、(4.1) に戻ろう。この式を時間で微分すると

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C e \frac{d\theta}{dt} \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{2e\sigma}{C} \sin \theta \quad (4.11)$$

が得られる。ここで、2 番目の等号では、面積速度 (4.8) と楕円の式 (4.1) を用いて、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\sigma}{r^2} = \frac{2\sigma(1 + e \cos \theta)^2}{C^2} \quad (4.12)$$

と変形できることを用いた。(4.11) をもう一度時間で微分すると

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{2e\sigma}{C} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta = \frac{4e\sigma^2}{Cr^2} \cos \theta \quad (4.13)$$

が得られる。ここで、面積速度一定から $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ を用い、さらに (4.12) を用いて $\frac{d\theta}{dt}$ を消去した。一方、(4.12) を再び用いると

$$r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = r \left(\frac{2\sigma}{r^2} \right)^2 = \frac{4\sigma^2}{r^3} = \frac{4\sigma^2}{Cr^2} (1 + e \cos \theta) \quad (4.14)$$

が得られる。最後の等式で、一つだけ r に (4.1) を用いた。こうして、惑星の加速度 (4.10) は、(4.13) と (4.14) を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r \\ &= -\frac{4\sigma^2}{Cr^2} \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (4.15)$$

と得られる。こうして惑星が受ける力 $m\mathbf{a}$ は、

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{4\sigma^2}{C} \cdot \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (4.16)$$

となる。 σ^2 も C も正の量であるので、惑星が受ける力は $-\mathbf{e}_r$ の方向、すなわち太陽を向く引力となることがわかる。また、作用・反作用の法則を考えると、力の大きさが同じで逆向きの力を太陽は受ける。太陽が受ける力も $\mathbf{F}_\odot = M\mathbf{a}'$ の形をしているはずである。ここで、 M は太陽の質量である。 \mathbf{F} と \mathbf{F}_\odot は向きが逆で大きさが等しいので、 \mathbf{F} にも M が積でかからなければならない。こうして、太陽から惑星が受ける力は、未定の定数を G として ($\frac{4\sigma^2}{C} = GM$ として)、

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (4.17)$$

と得られる。質量 M 、 m の 2 物体が距離 r だけ離れているときに働く上記の力 \mathbf{F} は万有引力または重力と呼ばれる。

§ 4.2 地表面付近の重力場

地球を一様な球とし、その質量を M [kg]、半径を R [m]、地表から物体までの距離を h [m] とすると、質量 m [kg] の地上物体に働く力の大きさは $f = G \frac{mM}{(R+h)^2}$ である。地表から物体までの距離 h [m] が地球の半径 R [m] に比べて十分小さいとすると、分母の h を R に対して無視して良いであろう。この力 f [N] により物体は力を受けて加速度が生じるとすると、その加速度を g [m/s²] と書くことにして、

$$mg = f \approx G \frac{mM}{R^2}, \quad \text{i.e.,} \quad g = G \frac{M}{R^2}.$$

よって、重力の法則から、地表付近では物体に依らず、物体は一定の加速度 g のもとで鉛直下向きに $f = mg$ の力を受けて運動することが言える。この g が重力加速度である。その値はおよそ $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ である。

5章 微分方程式としてのニュートンの第2法則—運動方程式—

§5.1 運動方程式

ニュートンの第2法則を数式で表そう。質点に働く力を \mathbf{F} [N]、質点の質量を m [kg] とし、速度を \mathbf{v} [m/s] とする*。今、運動量 \mathbf{p} を次のように導入しておく。

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} .$$

すなわち、(運動量)=(質量)×(速度) である。このとき、ニュートンの第2法則は次のように、時間に関する微分方程式として表される：

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} . \quad \left(\text{または} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \right)$$

質量 m が時間に関して不変であれば、それを時間微分の前に出しておこう。また、速度は質点の位置ベクトルの1階時間微分であることから、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

と書ける。

§§5.1.1 地表付近での物体の上下方向の運動

鉛直下向きに z 軸をとろう。重力加速度を g [m/s²] とし、物体は下向きに力 mg [N] を受けるので、運動方程式は

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) = mg$$

となる。両辺 m で割っておいてから時間について1回積分すると

$$v_z \equiv \frac{dz(t)}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) dt = \int g dt = gt + v_0 .$$

ここで、 v_0 [m/s] は時刻 $t = 0$ での速度であり、“初速度”と呼ばれる。さらに時間について積分すると

$$z(t) = \int \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) dt = \int (gt + v_0) dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 .$$

ここで、 z_0 は $t = 0$ での質点の位置である。

v_0 、 z_0 をそれぞれ、速度、位置の初期条件という。ニュートンの運動方程式は時間に関して2階微分方程式なので、2回積分することにより2つの積分定数が現れるが、それは初期条件により決められる。今の場合、初速度 $v_0 = 0$ のとき、質点は自由落下するという。このとき、質点の進む距離は、 $\frac{1}{2}g$ を単位にして、 $t = 0 \sim 1$ 、 $1 \sim 2$ 、 $2 \sim 3$ 、 $3 \sim 4$ 、 \dots に対して、1、3、5、7、 \dots である。これはガリレイが発見した落体の等加速度運動に他ならない。

§§5.1.2 単振り子

地上物体の運動の別の例として、単振り子を見ておこう。質量の無視できる長さ l [m] のひもの先に、重りとして質量 m [kg] の質点がついていて、振り子運動をしているとする(図8)。ただし時刻 $t = 0$ で重りは鉛直

*以下では関数の引数 t をしばしば省略する。ここで、 t [s] は時間を表わす。

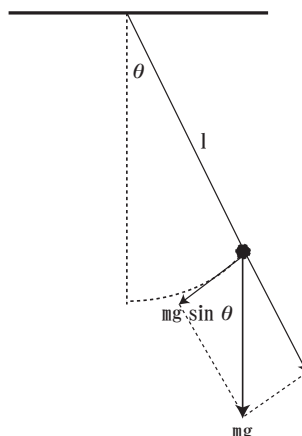


図 8:

から測った角度 θ_0 [rad] にあり、初速度は 0 とする。重力加速度を g [m/s²] とし、重りが動く方向 (接線方向) の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l\theta) = -mg \sin \theta$$

となる。ここで θ [rad] は鉛直から測ったひもの角度である。今、振れ幅が小さいとすると、角度 θ は微小だから三角関数を近似して $\sin \theta \approx \theta$ とできる。このとき運動方程式は

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -mg\theta \quad , \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l} \theta$$

と書ける。2階微分して負号がついて (係数を除いて) 元に戻る関数は三角関数であるので、この運動方程式の解としては、一般に

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right)$$

が得られる。ここで、 A 、 α は初期条件で決められるべき定数である。時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ としたので、 $A \cos \alpha = \theta_0$ が得られる。また速度は $v = l \frac{d\theta}{dt} = -lA \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right)$ より、 $t = 0$ で $v = 0$ から $-A\sqrt{lg} \sin \alpha = 0$ が得られる。これより $\alpha = 0$ 、よって $A = \theta_0$ となるので、最終的に求める解は

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

である。

振り子が一振れして元に戻ってくるまでに要する時間 T [s] は、上で求めた解より、三角関数がもとの値に戻る時間であるので

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi \quad , \quad \text{すなわち} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる。この T を振り子の周期と呼ぶ。今扱ったように振れ幅が小さいとした範囲では、周期は振れ幅に依存せず、ひもの長さ (と重力加速度) にのみ依存する。これが、ガリレイの発見した振り子の等時性と呼ばれることである。

§5.1.3 大気から速さ v に依存した抵抗を受けて自由落下する質点

空気中での物体の運動は、空気から抵抗力を受けているはずである。ここでは、(i) 速さに比例する抵抗力 μv (μ は定数) を受ける場合、及び (ii) 速さの 2 乗に比例した抵抗力 γv^2 (γ は定数) を受ける場合、の 2 つの場合について[†]、重力と抵抗力が釣り合ったときの速度を求めておこう。

鉛直下向きに z 軸をとる。重力加速度を g と書くと、運動方程式は、(i)、(ii) の場合それぞれについて

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v, \quad \text{for (i)}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2, \quad \text{for (ii)}$$

と書ける。ここで、 z 方向の速度成分を v と書いた。重力と抵抗力が釣り合った状況では、速度に変化はなく、

$$mg = \mu v, \quad \text{for (i)}$$

$$mg = \gamma v^2, \quad \text{for (ii)}$$

となる。よって、その時の速度—これを終端速度と呼ぶ—をそれぞれ v_1 、 v_2 と書くと、それらは、鉛直下向きで、それぞれ

$$v_1 = \frac{mg}{\mu}, \quad \text{for (i)}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}, \quad \text{for (ii)}$$

となる。

参考までに、雨粒の落下を考えておこう。速さに比例した抵抗力のことを粘性抵抗と呼ぶ。詳しいことは連続体力学を学ばなければならないので、結果を示しておこう。粘性係数と呼ばれる量を η とし、雨粒が球だとしてその半径を a とすると、速さに比例した抵抗の係数 μ は

$$\mu = 6\pi a \eta, \quad \text{抵抗力} = F = \mu v. \quad (5.18)$$

と表わされることが知られている。以下に必要な数値を表にしておく。

	η [kg/m·s]	ρ 密度 [kg/m ³]
空気 (20 °C、1 気圧)	1.8×10^{-5}	1.2
水 (20 °C)	1.0×10^{-3}	1.0×10^3

終端速度 ($v(t \rightarrow \infty) \equiv v_1$) は

$$v_1 = \frac{mg}{\mu} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho \cdot g}{6\pi a \eta} \sim 120 \times (a[\text{mm}])^2 [\text{m/s}]. \quad (5.19)$$

[†]物体の速さが小さいときは、大気からの抵抗力を速度の大きさに展開して、第 1 項が速度の 1 乗、第 2 項が速度の 2 乗、以下…のようになると思われるが、以下で見るとある程度の大きさの物体は速度の 2 乗に比例した抵抗が主要となる。速度の 1 乗に比例した抵抗は粘性抵抗と呼ばれ、大気の粘性による抵抗であり、物体の接線方向に働く。一方、速度の 2 乗に比例する抵抗は慣性抵抗と呼ばれ、大気中の分子が物体表面に垂直に衝突することによって生じる抵抗力である。物体が速さ v [m/s] で運動していると、物体の静止系から見て大気中の分子は速さ v で物体に衝突してくる。大気の密度を ρ [kg/m³] とすると、単位体積あたり運動量 $p = \rho v$ [kg m/s/m³] を持って衝突してくる。この運動量をすべて物体が受けるとすると、単位時間・単位面積あたり物体から v [m³/(sm²)] まで離れた領域中の分子が物体に衝突するので、このとき物体が受ける単位時間・単位面積あたりの運動量は $p v$ [kg m/s/(sm²)] となる。微小時間 Δt [s] に物体が受ける単位面積あたりの運動量 Δp は $\Delta p = p v \Delta t = \rho v^2 \Delta t$ となり、単位面積あたり物体が受ける力 f は $f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho v^2$ となり、速さの 2 乗に比例することがわかる。また、慣性抵抗と粘性抵抗の比をレイノルズ数と呼び、流体力学で重要な量となる。一般にレイノルズ数 Re は、物体の典型的な大きさを l 、速度を u 、媒質の密度を ρ 、粘性係数を η として $Re = \frac{\rho u l}{\eta}$ と表わされる。(5.18) 式と (5.20) 式を用いて確かめてみよ。ただし、数係数は除く。

となる。半径 1 mm の雨粒として、 $v_1 \sim 120$ [m/s] は速すぎるように思える。

では、速さの 2 乗に比例した抵抗力を考えてみよう。これは慣性抵抗と呼ばれる。速さの 2 乗に比例した抵抗の係数 γ は、雨粒の周りの空気の密度を ρ として、

$$\gamma = \frac{\pi}{4} \rho a^2, \quad \text{抵抗力} = F = \gamma v^2 \quad (5.20)$$

と表わされる。こうして終端速度 v_2 は、

$$v_2 = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{\pi}{4} \rho a^2}} \sim 6.60 \sqrt{a[\text{mm}]} \quad [\text{m/s}] \quad (5.21)$$

と書ける。

実測値と比較してみよう (「一般物理学 上 (太田信義 著) 丸善株式会社」より引用)。

半径 a [mm]	0.05	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0
測定速度 [m/s]	0.27	2.06	4.03	6.49	8.06	8.83
v_1 (粘性抵抗のみ) [m/s]	0.30	7.56	30	120	270	480
v_2 (慣性抵抗のみ) [m/s]	1.48	3.30	4.67	6.60	8.08	9.33

§§5.1.4 演習問題

(問) 質量 m [kg] の質点が水平面と角度 θ_0 [rad] をなす方向に、初速度の大きさ v_0 [m/s] で投げ出された場合を考える。空気抵抗などの重力以外の効果を見捨て、次の各問いに答えよ。ただし重力加速度を g [m/s²] とする。

1. 水平方向 (x 方向とする) と鉛直方向 (y 方向とし、鉛直上向きに y 軸をとる) にわけて、運動方程式を書き下せ。

$$[\text{答え}] \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

2. 上記で記した運動方程式を解き、 $x = \dots$ 、 $y = \dots$ の形に記せ。

$$[\text{答え}] \quad x = v_0 t \cos \theta_0, \quad y = v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

3. 2. で、時間 t を消去し、質点の軌道の式を導け。

$$[\text{答え}] \quad y = x \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

4. 水平面での到達距離を求めよ。

$$[\text{答え}] \quad \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

5. 到達距離が最大となるための投射角 θ_0 は、いくらか。

$$[\text{答え}] \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad (= 45^\circ)$$

(問) 摩擦のない水平な床の上で、バネに結びつけられている質量 m [kg] の質点が水平方向に単振動しているとする。バネの自然の長さからの変位を x [m] とすると、質点には $F = -kx$ [N] の力が働く。ここに k [N/m] はバネ定数である。このときの運動を論じ、振動の周期 T [s] を求めよ。

(問) 大気から速さ v [m/s] に依存した抵抗、 μv [N] (μ : 定数) を受けて質点が初速 v_0 [m/s] で落下するとき、

1. 重力加速度を g [m/s²] として運動方程式をたてよ。

[答え] 鉛直下向きに z 軸をとると、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= mg - \mu v \\ &= mg - \mu \frac{dz}{dt} . \end{aligned}$$

2. 1. の微分方程式を解き、速度、位置を時間 t の関数として求めよ。

速度 v について解く。運動方程式は v を用いて

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v .$$

と書ける。よって、上式から左辺に v 、右辺に t に関する量を分離して

$$\frac{m dv}{mg - \mu v} = dt .$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$-\frac{m}{\mu} [\ln(mg - \mu v)]_{v_0}^v = t - t_0 .$$

となる。ただし、初期時刻 $t = t_0$ で初速 $v = v_0$ として。今、 $t_0 = 0$ としても一般性を失わないので $t_0 = 0$ としておく。よって、

$$-\frac{m}{\mu} \ln \left(\frac{mg - \mu v}{mg - \mu v_0} \right) = t .$$

これを整理して、

$$v \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{mg}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu v_0}{mg} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{m} t \right) \right]$$

を得る。さらに t で積分して、 $t = 0$ で質点の位置を $z = z_0$ とすると、

$$z = \frac{mg}{\mu} t + \frac{m^2 g}{\mu^2} \left(1 - \frac{\mu v_0}{mg} \right) (e^{-\mu t/m} - 1) + z_0$$

を得る。

3. 時刻が $t \rightarrow \infty$ での速度を求めよ。

2つ前の式で、 $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$v = \frac{mg}{\mu} .$$

が得られる。これは先に求めた終端速度に一致している。

6章 保存則

時間にかかわらずある量が一定値を取り続けるとき、その物理量に対して保存法則が存在すると言い、その物理量を保存量と呼ぶ。以下では N 個の質点系で話を進める。

§6.1 運動量保存則

§§6.1.1 運動量保存則

2つの質点(1, 2とする)を考え、それぞれの質量を m_1 [kg]、 m_2 [kg] とし、これらは時間とともに変化しないとする。質点1に働く力は質点2から及ぼされており、これを \mathbf{F}_{12} [N] と書こう。逆に質点2に働く力は作用・反作用の(ニュートンの第3)法則から、質点1から及ぼされており、これを \mathbf{F}_{21} [N] と表す。作用・反作用の法則から、お互いに及ぼしあう力は大きさが同じで向きが反対であるので、ベクトルで表すと

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

と書ける。この記法に倣って、 a 番目 ($a = 1, 2, \dots, N$) の質点の質量を m_a [kg]、この質点が b 番目 (ただし $b \neq a$) の質点から受ける力を \mathbf{F}_{ab} と書こう。作用・反作用の法則から

$$\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$$

が満たされている。運動方程式は

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab}$$

となる。ここで、質点 a の位置を \mathbf{r}_a で表した。質点 a に働く力は、自分自身以外の質点 $b (\neq a)$ から受ける力の合力であるので、 $\sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab}$ となる。この運動方程式を、すべての質点に対して足し合わせよう。すなわち、 a について和を取るとのことである：

$$\sum_{a=1}^N m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab}$$

このとき、右辺に注目して、その半分の和の記号 a と b を入れ替えよう。

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N \sum_{a=1, a \neq b}^N \mathbf{F}_{ba} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N (\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{ba}) \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の等式では、作用・反作用の法則 $\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$ を用いた。こうして、

$$\sum_{a=1}^N m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \mathbf{0}$$

が得られる。今、前に定義し、導入しておいた運動量ベクトル

$$\mathbf{p}_a \equiv m_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}, \quad (a \text{ は質点を区別する番号})$$

を用いると、上式は

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a \right) = \mathbf{0},$$

$$\text{積分して} \quad \mathbf{P} \equiv \sum_a^N \mathbf{p}_a = (\text{時間に依らない定ベクトル})$$

となる。これは、全ての質点の運動量のベクトル的な和は時間にかかわらず一定値をとることを意味している。これを運動量保存則と呼ぶ。また \mathbf{P} は系の全運動量である。

§§6.1.2 慣性中心

慣性中心のベクトル、 \mathbf{R} を次のように導入しよう：

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\sum_{a=1}^N m_a \mathbf{r}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}.$$

このとき、慣性中心の速度は、慣性中心の座標を時間で微分することにより

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}}{\sum_{a=1}^N m_a} = \frac{\sum_{a=1}^N \mathbf{p}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}$$

と得られる。全運動量 \mathbf{P} 、及び全質量 $M \equiv \sum_{a=1}^N m_a$ を用いると、上式は

$$\mathbf{P} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

と表される。したがって、全運動量 \mathbf{P} は、系の全質量 (M) × 慣性中心の速度 $\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)$ という、期待される形を持っている。また、全運動量は保存する $\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}\right)$ ので、慣性中心は全運動量が保存するときあたかも質量 M を持った、力を受けない 1 個の質点と同様な運動をすることがわかる。すなわち、質点間相互の運動が解ければ、そのあと全系の慣性中心の慣性運動を重畳すればすべての運動がわかったことになる。

§ 6.2 中心力と角運動量保存則

§§6.2.1 中心力

互いに力を及ぼす 2 つの質点間を結ぶ方向に、その力の向きが向いているとき、この力を中心力と呼ぶ。要するに、質点を結ぶ線と力が平行であるということである。

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 // \mathbf{F}_{12}, \quad \text{または} \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

今、 N 個の質点系を考えているので、任意の 2 質点 a, b (ただし $a \neq b$) に対し、力が中心力であれば

$$\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b // \mathbf{F}_{ab}, \quad \text{または} \quad (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{ab} = \mathbf{0}.$$

が成り立っている。

§§6.2.2 角運動量保存則

互いに力を及ぼし合う質点を考える。このとき力は中心力であるとする。 a 番目の質点に対する運動方程式は

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab}$$

であった。両辺に \mathbf{r}_a との外積を取ろう。

$$\mathbf{r}_a \times m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \mathbf{r}_a \times \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{F}_{ab}.$$

得られた式を全ての質点 a について足し算をし、作用・反作用の法則、及び力が中心力であることを用いて計算していこう：

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \times m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} \quad (6.22)$$

ここで、右辺に注目する。運動量保存則を示す際に行ったのと同様に、和を半分ずつにして、和の記号を取り替えると

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N \sum_{a=1, a \neq b}^N \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{ba} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N \mathbf{r}_a \times \mathbf{F}_{ab} - \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N \sum_{a=1, a \neq b}^N \mathbf{r}_b \times \mathbf{F}_{ab} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1, b \neq a}^N (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}_{ab} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ここで、右辺第 1 行目から 2 行目へは第 2 項で和の記号を $a \leftrightarrow b$ ととりかえ、第 2 行目から第 3 行目へは作用・反作用の法則 ($\mathbf{F}_{ab} = -\mathbf{F}_{ba}$) を使い、3 行目から 4 行目はそれを纏めたものであり。4 行目から 5 行目へは、力が中心力であることを用いた。さて、(6.22) 式の左辺に戻ろう。同じベクトルの外積は常に $\mathbf{0}$ であること、 $\frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} = \mathbf{0}$ に注意して左辺を書き直しておく

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \times m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}_a \times \left(m_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \times \left(m_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \right) \right]$$

の様に表すことができる。こうして、(6.22) 式は

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{a=1}^N \mathbf{r}_a \times \left(m_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \right) \right] = \mathbf{0}$$

となる。これは左辺の [...] の量が時間に依存していないことを示している。ここで、質点 a の角運動量 \mathbf{L}_a 、及び系の“全角運動量” \mathbf{L} を次のように定義し、導入しよう：

$$\mathbf{L}_a \equiv \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a \left(= m_a \mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \right),$$

$$\mathbf{L} = \sum_{a=1}^N \mathbf{L}_a.$$

これを用いると先ほどの式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \text{積分して、} \quad \mathbf{L} = (\text{時間に依存しない定ベクトル})$$

となる。これを角運動量保存則と呼ぶ。

§ 6.3 保存力と力学的エネルギー保存則

§6.3.1 保存力

力 \mathbf{F} [N] が作用しているもとの、質点のある微小な位置変化 $d\mathbf{r}'$ [m] を考えよう。力 \mathbf{F} と位置変化 $d\mathbf{r}'$ のなす角を θ [rad] とすると、力 \mathbf{F} の、 $d\mathbf{r}'$ 方向の成分は、 $|\mathbf{F}| \cos \theta$ である。この力の成分によって質点はその方向に $|d\mathbf{r}'|$ だけ動くので、その積は、内積を使って

$$|\mathbf{F}| \cos \theta |d\mathbf{r}'| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

となる。これを、力 \mathbf{F} によって為された仕事と呼ぼう。位置 \mathbf{r}_0 から \mathbf{r} まで質点が力 \mathbf{F} のもとので運ばれたとすると、為された仕事は、すべての微小な仕事の和をとって、

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

と書ける。

さて、このとき、力 \mathbf{F} の為した仕事が途中の道筋に依らず、あるスカラー関数（これをポテンシャルエネルギーという）の始点と終点における値の差で書けるとき、この力 \mathbf{F} を保存力と言う。すなわち、力 \mathbf{F} が保存力の時、位置 \mathbf{r} の関数であるポテンシャルエネルギーを $V(\mathbf{r})$ として、

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r})$$

と書ける。逆に、力 \mathbf{F} が保存力の時には、ポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = -\text{grad } V(\mathbf{r}) \quad (= -\nabla V(\mathbf{r}))$$

と、ポテンシャルエネルギーの勾配（に負号をつけたもの）で表すことができる。

§§6.3.2 エネルギー保存則

今、一つの質点に話を限ろう。多粒子にするにはそのまま和を取ればよい。質量 m [kg] の質点に対する運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

と書ける。 \mathbf{r} は質点の位置ベクトルである。両辺に速度 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ との内積をとろう：

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

左辺は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right]$$

と変形できるので、上式は

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right] = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

となる。時刻 t_0 [s] から t [s] まで積分すると

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right] dt = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

と書ける。左辺は時間微分の時間積分という形をしているので、簡単に

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right] dt = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} \right)^2$$

が得られる。右辺は、力が保存力のとき、

$$\int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{\mathbf{r}(t_0)}^{\mathbf{r}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{r}(t_0)) - V(\mathbf{r}(t))$$

となる。すなわち、

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} \right)^2 = V(\mathbf{r}(t_0)) - V(\mathbf{r}(t))$$

ここで、時刻 t の量を左辺に、 t_0 の量を右辺にまとめると

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right)^2 + V(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} \right)^2 + V(\mathbf{r}(t_0))$$

時刻 t は任意であるので、

$$E \equiv \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + V(\mathbf{r})$$

で定義される量は時間にかかわらず一定値をとるということを意味する。ここで、 E を力学的エネルギーと呼び、 E が時間にかかわらず一定値をとることを力学的エネルギー保存則と呼ぶ。 E の右辺第1項は、運動エネルギーと呼ばれる。第2項は前節のポテンシャルエネルギーである。

(問) 力が万有引力(重力)のとき ($\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r$, 但し \mathbf{e}_r は \mathbf{r} 方向の単位ベクトルである。) ポテンシャルエネルギー $V(r)$ を求めよ。
 (答え : $V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$)

§ 6.4 対称性と保存則

保存法則が成り立つためには、自然界が具えている対称性が背後に存在している。簡単にこのことを見ておこう。

2つの質点1、2の間に保存力が及ぼし合うとしよう。ポテンシャルエネルギーは、2つの質点の位置の関数であり、 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ と記す。質点1、2に働く力 \mathbf{F}_{12} 、 \mathbf{F}_{21} は

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2}$$

となる。空間座標を一斉に \mathbf{a} だけずらしたとしよう。座標原点を $-\mathbf{a}$ だけずらして座標を取り直したとしてもよい。もし、空間が一様（特別な場所が存在しない）とすれば、ポテンシャルエネルギーはこの変換で変化しないであろう。したがって、空間が一様であればポテンシャルエネルギーは、2質点の位置の差の関数でなければならない： $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 。なぜなら、このときのみ、空間を \mathbf{a} だけずらしても物理法則、すなわち自然は変わらない：

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}) &= V([\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}] - [\mathbf{r}_2 + \mathbf{a}]) \\ &= V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) . \end{aligned}$$

このとき、この節の最初の式から、質点に働く力は、それぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \\ \mathbf{F}_{21} &= -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = \frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = -\mathbf{F}_{12} . \end{aligned}$$

2行目最後の等式は1行目の最右辺と見比べると成り立つことがわかる。これはニュートンの第3法則（作用・反作用の法則）であり、作用・反作用の法則は空間の一様性の結果、成り立つ法則であることがわかる。前に、作用・反作用の法則が成り立つことに基づいて、運動量保存則を導いた。よって、運動量保存則は空間の持つ対称性の一つである空間の一様性から帰結される保存則であることが理解される。

もう一つ、空間の持つ対称性を考察してみよう。先程は空間の一様性から、2質点系のポテンシャルエネルギーは $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ の関数であることを理解したが、これはベクトルであるので、その向きと大きさに依存することを意味する。空間に特別な方向が無いとすると、空間を回転させても物理法則は変わらないはずである。すなわち、空間に設定した3つの座標軸を回転して別の座標軸を取って力学法則を記述しても同じ結果が得られるはずである。したがって、ポテンシャルエネルギーはベクトル $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ の大きさにのみ依存すべきである。（方向には依存すべきでない。）よって、

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \implies V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \equiv V(r) .$$

ここで、簡単のために $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と、相対位置ベクトル \mathbf{r} を導入した。 r はその大きさである。このときには力 \mathbf{F} は

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

となる。すなわち、力 \mathbf{F} は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と平行であり、中心力になっている。小節Bでは力が中心力であるということに基づき、角運動量保存則が導かれた。すなわち、角運動量が保存するのは、空間の等方性（空間に特別な方向が無い）という自然の持つ対称性の帰結である。

では、エネルギーは何故保存するのか？これは時間の一様性に結びついている保存法則であることだけをここでは述べておく。

7章 中心力の問題

§ 7.1 2体問題と換算質量

粒子1 (質量 m_1 [kg]) が位置 \mathbf{r}_1 に、粒子2 (質量 m_2 [kg]) が位置 \mathbf{r}_2 に居たとする。この2物体は互いに力を及ぼしているとしよう。このとき、慣性中心の座標 \mathbf{R} と、相対座標 \mathbf{r} を導入する。

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

逆に、慣性中心の座標と相対座標を粒子の位置座標で表わすと

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \\ \text{但し} & & M &= m_1 + m_2 \end{aligned}$$

となる。粒子1が粒子2から及ぼされる力を \mathbf{F}_{12} [N]、粒子2が粒子1から及ぼされる力を \mathbf{F}_{21} [N] とすると、作用・反作用の法則から $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ となる。こうして、ニュートン方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

と書ける。今、 \mathbf{r}_1 、 \mathbf{r}_2 を \mathbf{R} と \mathbf{r} で表すと、上のニュートン方程式は

$$m_1 \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{m_2}{M} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - \frac{m_1}{M} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = -\mathbf{F}_{12}$$

となるが、辺々足したり引いたりすることで、

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &= \mathbf{0}, & \mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F}_{12}, \\ \text{ここで} & & \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{7.23}$$

を得る。ここで、 μ は換算質量と呼ばれる。上の第1式は、2粒子の慣性中心 \mathbf{R} は等速直線運動、 $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (\text{一定})$ をすることを示している。第2番目の運動方程式は、相対座標 \mathbf{r} の変化が力を受けて起きることを意味する。こうして、互いに相互作用を及ぼす2粒子問題は、あたかも換算質量 μ [kg] を持った1粒子が力を受けて運動しているとのみ考えればよいことになる。

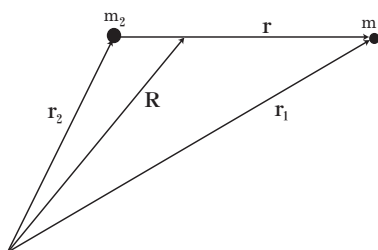


図 9:

§ 7.2 角運動量保存則の役割

空間の等方性から、2物体間の相互作用を表すポテンシャルエネルギーも r の大きさにしかよらない。このポテンシャルエネルギーから導かれる力を中心力と呼んだ。力の中心を原点にとると

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV(r)}{dr} \mathbf{e}_r$$

となる。ここで \mathbf{e}_r は r -方向の単位ベクトル $\left(\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right)$ である。例えば中心力として重力を考えよう。

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad \rightarrow \mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r, \\ \alpha = Gm_1m_2$$

ここで、 α として $\alpha = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ ととり、 q_1, q_2 を物体が持つ電荷、 ϵ_0 を誘電率とすると、2つの荷電粒子間のクーロン力を扱うことになる。

力が中心力の場合には当然、角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は保存するベクトルである。ここで、 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0$ となることはベクトルの計算から簡単に確かめられるので、角運動量ベクトルと質点の位置ベクトルは互いに直交していることがわかる。したがって、角運動量が保存しているときには、位置ベクトル \mathbf{r} は、時間と共に変化しない保存するベクトル \mathbf{L} に垂直であり、質点の位置ベクトルは常に \mathbf{L} に垂直な平面内にあることになる。すなわち質点は角運動量ベクトルに垂直な、ある平面内でしか運動できない。この事実は物体の運動の軌道面が存在することを意味する。よって、中心力場の問題は、2次元平面で考えればよい。

そこで、この平面を x - y -平面にとる。さらに x, y の代わりに、“極座標” (r, θ) をとる。すなわち、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

の関係から、 r と θ を導入する。ここで、 r は原点から質点までの距離、 θ は原点と質点を結ぶ線分が x -軸となす角である (図 10)。このとき、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

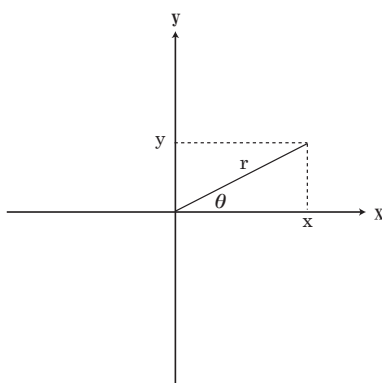


図 10:

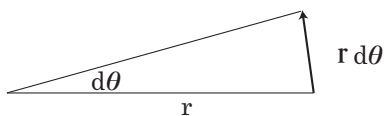


図 11:

となる。角運動量をこの座標系で計算しておこう。 L_x と L_y はともに 0 になる。 L_z は

$$\begin{aligned} L_z &= xp_y - yp_x \\ &= m \left[r \cos \theta \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \\ &= mr^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

となる。

ここで、角運動量の保存則を幾何学的に見ておこう。原点と質点を結ぶ線分が微小な時間に掃いていく面積を dS として表すと、それは近似的に三角形として

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$$

と表せる (図 11)。微小時刻 dt で割った後、 $dt \rightarrow 0$ の極限を取り、微分で表すと

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

となるが、先ほど導いた角運動量で表すと

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} L_z$$

となる。角運動量保存則から L_z は一定値をとるので、結局 $\frac{dS}{dt}$ は時間に依存せず一定であることがわかる。これは面積速度一定の法則と呼ばれることのある、ケプラーの発見した惑星運動の観測事実に他ならない。

§ 7.3 中心力場のもとでの運動

さて、ここからは角運動量の大きさを L と書くことにする。今、 $L_x = L_y = 0$ なので、 $L_z = L$ である。上で導いた式 $\left(L_z = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$ より

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

と表される。この関係を用いると、エネルギーは、極座標表示で

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + V(r) \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + V(r) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left[V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right] \end{aligned}$$

と書ける。ここに現れた $U_{\text{cf}} \equiv \frac{L^2}{2mr^2}$ は、遠心力ポテンシャルと見なせる。実際、 U_{cf} をポテンシャルエネルギーと見なしてこの項から導かれる力は、

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \frac{L^2}{mr^3} \mathbf{e}_r$$

であり、方向は中心から外に向かう方向、すなわち、遠心力である。運動が円運動のときには、角運動量 L は簡単に $|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = mrv$ となるので遠心力の大きさは、 $\frac{mv^2}{r}$ の形になる。

さて、先程導かれたエネルギーの表式を使うと

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

が得られる。さらに $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ の関係を使うと、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}$$

となるので、これらの上記2式より、

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

が得られ、結局これを積分することにより

$$\theta = \int \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} dr + (\text{積分定数}) \quad (7.24)$$

が得られる。この右辺の積分を、与えられた $V(r)$ のもとで実行すれば、 r と θ の関係、すなわち質点の軌道が得られることになる。

§ 7.4 ケプラー問題

中心力が距離の2乗に反比例する場合の問題（ケプラー問題）を考えよう。力は $\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r$ という形をとり、そのときのポテンシャルエネルギーは $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ である。ここで $\alpha = GM_{\odot}m$ と取れば M_{\odot} を大きな太陽質量として太陽は動かないものとしたときの、万有引力のもとでの質量 m の惑星運動を扱うことになる。ここで $\alpha > 0$ （引力）としておく。軌道は、前節の最後の式(10.1)に、 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ を代入して積分を実行することにより簡単に求まる。今、 $u \equiv \frac{1}{r}$ と変数変換した後、 $a < 0$ の場合に成り立つ次の積分公式

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arccos \left(-\frac{2au + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

を用いると

$$\begin{aligned} r &= \frac{C}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \\ C &= \frac{L^2}{m\alpha}; \quad (\text{半通径}), \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}; \quad (\text{離心率}) \end{aligned} \quad (7.25)$$

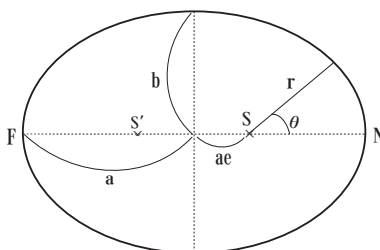


図 12:

を得る[‡]。また、積分定数を θ_0 と書いた。以後、簡単のために $\theta_0 = 0$ としておく。この r と θ の関係は、円錐曲線と呼ばれる一群の曲線を与える。保存する角運動量 L が与えられると、軌道の大きさを決める半通径 C が決まり、さらに保存するエネルギー E を与えると軌道の形を決める離心率 e が決まる。

具体的にどのような軌道が得られるか見ていこう。

- (1) $e = 0$; $E = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$; 円
このとき

$$r = C = (\text{一定}).$$

すなわち、 $r = \text{一定}$ の曲線、円軌道を描く。

- (2) $0 < e < 1$; $-\frac{m\alpha^2}{2L^2} < E < 0$; 楕円
このとき、図 12 のように

$$a = \frac{C}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad b = \frac{C}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

となっている。

楕円を一周まわるのに要する時間、すなわち公転周期を求めておこう。これには角運動量保存則を表現し直した面積速度一定の法則を用いるのが便利である。 $L = 2m \frac{dS}{dt}$ だったので、この両辺を時間 0 から公転周期 T まで積分する。左辺の L は角運動量保存則により時間に依存しないので、積分は単に時間 T を掛けるだけである。よって

$$LT = 2mS$$

が得られる。ここで右辺の S は楕円の面積、 $S = \pi ab$ である。上で見た楕円の関係から、 $b^2 = Ca$ が得られるので、半通径 C の具体的表式を用いて

$$T = \frac{2m}{L} \pi ab = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}}$$

が得られる。すなわち公転周期は軌道の大きさの $3/2$ 乗に比例する。または、公転周期の 2 乗は、軌道の大きさの 3 乗に比例するとも言える。これはティコ・ブラーエによる観測事実の、ケプラーによる解析結果である。

- (3) $e = 1$; $E = 0$; 放物線

このとき、 $\theta = \pm\pi$ で $r \rightarrow \infty$ となる。得られる軌道は放物線を与える。

[‡]離心率を e と記したが、もちろん単位ベクトル (の大きさ) とは関係がない。

(4) $e > 1$; $E > 0$; 双曲線

このとき、 $\cos \theta < -\frac{1}{e}$ の領域では r が負となり、そこでは運動が許されない。このとき軌道は $\cos \theta = -\frac{1}{e}$ を漸近線に持つ双曲線を描く。

(問) 万有引力の下での惑星の運動を考える。このとき惑星の軌道は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。太陽からの距離を r [m]、近日点（太陽から最も近い惑星の位置）の方向を $\varphi = 0$ として角度 φ [rad] をとると、軌道の式は

$$r = \frac{C}{1 + e \cos \varphi}$$

と求められる。ここに C はある定数であり、 e は離心率であり $0 < e < 1$ である。

1. 近日点の距離 r_1 [m]、及び遠日点（太陽から最も遠い惑星の位置）の距離 r_2 [m] はいくらになるか、 C と e を用いて記せ。（答え： $r_1 = \frac{C}{1+e}$, $r_2 = \frac{C}{1-e}$ ）
2. 近日点での惑星の速さを v_1 [m/s]、遠日点での惑星の速さを v_2 [m/s] とすると、それぞれの位置での惑星の角運動量の大きさ、 L_1 、及び L_2 を求めよ。ただし、惑星の質量を m [kg] とする。（太陽は重いので動かないとして良い。）（答え： $L_1 = mv_1r_1$ 、 $L_2 = mv_2r_2$ ）
3. 角運動量の保存則から、近日点、遠日点での惑星の速さの比を離心率 e を用いて記せ。近日点と遠日点では、惑星はどちらで速く動いているか？
（答え： $\frac{v_1}{v_2} = \frac{1+e}{1-e}$ 。近日点で速く動く。）
ちなみに、地球の離心率は $e \approx 1/60$ である。

§ 7.5 潮の満ち干き

月と地球は互いに万有引力を及ぼしあいながら、月は地球の周りを回っている。月に比べて地球は重いので、ここでは地球は静止していると考え。月の質量を M [kg] とし、月の中心から地球の中心までの距離を r [m]、万有引力定数を G とする。地球の半径を R [m] とする。また、月は地球を中心とした円軌道を描いているとみなす。

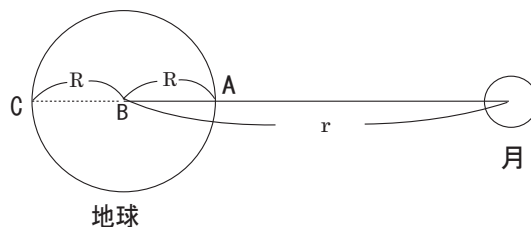


図 13:

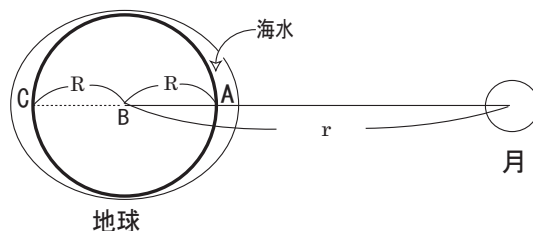


図 14:

月の存在によって地球の各点に働く万有引力を考えてみよう。図 13 の A、B、C の各点におかれた質量 m [kg] の物体に働く月からの万有引力の大きさ、 F_A [N]、 F_B [N]、 F_C [N] ($F_A > 0, F_B > 0, F_C > 0$) を書くと、

$$F_A = G \frac{Mm}{(r-R)^2}, \quad F_B = G \frac{Mm}{r^2}, \quad F_C = G \frac{Mm}{(r+R)^2}$$

となる。

力の大きさには

$$F_A - F_B \approx F_B - F_C (\approx \frac{2GMmR}{r^3}) > 0$$

の関係が得られる。重要なのは $F_A - F_B > 0$ 、 $F_C - F_B < 0$ であることである。すなわち、地球の中心を基準に考えると、A 点では月側に余分の引力を受け、C 点では月と反対側に力を受けるように見える。地球が水で覆われているとすれば、海水面は図 14 に示したように月側とその反対側に膨らむ。これが潮の干満である。よって、潮の干満は 1 日に 2 回おきることがわかる。

実際は地球の自転に際しての、地球表面と海水との摩擦によって、海水の膨らみは図 15 の様な位置関係になる。このとき、図に、A、B、C の各点から月（の中心）が受ける万有引力を、矢印で図示しておいた。

上の結果から、月に働く力は、地球に引かれる部分と月の進む方向の成分に分けられることがわかった。したがって、この力により、月は加速される。月が加速されると月の軌道半径 r は大きくなる。

ケプラーの第 3 法則を用いると、月の軌道が Δr だけ変化するとき、月の公転周期 T がどれだけ変化するかを計算できる。公転周期の変化を ΔT と書くと、 $\frac{\Delta r}{r}$ 、 $\frac{\Delta T}{T}$ の 2 次以上を無視すると $((a + \Delta a)^n \approx a^n + na^{n-1}\Delta a$

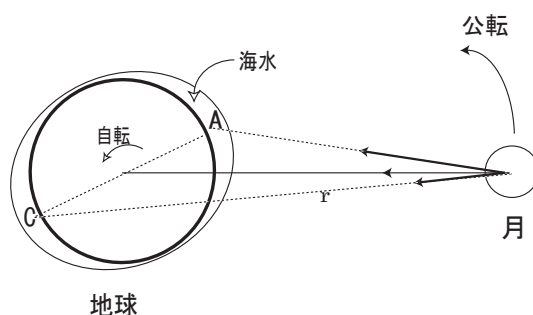


図 15:

として良いということ)

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T}$$

が導かれる。

この結果と、現在の月と地球の距離 ($r = 3.8 \times 10^8 \text{m}$) と公転周期 ($T = 27.3$ 日) を用いると、月の公転軌道が $1.5 \sim 3 \text{km}$ 大きくなると、公転周期は $15 \sim 30$ 秒延びることが言える。もし、月と地球の距離が離れて行くと、月の公転周期は次第に遅くなり、最終的には月の公転と地球の自転が一致するところで月と地球の距離は固定される。すなわち、月から見ると地球はいつも同じ面を向けていることになる。(これは、既に質量の軽い方の月に関しては実現されてしまっている!! 月を見上げたときに気づいていますね。いつも同じうさぎさんが餅をついています!!) 地球と月の距離がどれくらいになると固定されるかは角運動量保存則を使うことにより計算できて、それによると、現在の地球と月の距離 38 万 km が、 56 万 km に離れると、地球の自転、月の公転が、現在の 48 日くらいの時間がかかるようになり、地球の面と月の面が固定される。

§§7.5.1 再び、角運動量保存則

地球の自転が遅くなっていることは、地球と月の距離の測定でわかる。アポロ宇宙船で月に行った人類は、月にレーザー光線を反射する“鏡”をおいてきた。そこに向けて地球からレーザー光を発射し、地球に帰ってくるまでの往復の時間とレーザー光の光の速さから、地球と月の距離が測定できるというわけだ。測定によると、1年で平均 3.8 cm 月は地球から遠ざかっていることがわかる。月が地球から遠ざかっていくとき、どの程度地球の自転は遅くなるのかを、計算でみておこう。

地球の方が月より十分重いので、地球は静止して、その周りを月が円運動していると近似する。また月が円軌道しているとして、月の角運動量を $L_{\text{月}}$ としよう。地球と月を結ぶ線分を考える。図 17 のように地球と月を結ぶ線分が x 軸となす角度を θ とすると、月の運動とともにこの角度が変化していく。短い時間 Δt の間に角度が $\Delta\theta$ 変化した時の角速度を ω と書くと

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (7.26)$$

となる。ただし Δt は限りなく小さくとる。次に、物体の回転のしにくさ、慣性モーメントを考えよう(「剛体の力学」の賞を見よ)。原点から距離 r 離れたところにある質量 m の物体の、原点周りの回転のし難さは mr^2 となることが知られている。遠くに重いものがあると周りにくいというわけだ。物体の運動量 p が、物体の動き難さである質量 m と、動く位置変化である速度 v の積、すなわち $p = mv$ であるのと似ていて、角運動量 L

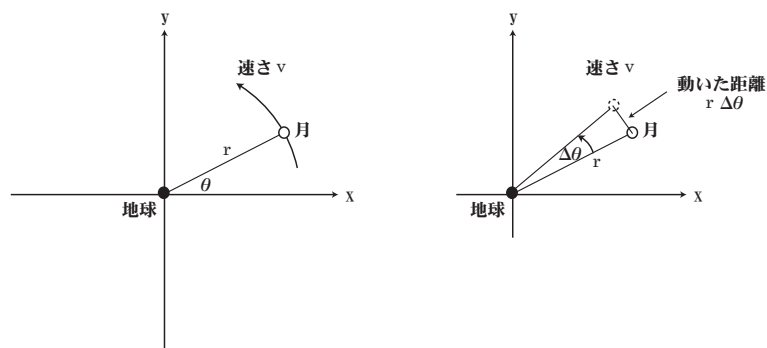


図 16:

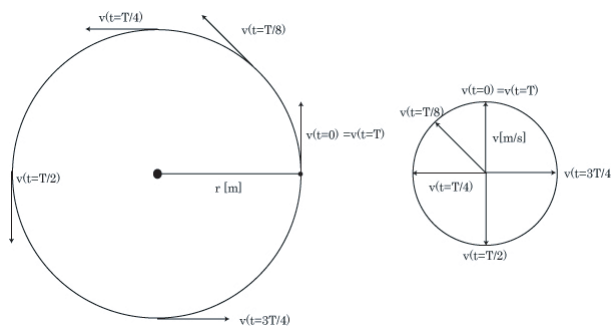


図 17:

は物体の回転のし難さである慣性モーメント I (質量 m に対応) と、回転角の変化である角速度 ω (速度 v に対応) の積になる。つまり、 $L = I\omega$ というわけだ。ということで、地球を回る月の角運動量は

$$L_{\text{月}} = m_{\text{月}} r^2 \omega \quad (7.27)$$

と書ける。 $m_{\text{月}}$ を月の質量とし、 r は地球と月の距離である。月の速さ v は、図 17 の右図のように、月が動いた距離 $r\Delta\theta$ を、要した時間 Δt で割ればよいので

$$v = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

と書ける。ここで、(7.26) の角速度 ω を用いた。こうして、(7.27) は

$$L_{\text{月}} = m_{\text{月}} r v \quad (7.28)$$

となる。

月は地球の引力を受けているので、月が受ける引力は $G \frac{M_{\text{地球}} m_{\text{月}}}{r^2}$ となる。ここで、 G は万有引力定数である。この引力によって月に生じる加速度は $\frac{v^2}{r}$ なので、[§]

$$m_{\text{月}} \frac{v^2}{r} = G \frac{M_{\text{地球}} m_{\text{月}}}{r^2}$$

おなり、月の速さ v は

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\text{地球}}}{r}}$$

[§] 図 17 の左のように月が地球の周りを等速円運動しているとする。はじめの時刻 $t = 0$ で速度 v [m/s] は図中、上向きで $v = v(t = 0)$ 。この速度は大きさはいつも同じでも、向きを変える。時刻 $t = T/4$ で、月は 4 分の 1 周動き、速度は図中、左向き。時刻 $t = T/2$ で月は半周動き、速度は図中、下向き。時刻 $t = T$ で 1 周まわって元に戻る。速さを半径にして、「速度」の矢印を描いたのが図の右側。月が地球の周りを 1 周している間に、速度は向きを 1 周変える。速度の変化率が加速度 a だったので、図 17 の右図から

$$a = (\text{加速度}) = \frac{(\text{速度の変化})}{(\text{変化に要した時間})} = \frac{2\pi v}{T} \quad (7.29)$$

となる。速度はぐるっと 1 周、半径 v の円周分変わっているから、速度の変化は $2\pi v$ となることが分かる。速度の変化に要した時間は、月の公転周期 T である。ここに月の速さ v は (速さ) \times (時間) = (動いた距離) から、月の公転半径 (地球と月の距離) を r として

$$vT = 2\pi r$$

となるので、(7.29) 式に代入して T を消去すると、等速円運動の加速度は a は

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (7.30)$$

と得られる。

と得られ、月の角運動量 (7.28) は

$$L_{\text{月}} = m_{\text{月}} \sqrt{GM_{\text{地球}}} \times \sqrt{r}$$

と書ける。ここで、地球と月の距離 r が Δr 変化したら (右辺の \sqrt{r} を微分したと思って)、月の角運動量の変化 $\Delta L_{\text{月}}$ は

$$\Delta L_{\text{月}} = m_{\text{月}} \sqrt{GM_{\text{地球}}} \times \frac{\Delta r}{2\sqrt{r}} \quad (7.31)$$

と得られる。こうして、地球と月の距離の変化 Δr が月の角運動量の変化 $\Delta L_{\text{月}}$ を引き起こすことがわかる。

角運動量の保存法則から月と地球の角運動量をあわせたものは、時間変化しないので、月の角運動量の変化は、地球の角運動量の変化と相殺される。そこで、地球の角運動量の変化を考えよう。地球は自転しているので、自転に伴う角運動量に変化していなければならない。地球の自転の速さが変化すると、1回自転するまでの時間が変化する。こうして、地球の自転の時間が変化していることがわかる。

地球は広がりを持った物体であり、中心を通る軸の周りの回転のしにくさ、すなわち慣性モーメントは、地球の半径を R 、地球の質量を $M_{\text{地球}}$ として、地球が一様な密度を持っていて、なおかつ“剛体”、つまり変形しない物体であるとする

$$\frac{2}{5} M_{\text{地球}} R^2$$

と計算される。[¶] 実際には中心部が密度が高いので、上の式の慣性モーメントより小さくなり、地球の慣性モーメント $I_{\text{地球}}$ としては

$$I_{\text{地球}} = KM_{\text{地球}} R^2$$

と書くと、 K はおおよそ 0.3444 らしい。 K は $2/5 = 0.4$ より小さいので、中心部近くのほうが周辺部より重く、その分、周りやすいというわけだ。地球の自転の角速度を Ω とすると、地球の自転の角運動量 $L_{\text{地球}}$ は、

$$L_{\text{地球}} = I_{\text{地球}} \Omega = KM_{\text{地球}} R^2 \Omega$$

となる。地球の自転角速度が $\Delta \Omega$ 変化すると、地球の角運動量は変化し、その変化量 $\Delta L_{\text{地球}}$ は

$$\Delta L_{\text{地球}} = KM_{\text{地球}} R^2 \Delta \Omega \quad (7.32)$$

となる。地球の自転の角速度は、1日1回転なので。1日を τ で表し、1回転は 2π ラジアンなので

$$\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

なので、角速度の変化 $\Delta \Omega$ は1日の長さ τ の変化 $\Delta \tau$ と関係がつくことがわかる。微分だと思って

$$\Delta \Omega = -2\pi \frac{\Delta \tau}{\tau^2}$$

なので、1日当たり地球の角運動量の変化 $\Delta L_{\text{地球}}$ は、(7.32) より

$$\Delta L_{\text{地球}}^{1\text{日}} = -2\pi KM_{\text{地球}} R^2 \frac{\Delta \tau}{\tau^2} \quad (7.33)$$

となり、角運動量の保存法則から1日当たりの地球、月、それぞれの角運動量の変化から

$$\Delta L_{\text{月}}^{1\text{日}} + \Delta L_{\text{地球}}^{1\text{日}} = 0$$

[¶] 「剛体の力学」の章を見よ。

でなければならない。こうして、(7.31)、(7.33) から

$$m_{\text{月}}\sqrt{GM_{\text{地球}}}\times\frac{\Delta r^{1\text{日}}}{2\sqrt{r}}-2\pi KM_{\text{地球}}R^2\frac{\Delta\tau^{1\text{日}}}{\tau^2}=0$$

つまり

$$\Delta\tau^{1\text{日}}=\frac{m_{\text{月}}\tau^2}{4\pi KR^2}\times\sqrt{\frac{G}{rM_{\text{地球}}}}\times\Delta r^{1\text{日}}$$

となる。1年たつと

$$\Delta\tau^{1\text{年}}=\frac{m_{\text{月}}\tau^2}{4\pi KR^2}\times\sqrt{\frac{G}{rM_{\text{地球}}}}\times\Delta r^{1\text{年}}$$

になる。

数値を入れてみよう。

$$K=0.3444$$

$$R=6.37\times 10^6\text{ m (地球の半径)}$$

$$M_{\text{地球}}=5.98\times 10^{24}\text{ kg (地球の質量)}$$

$$m_{\text{月}}=7.35\times 10^{22}\text{ kg (月の質量)}$$

$$r=3.84\times 10^8\text{ m (地球と月の距離)}$$

$$G=6.67\times 10^{-11}\text{ m}^3/\text{kgs}^2\text{ (万有引力定数)}$$

$$\tau=1\text{ 日}=8.64\times 10^4\text{ s (一日の長さ)}$$

$$\Delta r^{1\text{年}}=3.8\times 10^{-2}\text{ m (1年あたり、月が地球から離れる距離、3.8cm)}$$

以上から、

$$\Delta\tau^{1\text{年}}=2.027\times 10^{-5}\text{ s}\approx 2.0\times 10^{-5}\text{ 秒}=20\text{ マイクロ秒}$$

地球の自転は、1年当たり 2.0×10^{-5} 秒遅くなっているというわけだ。

ケプラーの第三法則から導いた(??)から

$$\Delta T=\frac{3T}{2r}\Delta r$$

となるので、再び数値を入れてみよう。地球と月の距離 r は既にかいた。月の公転周期 T は 27.3 日 $=2.36\times 10^6$ 秒、1年で地球と月は 3.8 cm 離れていくので、単純に考えると 10 万年では $\Delta r^{10\text{万年}}=3.84\text{ km}$ 離れるというわけだ。本当は、 r も変わるの、逐一計算しないといけないのでこの限りではないが、ここは単純化して一定の割合で離れていくとしておこう。こうして、10 万年あたり、月の公転周期の伸び ΔT は

$$\Delta T^{10\text{万年}}=\frac{3T}{2r}\Delta r^{10\text{万年}}=35.03\approx 35\text{ 秒}$$

となる。つまり、10 万年で 35 秒程度公転周期がのびることがわかる。

もし、一定の割合で地球の自転が遅くなり、月が地球から離れているとすると、昔は地球の自転は速く、すなわち一日は短く、月は地球に近い、すなわち夜の満月は今より大きく見えたはずだ。1年当たり 2.0×10^{-5} 秒地球の自転が遅くなるということは、100年で0.002秒自転が遅くなるということだ。逆に、10億年前は

$$1000000000\times(2\times 10^{-5})=2\times 10^4=5.6\text{ 時間}$$

だけ、地球の自転は速かったはずだから、10億年前は地球の一日は18.4時間だったということになる。地球と月の距離は3万8000km今より近かったというわけだ。今は38万4000km離れているので、10億年前は34

万 6000 km、今の 90 % の距離だったというわけだ。ということで、10 % 余り、月は大きく見えていたはずだ。月の公転周期は 10 万年で 35 秒伸びるということは、10 億年前では 350000 秒今より短かったはずだ。350000 秒 = 97.22 時間 \approx 4.1 日だから、公転周期は 23.2 日、地球の動きも入れて、だいたい 25 日おきに満月になっていたというわけだ。

8章 粒子の散乱

§8.1 散乱角

力の中心を原点 O にとる。無限遠方から力の中心に向かってやってきた質量 m [kg] の粒子が、力を受けてどれくらい軌道が曲げられるかを考察しよう。これは粒子の散乱の問題に他ならない。問題とするのは、無限遠方からやってきた粒子がどれくらい曲げられて無限遠方に去っていくかの角、すなわち散乱角 χ [rad] の決定である。

図 18 より、散乱角 χ は

$$\chi = |\pi - 2\theta|$$

となる。ここで、6章「中心力の問題」の(10.1)式から、 θ と r の関係は、

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} dr$$

と得られている。但し、 $r_{\min} = \overline{OA}$ は、分母のルートの中の根として求められる。なぜなら、点 A で粒子の r 方向の速さは 0 となるからである。すなわち、 $\frac{dr}{dt} = 0$ 。今、

ρ : 衝突径数 (図 18 を参照), v_{∞} : 無限遠方での粒子の入射速度

を用いると、保存する粒子のエネルギー E と角運動量 L は、無限遠方での値を用いて、常に

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2, \quad L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m\rho v_{\infty}$$

となるので、上の角度 θ の式は、

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{mv_{\infty}^2}}} dr \quad (8.34)$$

となる。

ポテンシャルエネルギー $V(r)$ が r の関数としてわかっているとき、入射粒子の ρ と v_{∞} を与えれば、散乱角 χ は $\chi = |\pi - 2\theta|$ として、決定される。

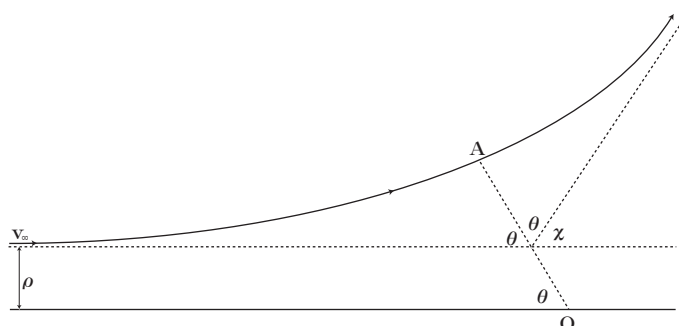


図 18: 点 A は軌道上で力の中心 O に最も近い点。軌道は \overline{OA} に対して対称である。また、 χ は慣性中心系での散乱角であり、 θ は入射粒子の無限遠での軌道と、 \overline{OA} の為す角である。ここで、 $\overline{OA} = r_{\min}$

§ 8.2 散乱断面積

粒子のビームを散乱中心（力の中心）に向けて投入したとしよう。散乱中心へ向けて、単位時間、単位面積あたり n 個の粒子が通過するとする。衝突径数 ρ とその周りの微小な半径方向の長さ $\delta\rho$ を考え、 ρ と $\rho + d\rho$ の間から来る粒子が、散乱角 χ と $\chi + d\chi$ の間に散乱された粒子数を dN とする。このとき、比 $\frac{dN}{n}$ を微分断面積と呼び、散乱過程を特徴付ける量となる。

$$d\sigma = \frac{dN}{n} : \text{微分断面積}$$

このとき、図 19 より

$$dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$$

であるので、衝突径数 ρ を散乱角 χ の関数と見て、 $d\rho/d\chi$ が負になる場合までを考慮して絶対値をとっておくと、微分断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (8.35)$$

と書ける。ここで、“立体角” $d\Omega$ は、 $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ となっているので、微分断面積は

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega \quad (8.36)$$

と得られる。

全断面積 σ は、微分断面積を全立体角で積分して、

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (8.37)$$

と得られる。

簡単な例を挙げておこう。半径 a の剛体球 ($r < a$ で、 $V(r) = \infty$ 、 $r > a$ で、 $V(r) = 0$) による粒子の散乱断面積を求めてみる。衝突径数 ρ と散乱角 χ の間の関係は、図 20 より、明らかに

$$\rho = a \sin\varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}$$

である。よって、微分断面積 (8.35) は、

$$d\sigma = 2\pi a \cos \frac{\chi}{2} \left| -\frac{a}{2} \sin \frac{\chi}{2} \right| d\chi = \frac{\pi a^2}{2} \sin\chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega \quad (\text{ここで、} d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi)$$

となる。したがって、全断面積 σ は、

$$\sigma = \int \frac{a^2}{4} d\Omega = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^\pi \sin\chi d\chi = \pi a^2$$

と得られる。この場合には、入射粒子が剛体球を見込む幾何学的断面積に一致していることがわかる。

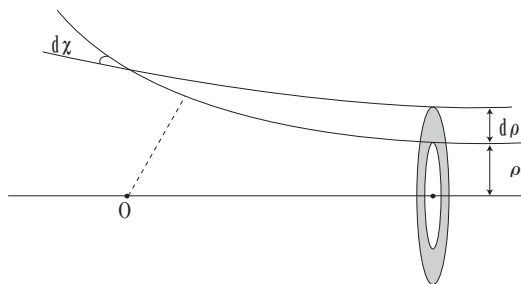


図 19:

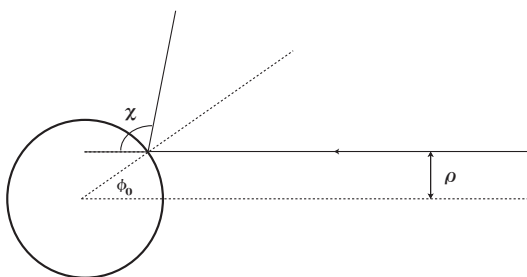


図 20:

§ 8.3 ラザフォード散乱

クーロン場（静電場）による質量 m [kg] の荷電粒子の散乱を考えよう。ポテンシャルエネルギー $V(r)$ は

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{Ze \cdot ze}{4\pi\epsilon_0}$$

とかける。ここで、 e [C] は素電荷 ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C])、 Z は標的の原子核の電荷（陽子数）、 z は入射粒子の原子核の電荷（陽子数）、 ϵ_0 は真空の誘電率 ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [F/m]) である。このとき、(8.34) 式から、衝突係数を ρ 、入射粒子の初速を v_∞ として、

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \cdot \frac{1}{r}}} dr = -\arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}}$$

となり、少し整理すると、

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \tan^2 \varphi_0 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \cdot \frac{1}{\tan^2 \frac{\chi}{2}}, \quad \left(\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}\right)$$

が得られる。よって、散乱の微分断面積 $d\sigma$ は、(8.35) 式にあてはめると、($d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ に注意して)

$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \\ &= \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \end{aligned}$$

となる。

歴史的にはラザフォード散乱として知られる、金原子核によるアルファ粒子の散乱を見ておこう。原子核にアルファ粒子（ヘリウム原子核）をあてて、散乱実験を行う。ヘリウム原子核の電荷は $2e$ なので、 $z = 2$ 。よって、微分断面積は

$$d\sigma = \left(\frac{2Ze^2}{2mv_\infty^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

となる。今、散乱の微分断面積の定義から、立体角 $\Delta\Omega$ に散乱されてくるアルファ粒子の個数を ΔN とすると

$$\Delta N = n d\sigma = n \left(\frac{2Ze^2}{2mv_\infty^2 \cdot 4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

である。以下に実験データの一例を示しておこう。

χ	$\sin^4 \frac{\chi}{2}$	ΔN	$\Delta N \cdot \sin^4 \frac{\chi}{2}$
150°	0.8705	33	28.8
60°	0.0625	477	29.8
45°	0.0214	1435	30.7

上式から、 $\Delta N \times \sin^4 \frac{\chi}{2}$ は定数となるべきであるが、実験データもっその様になっており、散乱公式の有用性が確かめられる。ただし、実際には、原子核散乱は量子力学で扱わなければならない問題であり、古典力学に基づくラザフォードの結果が量子力学で求めた結果と一致したのは幸運である。

9章 振動

§9.1 単振動

ここでは1次元の運動のみを考えることにする。系がつり合いの状態にあり、静止することが可能であれば、必ずポテンシャルエネルギー $V(q)$ [J] に極小の位置 q_0 があり、そこでは質量 m [kg] の質点には力が働かない。すなわち、力 F [N] はポテンシャルエネルギーの座標微分に負号を付けたものであるので、 $V(q)$ の極小点では

$$F = - \left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} = 0$$

である[§]。こうして、ポテンシャルエネルギーを極小点 q_0 の周りで展開しよう。

$$V(q) = V(q_0) + \left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots$$

ここで、安定点としての極小点 q_0 からの変位 $q - q_0$ を x [m] と書くことにしよう。また、極小点であるので右辺第2項は0、右辺第1項は単なる定数であるので運動には影響を与えないことから、落としてしまう。さらに、右辺第2項の係数を $\left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0} \equiv k$ と書くことにする。もちろん極小点は時間とともに変化しないので、 $dq_0/dt = 0$ である。

このとき、質量 m [kg] の質点に働く力 F [N] は

$$F = - \frac{dV(x)}{dx} = -kx$$

と、変位に比例する[¶]。運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx .$$

となり、整理すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 , \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

と書ける。こうして、一般に、安定点の周りの運動は、振幅が十分に小さいとしたときに単振動の方程式となる。ここで導入した ω [1/s] を角振動数と呼ぶ。この方程式の解は、§4.1.2 の振り子の運動で見たのと同じ運動方程式を与えるので、解は、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

となる。ここで、 A と α は初期条件で決まる定数である。 A は振動の振幅である。

(問) 時刻 $t = 0$ で、単振動のつりあいの位置からの変位が x_0 、速度が0であった。このとき、上式の A と α を決めて、単振動の解を完成せよ。

([答え] $A = x_0, \alpha = 0$)

(問) 単振動の力学的エネルギーを求めよ。

([答え] $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$)

§9.2 減衰振動

単振動している物体に、速度の1次に比例した抵抗力が働いているとする。抵抗力を $F = -\mu \frac{dx}{dt}$ [N] とし、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

となる。整理して

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{ただし} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\lambda \equiv \frac{\mu}{m} \quad (9.1)$$

と書き直される。この方程式 (9.1) は形式的に

$$\left(\frac{d}{dt} - \gamma_1\right) \left(\frac{d}{dt} - \gamma_2\right) x(t) = 0, \\ \gamma_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

と書けるので、 $\frac{dx}{dt} - \gamma x = 0$ の解が $x(t) = ce^{\gamma t}$ であることから、上式の一般解は、 $\gamma_1 = \gamma_2$ の場合を除き、2つの解の線形結合として

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

となる。ここで、 c_1, c_2 は運動の初期条件で決まる定数である。こうして、 ω_0^2 と λ^2 の大小関係により、2つの場合が生じる。

(i) 減衰振動: $\omega_0^2 > \lambda^2$

このとき、 γ_i のルートの中は負になるので虚数が現れる。こうして一般解は三角関数で書き表わされ^{||}

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

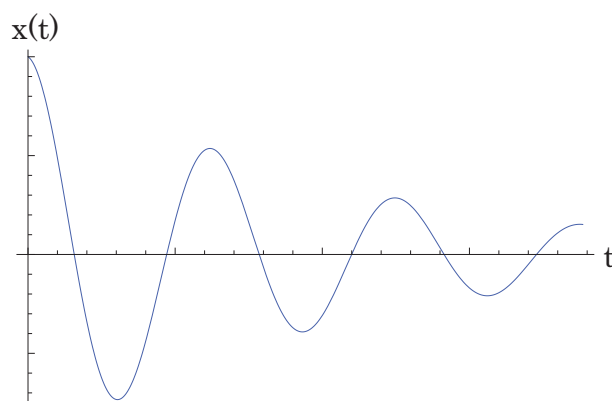


図 21:

[§]極大点では不安定なつり合いになってしまう。

[¶]フックの法則と呼ばれることがある。

^{||} $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いる。

と書き直される。 A と α は初期条件により決まる定数である。この場合は図 21 のように、振動しながら減衰していく運動が見られる。これを減衰振動と呼ぶ。

(ii) 非周期的減衰 : $\omega_0^2 < \lambda^2$

一般解は

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t})$$

である。ここで c_1 と c_2 は初期条件により決まる定数である。この場合は図 23 のように、単調に減衰していく。この運動は非周期的減衰、または過減衰と呼ばれる。

(iii) $\omega_0^2 = \lambda^2$ の場合

この場合には、 $\gamma_1 = \gamma_2$ となるので、先の一般解は成り立たない。運動方程式は

$$\left(\frac{d}{dt} - \gamma_1 \right)^2 x(t) = 0$$

となっている。両辺に $e^{-\gamma_1 t}$ をかけると、

$$e^{-\gamma_1 t} \left(\frac{d}{dt} - \gamma_1 \right)^2 x(t) = \frac{d^2}{dt^2} (e^{-\gamma_1 t} x(t)) = 0$$

となるので、時間に関する 2 階微分が 0 であることから

$$e^{-\gamma_1 t} x(t) = c_1 + c_2 t$$

と書ける。ここで、 $\gamma_1 = -\lambda$ であるので、こうして一般解は次の形を持つ。

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

ここで、 c_1 と c_2 は初期条件により決まる定数である。この解も振動せずに減衰していく振る舞いを示す。これは臨界減衰と呼ばれる。

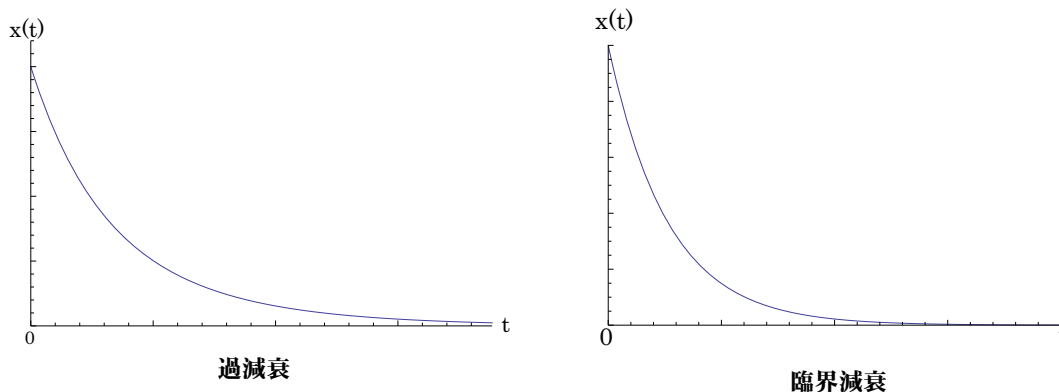


図 22:

(問) x 軸上で変位に比例した力 (バネの様なもの) を受けて調和振動している質量 m [kg] の質点が、速度に比例する抵抗を同時に受けているとする。このとき運動方程式は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = -\alpha \frac{dx(t)}{dt}$$

とかける。ここで $x(t)$ [m] は振動子の変位であり、 k [N/m] はバネ定数、また α [Ns/m] は抵抗係数である。

1. $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ 、 $\lambda \equiv \frac{\alpha}{2m}$ と定義し、(i) $\omega_0^2 > \lambda^2$ 、(ii) $\omega_0^2 < \lambda^2$ の2つの場合にわけて、運動を論じよう。(i) のときには、

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \gamma)$$

が解になる。但し、 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ である。また A 、 γ は初期条件を与えたときに決まる定数である。これを確かめなさい。

2. (ii) のときには、

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t})$$

が解になる。但し、 C_1 、 C_2 は初期条件を与えたときに決まる定数である。これを確かめなさい。

3. 上の (i)、(ii) の場合について、 $x(t)$ を時間の関数としてその概略を図示しなさい。

4. 力学的エネルギー (運動エネルギー + 弾性エネルギー; $\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$) の時間変化率 $\frac{dE}{dt}$ は、抵抗力の仕事によるエネルギー消費率 $\left(-\alpha \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)$ に等しいことを示しなさい。

§9.3 強制振動

単振動をしている質点が、外場のもとに置かれている状況を考えよう。外場のポテンシャルエネルギーを $V_{\text{ex}}(q)$ とすると、外場がない場合の質点の平衡点 $q = q_0$ の周りに展開する。前と同じように $x = q - q_0$ として、

$$V_{\text{ex}}(x, t) = V_{\text{ex}}(0, t) + \left. \frac{\partial V_{\text{ex}}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} x + \dots$$

となる。第1項は x に依らないので運動には寄与しない。第2項は $-\left. \frac{\partial V_{\text{ex}}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = F(t)$ と書くことにすると、 $F(t)$ は外力に他ならない。こうして、ニュートン方程式は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) + F(t)$$

と書ける。変位に比例した復元力 kx が単振動を引き起こすが、そこに時間に依存した外力 $F(t)$ が作用している系の運動方程式である。整理して、

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t), \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

が得られる。これを強制振動と呼ぶ。

外力としての関数型は制限されていないが、ここでは

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta)$$

で振動している場合を扱おう。このとき、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta)$$

と書ける。この方程式の左辺は求めたい関数 $x(t)$ の 1 次であるが、右辺は 0 次であり、数学的には非同次線形微分方程式と呼ばれる。この場合には方程式の解の一つを見つけ（特解）、その解に右辺を 0 とおいた同次方程式の一般解を加えることで求めたい非同次線形微分方程式の一般解が得られることが知られている。特解を探すために、 $x = B \cos(\gamma t + \beta)$ とおいて上の運動方程式に代入してみると、 $-B\gamma^2 + \omega^2 B = \frac{f}{m}$ がえられるので、未知の B が $B = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}$ と得られる。外力を零とおいた同次方程式の一般解は単振動の解としてすでに知っているのので、結局求めたい一般解として、

$$x(t) = A' \cos(\omega t + \alpha') + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t + \beta)$$

が得られる。このままでは $\omega = \gamma$ のときに発散するように見えるので、特解の B と外場の位相 β を用いて $A' \cos \alpha' \equiv A \cos \alpha - B \cos \beta$ 、 $A' \sin \alpha' \equiv A \sin \alpha - B \sin \beta$ と、 A' 、 α' の代わりに A 、 α を導入すると、最終的に

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\}$$

が得られる。ここで、 A 、 α は初期条件により決まる定数である。

さて、強制力の角振動数 γ が、系の持つ固有の角振動数 ω に等しくなる場合を考えよう。このときには上の解で $\gamma \rightarrow \omega$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{(\omega + \gamma)(\omega - \gamma)} \{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\} \\ &= A \cos(\omega t + \alpha) - \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega + \gamma} \frac{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)}{\gamma - \omega} \\ &\rightarrow A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} \cdot t \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

となる。ここで、2 行目から 3 行目は微分の定義を利用した。こうして、振幅は時間 t とともに増大していくことがわかる。この現象を、共鳴と呼ぶ。

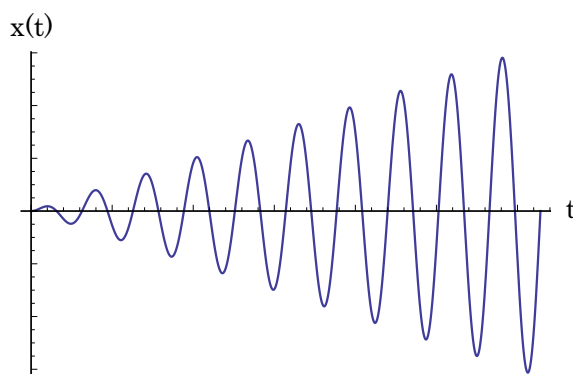


図 23: $A = 0$ 、 $\beta = 0$ の場合の概略図

(問) 地上で、ばね定数 k [N/m] のばねの下端に質量 m [kg] の質点をつるし、上端の支点を $f \cos \gamma t$ で動かした。ばねの自然の長さを l [m] とする。

1. ばねの上端を動かさないときの運動方程式を書け。ただし、鉛直下向きに x 軸をとり、支点 (ばねの上端) を原点とする。
2. ばねの上端を $f \cos \gamma t$ で動かすときの運動方程式を書け。
3. 2. の運動方程式を解き、どのような条件で共鳴現象が見られるか述べよ。

§ 9.4 摩擦のあるときの強制振動

前節では振動する外場 $f \cos \gamma t$ を考えた。このときには振動の振幅が時間とともに増大することが見られたが、多くの現象では増大し続けるわけではなく、抵抗力を受けて振幅の増大は止まる。そこで、速度の 1 次に比例した抵抗力が働くとして、再び振動する外力の下での強制振動を考えよう。運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t$$

となる。ただし、 $\omega_0^2 > \lambda^2$ として、外力がない場合には減衰振動をしている系としよう。この方程式は非同次線形微分方程式であるので、解法は前節と同様である。まず、右辺の外力がない場合の一般解は減衰振動の解としてすでに知っている。すなわち、 $x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha)$ 、ただし $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ であった。特解を一つ見つければ良いので、 $x = B \cos(\gamma t - \delta)$ において、 B と δ を決定しよう。運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \gamma^2)B \cos(\gamma t - \delta) - 2\lambda\gamma B \sin(\gamma t - \delta) &= \frac{f}{m} \cos(\gamma t) \\ \text{すなわち} \quad [(\omega_0^2 - \gamma^2)B \cos \delta + 2\lambda\gamma B \sin \delta] \cos(\gamma t) \\ + [-2\lambda\gamma B \cos \delta + (\omega_0^2 - \gamma^2)B \sin \delta] \sin(\gamma t) &= \frac{f}{m} \cos(\gamma t) \end{aligned}$$

となる。ここで、2 番目の式へは三角関数の加法定理を用いた。任意の時刻で成り立つには、 $\cos(\gamma t)$ 、 $\sin(\gamma t)$ の係数を両辺比較して等しいと置くと

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \gamma^2) \cos \delta + 2\lambda\gamma \sin \delta] B &= \frac{f}{m} \\ [-2\lambda\gamma \cos \delta + (\omega_0^2 - \gamma^2) \sin \delta] B &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。これを解くと B と δ が決定される。こうして、摩擦がある時の強制振動の解として

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\gamma t - \delta), \\ B &\equiv \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}} \\ \tan \delta &\equiv \frac{2\lambda\gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 A 、 α は初期条件で決まる定数である。

十分時間がたつと、第 1 項の減衰振動項は零に近くなり、

$$x(t \rightarrow \text{大}) \rightarrow B \cos(\gamma t - \delta)$$

となる。十分時間が経つと、振動は強制力の振動の位相から δ だけ遅れるが、強制力と同じ振動数で振動していることがわかる。また、振動の振幅が最大 (B が最大) となる共鳴は、 $\gamma \rightarrow \omega_0$ で見られることがわかる。

§9.5 パラメータ共鳴

振動する物体の座標を $q(t)$ として、単振動の方程式を書くと

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (9.2)$$

となる。この微分方程式の解は

$$q(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

であった。 A と B は積分定数である。単振り子の場合、 ω と書いた“角振動数”は、振り子の紐の長さを l 、重力加速度を g として

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

となっていた。このとき、 $q(t)$ は、鉛直方向と振り子の紐が為す角度であった。

今度は ω が時間 t に依存している場合を考えよう。振り子の場合、ひもの長さ l が周期的に時間変化していると考えればよい。 l_0 を基準の紐の長さとして、その周りに周期的に伸び縮みするとしておこう。このとき、

$$l = l(t) = l_0(1 - h \cos \gamma t)$$

と仮定しておく。ここで、 h は 1 に比べて十分小さいとして、 $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x + \dots$ と展開すると

$$\omega(t)^2 = \frac{g}{l(t)} = \frac{g}{l_0} (1 - h \cos \gamma t)^{-1} \approx \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t)$$

となる。ここで、定数として、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$ を定義した。運動方程式 (9.2) は

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t) q(t) = 0 \quad (9.3)$$

と書き直せる。これは、Mathieu (マシユー) 方程式として知られており、詳しい分析では、 γ が、基準の振り子の角振動数 ω_0 と

$$\gamma = \frac{2\omega_0}{n} \quad (n \text{ は自然数})$$

の関係にあるときにパラメータ共鳴と呼ばれる共鳴現象が起きることが知られている。 $n = 1$ の時に特に大きな共鳴が得られるので、ここではその場合に限って考えてみよう。そこで、

$$\gamma = 2\omega_0 + \epsilon$$

とおく。ただし、 ϵ は小さな量とする。これを代入すると、運動方程式 (9.3) は

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 (1 + h \cos[(2\omega_0 + \epsilon)t]) q(t) = 0 \quad (9.4)$$

と書き直される。

今、解 $q(t)$ を

$$q(t) = a(t) \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] + b(t) \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] \quad (9.5)$$

とにおいて、運動方程式 (9.4) に代入してみよう。ここで、 a と b の時間微分、 $\frac{da(t)}{dt}$ 、 $\frac{db(t)}{dt}$ が小さな量 ϵ と同じ程度の量だとする。そして、 a と b の時間についての 2 階微分、 $\frac{d^2a(t)}{dt^2}$ 、 $\frac{d^2b(t)}{dt^2}$ は ϵ の 2 乗ほど小さいとして

無視する。さらに、運動方程式に代入した場合、 $\cos\left[3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right]$ や $\sin\left[3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right]$ の項が出てくるのだが、これらは小さい量 h の 2 乗程度になることがわかっているので、これらも無視しよう。この項まで考慮するには最初に仮定した解 $q(t)$ にも $\cos\left[3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right]$ や $\sin\left[3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right]$ の項を入れておく必要がある。ここでは ϵ も h も 1 次の項まで考慮する近似を取っているとして、出てきた $\cos\left[3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right]$ や $\sin\left[3\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right]$ の項を無視してしまう近似を使う。そうすると、仮定した解 (9.5) を運動方程式 (9.4) に代入し、上記の近似を行うことで、

$$\begin{aligned} & -\omega_0 \left(2 \frac{da(t)}{dt} + b(t)\epsilon + \frac{\omega_0 hb(t)}{2} \right) \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] \\ & + \omega_0 \left(2 \frac{db(t)}{dt} - a(t)\epsilon + \frac{\omega_0 ha(t)}{2} \right) \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] \approx 0 \end{aligned}$$

という式が得られる。任意の時間 t でこの式が成り立つためには

$$\begin{aligned} 2 \frac{da(t)}{dt} + b(t)\epsilon + \frac{1}{2} \omega_0 hb(t) &= 0 \\ 2 \frac{db(t)}{dt} - a(t)\epsilon + \frac{1}{2} \omega_0 ha(t) &= 0 \end{aligned}$$

の 2 式が成り立っていればよい。さらに、 a_0 、 b_0 を時間に依存しない定数として $a(t)$ 、 $b(t)$ を、

$$a(t) = a_0 e^{st}, \quad b(t) = b_0 e^{st}$$

とおいて、上の 2 式に代入してから $2e^{st}$ で割ると

$$\begin{aligned} sa + \frac{1}{2} b\epsilon + \frac{1}{4} \omega_0 hb &= 0 \\ sb - \frac{1}{2} a\epsilon + \frac{1}{4} \omega_0 ha &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。行列とベクトルで上の 2 式を表すと

$$\begin{pmatrix} s & \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{1}{2}\omega_0 h) \\ -\frac{1}{2}(\epsilon - \frac{1}{2}\omega_0 h) & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。こうして、 $a = 0$ 、 $b = 0$ 以外の解を持つには、行列の行列式が 0 であれば良いことが解るので、行列式を 0 とすると

$$s^2 + \frac{1}{4} \left(\epsilon^2 - \frac{1}{4} \omega_0^2 h^2 \right) = 0$$

が得られる。こうして、

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_0 h}{2} \right)^2 - \epsilon^2} \quad (9.6)$$

が得られる。結局、近似的ではあるが、 $q(t)$ が求まり、

$$q(t) = a_0 e^{st} \cos \left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right] + b_0 e^{st} \sin \left[\left(\omega_0 + \frac{\epsilon}{2} \right) t \right]$$

が得られた。 s が純虚数、つまり (9.6) 式で、

$$\left(\frac{\omega_0 h}{2} \right)^2 - \epsilon^2 < 0$$

のときは、(9.6)のルートの中が負になるので $s = i\frac{1}{2}\sqrt{\epsilon^2 - \left(\frac{\omega_0 h}{2}\right)^2} = i|s|$ とおくと $e^{i|s|t} = \cos(|s|t) + i\sin(|s|t)$ だから、振動する解になるので、共鳴は起きない。ところが

$$\left(\frac{\omega_0 h}{2}\right)^2 - \epsilon^2 > 0 \quad (9.7)$$

のときには s は実数なので、解 $q(t)$ は時間 t が経つと、 e^{st} でどんどん大きくなる。振り子であれば、振れる角度 $q(t)$ が時間とともにどんどん大きくなるということなので、時間とともに振幅が増大していく。これをパラメータ共鳴と呼ぶ。

振幅が増大し、パラメータ共鳴が起きるには、(9.7)の条件から、角振動数の $2\omega_0$ からのずれ ϵ が

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \epsilon < \frac{h\omega_0}{2}$$

の範囲に収まっていれば良いことがわかる。

では、良く知っている“振り子”としてブランコではどうだろうか？振り子、すなわちブランコの“ひも”の長さをどう変化させれば、振幅、すなわちブランコの揺れは大きくなるだろうか？

ここで言う“振り子の紐の長さ”は、支点から重心までの長さと思えばよいので、ブランコを漕ぐときであれば紐の支点から重心の高さまでが“振り子の紐の長さ”とみなせる。重心の高さを変えるために、ブランコに立って漕ぐ場合であれば、体を伸ばしたり縮めたりして、重心の位置を変え、紐の支点から重心までの長さ l を変えることになる。ブランコが行って帰ってくるまでの周期 T は角振動数 ω_0 に反比例、すなわち $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ である。したがって、ブランコが一周期する間に、体の上下動を2回すれば良いことになる ($\gamma = 2\omega_0$ 、すなわち、 $\frac{1}{\omega_0} = \frac{2}{\gamma}$ 、こうして、体の上下の一周期は $\frac{2\pi}{\gamma} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{T}{2}$)。こうして、ブランコの一周期の半分で上下動を1回すれば“パラメータ共鳴”してブランコが漕げることがわかる。

§9.6 多自由度系での微小振動

これまでは1次元で1自由度しかない場合の振動を扱ってきたが、ここでは1次元ではあるが自由度がたくさんある場合の振動を考える。質点が1次元的に s 個並んでいるような系を想定してみよう。 i 番目の質点の座標を q_i とし、その釣り合いの位置を q_{i0} とする。釣り合いの位置からの変位は $x_i \equiv q_i - q_{i0}$ であるので、ポテンシャルエネルギーを各質点の釣り合いの位置の周りで展開すると

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_s) &= V(0, 0, \dots, 0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_i=x_j=0} x_i x_j + \dots \\ &\equiv V(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} x_i x_j \end{aligned} \quad (9.8)$$

となる。ここで、右辺で1次の項は、釣り合いの条件 $\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = 0$ より消えている。また、右辺第1項は定数であるので、運動に寄与しない。

i 番目の質点に働く力 F_i は

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^s k_{ij} x_j \quad (9.9)$$

となるので、運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_j k_{ij} x_j = 0 \quad (9.10)$$

と得られる。ただし、 i 番目の質点の質量を m_i とした。形式的ではあるが、

$$m_{ij} = m_i \delta_{ij}, \quad \text{ここで} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

として、運動方程式を書き直しておく：

$$\sum_j \left(m_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + k_{ij} x_j \right) = 0$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタと呼ばれる。この運動方程式を解こう。まず、

$$x_j(t) = A_j \cos(\omega t) + B_j \sin(\omega t)$$

と置いてみよう。これを運動方程式に代入すると

$$\sum_j (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) A_j = 0, \quad \sum_j (-\omega^2 m_{ij} + k_{ij}) B_j = 0$$

が得られる。たとえば、 A_j に関する式を行列表示してみると

$$\begin{pmatrix} -m_{11}\omega^2 + k_{11} & -m_{12}\omega^2 + k_{12} & \cdots & -m_{1s}\omega^2 + k_{1s} \\ -m_{21}\omega^2 + k_{21} & -m_{22}\omega^2 + k_{22} & \cdots & -m_{2s}\omega^2 + k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{s1}\omega^2 + k_{s1} & -m_{s2}\omega^2 + k_{s2} & \cdots & -m_{ss}\omega^2 + k_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix} = 0$$

と書けるが、 $A_j = B_j = 0$ という意味のない解以外の解を持つためには、行列部分が逆行列を持つてはいけない。こうして、

$$\det | -m_{ij}\omega^2 + k_{ij} | = 0, \\ \text{すなわち} \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & -m_2\omega^2 + k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & -m_s\omega^2 + k_{ss} \end{vmatrix} = 0$$

という行列式を解けば良いことになる。ここで、 $m_{ij} = m_i \delta_{ij}$ と元に戻した。こうして、仮定した解 x_j の振動数 ω が行列式を解くことで系の自由度の数だけ得られることになる。ただし、 $\omega > 0$ とする。

$$\omega = \omega_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s)$$

この ω_α を固有振動数と呼ぶ。固有振動数 ω_α が決まると、その振動数に応じてもとの行列の方程式から A_j 、 B_j が決定される。こうして、

$$x_j^{(\alpha)} = A_j^{(\alpha)} \cos \omega_\alpha t + B_j^{(\alpha)} \sin \omega_\alpha t$$

と、運動方程式の解が得られる。

さらに A_j, B_j を決める行列の方程式で、行列部分是对称行列なので必ず対角化することが可能であることに注意しよう。行列型で書いた A_j を決める方程式で、行列を O 、 A_j を纏めてベクトル \vec{A} と書くと、

$$O\vec{A} = 0, \rightarrow UOU^{-1}U\vec{A} = 0, \text{ただし } UOU^{-1} = \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_1^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \omega^2 - \omega_2^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

と記される。このとき、 $U\vec{A}$ で決まるベクトルの成分を Q_α と書くと

$$Q_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \delta_\alpha)$$

と得られる。こうして、一般解は

$$x_j(t) = \sum_{\alpha=1}^s x_j^{(\alpha)} = \sum_{\alpha} C_{j\alpha} Q_\alpha$$

と表すことができる。ここで、 $C_{j\alpha}$ は定数である。この Q_α を基準座標と呼ぶ。基準座標を用いると

$$\frac{d^2 Q_\alpha}{dt^2} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0$$

と簡単化される。基準座標で表わされる振動を基準振動と呼ぶ。

§§9.6.1 連成振動

一般論は前節で展開したので、簡単な具体例を通して理解を深めよう。図の様に、2つの質点がばねで連結されており、各々は固定された壁にばねで連結された1次元系を考えよう。ばね定数を図の様にとり、質点1のつり合いからの変位を x_1 、質点2のつり合いからの変位を x_2 とすると、運動方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k_2 (x_1 - x_2) - k_3 x_2, \end{aligned} \tag{9.11}$$

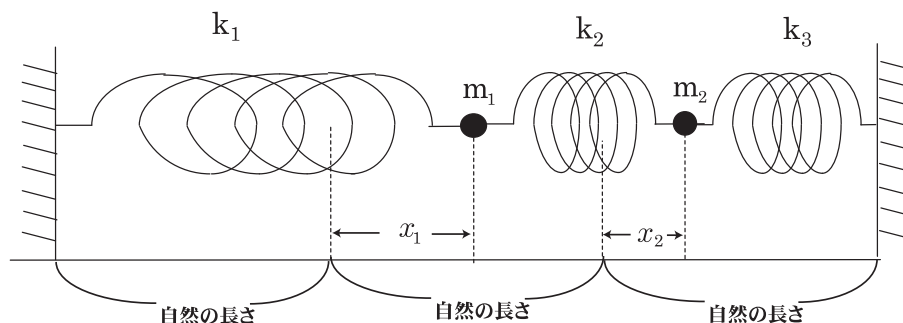


図 24:

と書ける。整理すると

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.12)$$

となる。ここで、

$$x_j = A_j \cos \omega t + B_j \sin \omega t, \quad (j = 1, 2) \quad (9.13)$$

とおいて運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} [-m_1 \omega^2 + (k_1 + k_2)]x_1 - k_2 x_2 &= 0, \\ -k_2 x_1 + [-m_2 \omega^2 + (k_2 + k_3)]x_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.14)$$

となる。行列表示すると

$$\begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (9.15)$$

が得られる。 $\cos \omega t$ に比例する部分と $\sin \omega t$ に比例する部分は独立なので、それぞれ

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} &= 0, \\ \begin{pmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (9.16)$$

となる。恒等的に 0 でない解を持つためには、行列の行列式が 0 でなければならなかったので、

$$\begin{vmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (9.17)$$

が成り立たなければならない。すなわち、

$$(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0 \quad (9.18)$$

これを ω^2 について解くと

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2m_1 m_2} \left(m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{[m_1(k_2 + k_3) + m_2(k_1 + k_2)]^2 - 4m_1 m_2 [(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2]} \right) \end{aligned} \quad (9.19)$$

となる。

簡単のため、 $m_1 = m_2 = m$ 、 $k_1 = k_2 = k_3 = k$ の場合を考えよう。このときには、

$$\omega^2 = \frac{1}{2m^2} (4mk \pm 2mk) = \begin{cases} \frac{3k}{m} = \omega_+^2 \\ \frac{k}{m} = \omega_-^2 \end{cases} \quad (9.20)$$

となる。ここで、 ω_{\pm} を定義した。よって

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{\frac{3k}{m}} (= \omega_+) \\ \sqrt{\frac{k}{m}} (= \omega_-) \end{cases} \quad (9.21)$$

次に、 A_j, B_j を求めよう。(10.4) 式で、 $m_1 = m_2 = m, k_1 = k_2 = k_3 = k$ とすると、

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 &= 0, \\ -kA_1 + (2k - m\omega^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

が得られる。 $\omega = \omega_-$ または $\omega = \omega_+$ のときには、この式から

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2, & \text{for } \omega &= \omega_-, \\ A_1 &= -A_2, & \text{for } \omega &= \omega_+ \end{aligned} \quad (9.23)$$

が得られる。 B_j についても同様である。こうして、 $\omega = \omega_+$ のときの解を $x_j^{(+)}$ ($j = 1, 2$)、 $\omega = \omega_-$ のときの解を $x_j^{(-)}$ ($j = 1, 2$) と書くと

$$\begin{cases} x_1^{(+)} = A_1^{(+)} \cos \omega_+ t + B_1^{(+)} \sin \omega_+ t \\ x_2^{(+)} = -A_1^{(+)} \cos \omega_+ t - B_1^{(+)} \sin \omega_+ t \\ x_1^{(-)} = A_1^{(-)} \cos \omega_- t + B_1^{(-)} \sin \omega_- t \\ x_2^{(-)} = A_1^{(-)} \cos \omega_- t + B_1^{(-)} \sin \omega_- t \end{cases} \quad (9.24)$$

となる。一般解はこれらの重ね合わせで

$$x_j = \sum_{\alpha=\pm} C^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)}, \quad (j = 1, 2) \quad (9.25)$$

となる。今、簡単のため、 $B_j = 0$ としてみる。このとき、 $A_1^{(+)} C^{(+)} = C_1, A_1^{(-)} C^{(-)} = C_2$ と書くと、上式は

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos \omega_+ t + C_2 \cos \omega_- t \\ x_2 = -C_1 \cos \omega_+ t + C_2 \cos \omega_- t \end{cases} \quad (9.26)$$

となる。これらは異なる角振動数の振動の重ね合わせなので、基準振動ではない。そこで、両者の和、差をとることで、

$$\begin{cases} Q_1 = x_1 + x_2 = 2C_2 \cos \omega_- t = 2C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ Q_2 = x_1 - x_2 = 2C_1 \cos \omega_+ t = 2C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{3k}{m}} t \right) \end{cases} \quad (9.27)$$

が得られる。この Q_1, Q_2 が基準振動となる。 Q_1 は変位 x_1, x_2 が同じように移動するので、同位相の振動となる。 Q_2 は変位の差が基準振動を与え、2つの質点は逆位相で振動する。

§9.7 連続体の振動

前節では1次元的にばねで結ばれた振動を考えた。やはり、1次元的に質量 m の物体が、同じばね定数 k で繋がれている場合を考えておこう。 i 番目の質点に働く力は、 $i+1$ 番目の質点と結ばれたばねによる力 $-k(x_i - x_{i+1})$ と、 $i-1$ 番目の質点と結ばれたばねによる力 $-k(x_i - x_{i-1})$ によるものなので、運動方程式 (9.10) は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -k(x_i - x_{i+1}) - k(x_i - x_{i-1}) \\ &= -k(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) \end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\kappa(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}), \quad \left(\kappa = \frac{k}{m} \right) \quad (9.28)$$

と書けることに注意してからこの節を始めよう。

今、長さ L の連続体の1次元の固体の棒を考える。断面積は S とし、両端を力 F で引っ張ったとしよう。その際、棒は長さ ΔL だけ伸びたとする。フックの法則が成り立つ範囲で、伸び率 $\frac{\Delta L}{L}$ は単位面積当たりの力 $\frac{F}{S}$ に比例するとしてよい。こうして、

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L} \quad (9.29)$$

と書ける。ここで、比例定数は物質によって決まっており、弾性率、特に固体の棒に関してはヤング率と呼ばれる。(9.29) は

$$F = \frac{ES}{L} \Delta L$$

と書けるので、力がのび ΔL に比例するフックの法則であり、ばね定数に相当する量は $\frac{ES}{L}$ である。こうして、棒に力 F を及ぼすと、その仕事は棒の弾性エネルギー $\frac{1}{2} \frac{ES}{L} \Delta L^2$ となる*。こうして、単位体積あたりの弾性エネルギー ε は、体積 SL で割り算して、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} F \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \quad (9.30)$$

となる。

この弾性体の棒の振動を考えよう。

棒の方向に x 軸を取り、 x と $x + \Delta x$ の間の微小な部分を考える。 x では x 軸負の向きに力 $F(x)$ がかかっており、 $x + \Delta x$ では正の向きに $F(x + \Delta x)$ の力がかかって棒は引き伸ばされていると考えよう。 x の面は $u(x, t)$ だけ変位を受け、 $x + \Delta x$ の面は $u(x + \Delta x, t)$ の変位を被ったとする。この時、考えている領域の伸び縮みの量は $u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$ である。こうして、 Δx の領域での伸びの割合は

$$\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (9.31)$$

と偏微分で書ける。ここで $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとった。こうして、(9.29) より

$$\frac{F(x, t)}{S} = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (9.32)$$

*フックの法則に従うばねのポテンシャルエネルギー V は、ばね定数を k 、自然の位置からの変位を x として $V = \frac{1}{2} kx^2$ であった (§6.1)。力 F は $F = -\frac{dV(x)}{dx} = -kx$ 。

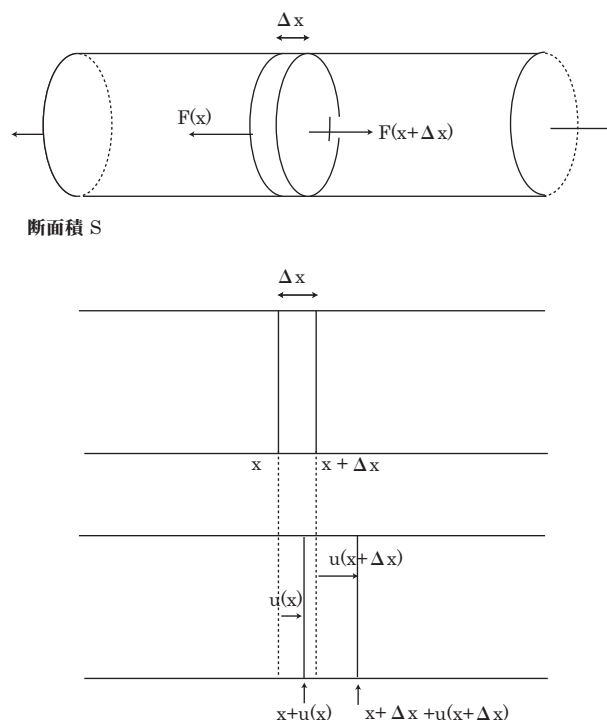


図 25:

となる。

棒の質量密度を ρ とすると、注目している部分の棒の質量は $\rho S \Delta x$ であるので、注目している部分の運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho S \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= F(x + \Delta x, t) - F(x, t) \\ &= SE \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right) \end{aligned} \quad (9.33)$$

と書ける。ここで、偏微分の下付き添え字は $x + \Delta x$ 及び x での偏微分の値であることを意味する。こうして (9.33) は

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = E \frac{1}{\Delta x} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right)$$

となるが、 $\Delta x \rightarrow 0$ をとると、右辺は再び x についての微分になり、結局、

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (9.34)$$

が得られる。これが弾性体の棒に力を及ぼした時に得られる運動方程式である。

さて、この節の初めに、同じばね定数を持つばねで結ばれた同一質量の無限個の 1 次元鎖の方程式 (9.28) を与えておいた。これを (9.34) と比較してみよう。変位 x_i は $u(x, t)$ に対応しているので、質点を区別していた添え字 i は、連続体では位置 x に対応している。1 次元鎖の質点間の (平衡での) 間隔を d とすると、連続体

と 1 次元鎖は

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &\longleftrightarrow \frac{1}{d} (x_{i+1}(t) - x_i(t)) \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &\longleftrightarrow \frac{1}{d} \left(\frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{d} - \frac{x_i(t) - x_{i-1}(t)}{d} \right) \\ &= -\frac{1}{d^2} (2x_i(t) - x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t))\end{aligned}$$

と対応するので、 $\frac{E}{\rho d^2}$ を κ とすれば、(9.34) は (9.28) に戻る。こうして、連続体としての弾性体の棒の振動は、1 次元鎖の振動問題と同一の構造を持つことがわかる。

(9.34) を解くためには、初期時刻、たとえば $t = 0$ での各点 x での変位 $u(x, 0)$ と速度 $\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0}$ が初期条件として必要である。§6.2 でみたように、 $u(x, t)$ が基準振動であれば

$$u(x, t) = a(x) \cos(\omega t + \alpha) \quad (9.35)$$

とにおいて (9.34) に代入し、

$$-\omega^2 a(x) = \frac{E}{\rho} \frac{d^2 a(x)}{dx^2} \quad (9.36)$$

が得られるので、簡単に解けて

$$a(x) = a \cos(kx + \beta) \quad (9.37)$$

が得られる。ここで、 k と ω には

$$\omega \equiv \omega_k = \sqrt{\frac{E}{\rho}} k \quad (9.38)$$

の関係がある。こうして、

$$u(x, t) = \sum_k a_k \cos(kx + \beta) \cos(\omega_k t + \alpha) \quad (9.39)$$

が解になる。境界条件として、例えば両端では変位が無い固定端であれば

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (9.40)$$

とにおいて $u(x, t)$ を解くことになる。また、両端で力が働かない自由端の場合には、両端で力 F が零なので、(9.32) より

$$\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=L} = 0 \quad (9.41)$$

の境界条件の下で $u(x, t)$ を解くことになる。

10章 波動現象

§10.1 波動方程式

形を変えず、一定の速さで進む流体を考えよう。

時刻 t_0 での波の形（流体表面の“山”“谷”の形）が関数 $f(x)$ で表されるとする。この波が x 軸に沿って正の向きに進んでいるとしよう。時刻 $t_0 + t$ では、波の形は変わらず関数 f で表されるが、波が移動したので $f(x - vt)$ と書ける。波の各点は距離 vt 進んだので、 x が vt だけ大きいところが t_0 での元々の波の形と同じになっているからである。

よって“波動” ξ は、 x 軸正の向きに進むときには

$$\xi(x, t) = f(x - vt)$$

となり、負の向きに進むときには、速度の向きが異なるので v を $-v$ として

$$\xi(x, t) = g(x + vt)$$

というように、空間 x 、時間 t に対する依存性を持つ。

波を表す方程式を考えてみよう。方程式が時間の1階微分を含むとすると、“右”(x 軸正の向き)に動く波では $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{d\xi}{d(x - vt)}$ と、 $-v$ が現れる。一方、“左”(x 軸負の向き)に動く波では $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v \frac{d\xi}{d(x + vt)}$ と、 $+v$ が現れる。右に進むか左に進むかという人為的なもの（“右”と“左”は座標の取り方で変わる人為的なもの）で結果が変わるのはおかしいので、基礎方程式としては時間に関して2階微分を含むことが必要になる（ $(-v) \times (-v) = v \times v = v^2$ ）。したがって、 $\xi(x, t) = f(x - vt)$ 、 $\xi(x, t) = g(x + vt)$ とともに満たされる方程式として

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (10.1)$$

が得られる。（座標微分は“右”に進む波も、“左”に進む波も、 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d(x \pm vt)}$ となって、同じ結果を与えている。）今は波動の進行する方向を x 軸方向に限定したが、一般には空間は3次元であるから、空間微分を $\partial^2/\partial x^2 \rightarrow \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ に置き換えて

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0$$

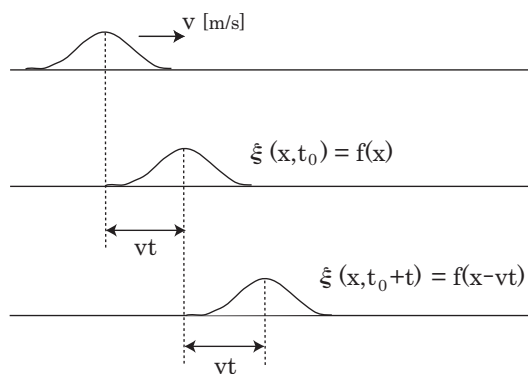


図 26:

とすれば良い。これを波動方程式と呼び、波という現象を記述する基礎方程式である。ここに現れた v は、導出から明らかなように波の進行する速さである。

§ 10.2 振動数・波長

波の簡単な例として、正弦波を考えてみよう。

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(-k(x - vt)) , \quad \text{但し } v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

は、1次元波動方程式 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$ の解である。実際、代入して確かめてみればよい。

x を $x + \frac{2\pi}{k}$ としても、 $\xi(x, t)$ の形は全く変わらない。ここで、

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{2\pi}{k} & : \text{ 波長} \\ k & : \text{ 波数} \end{aligned}$$

と呼ぶ。波長は波の山（谷）から山（谷）までの長さ、波数は長さ 2π の中に含まれる波（の山または谷）の数である。

時間 t を $t + \frac{2\pi}{\omega}$ としても、 $\xi(x, t)$ の形は全く変わらない。ここで、

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} & : \text{ 周期} \\ \nu = \frac{1}{T} & : \text{ 振動数} \end{aligned}$$

と呼ぶ。周期は波の山（谷）から次の山（谷）がやってくるまでの時間、振動数は単位時間あたりやってくる波の数である。 $\omega = 2\pi\nu$ の関係があり、 ω を角振動数と呼ぶ。

また、波の速さ v と角振動数 ω 、波数 k の間には $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ の関係があった。よって、

$$v = \lambda\nu$$

の関係が成り立っていることがわかる。

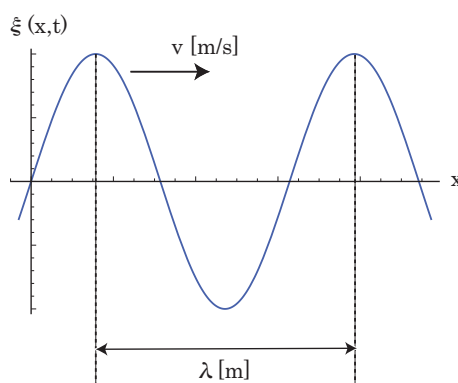


図 27:

§ 10.3 弾性棒を伝わる波

さて、§6.3では、弾性体の振動を扱った。これは同一質量の質点と同じばね定数のばねで1次元的に結びついた質点系の振動と、本質的には同じであった。運動方程式は(9.34)と求められているが、この方程式は波動方程式(10.1)と同じである。こうして、弾性体の棒の振動は、波として伝わるのがわかる。このとき、変位方向(x 方向とした)と、波の伝わる方向は同じである。このような波を縦波と呼ぶ。波の伝わる速さ v は(10.1)と(9.34)を見比べて

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

であることがわかる。

§ 10.4 弦を伝わる波

両端を固定された弦を考える。すなわち、 x 軸に沿って張力 T で張られた線密度 ρ の弦を考えよう。この弦に x 軸に垂直な方向に変位 ζ を与えたところ、振動は伝わっていく。図のように各量をとろう。また、重力の影響は無視する。

x の位置での弦の変位を $\zeta(x)$ と書き、その位置での弦の張力を $T(x)$ とする。図のABの部分の弦を考える。点Aでの張力の鉛直(変位の)方向成分は

$$T(x) = -T \sin \theta(x)$$

であり、B点での張力の鉛直(変位の)方向成分は

$$T(x + \Delta x) = T \sin \theta(x + \Delta x)$$

である。よって、AB間の弦の部分に働く力の鉛直成分は

$$\begin{aligned} F &\equiv T(x) + T(x + \Delta x) = -T \sin \theta(x) + T \sin \theta(x + \Delta x) \\ &\approx -T \sin \theta(x) + T \left(\sin \theta(x) + \frac{\partial \sin \theta(x)}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \\ &= T \frac{\partial \sin \theta(x)}{\partial x} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

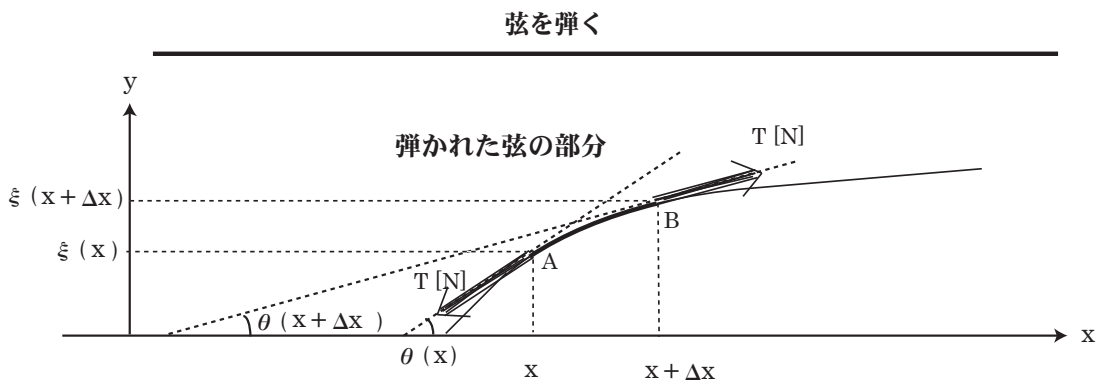


図 28:

となる。ここで、角度 θ が小さいので、

$$\sin \theta(x) \approx \theta(x) \approx \tan \theta(x) \approx \frac{\Delta \zeta}{\Delta x} \approx \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

として良いので、働く力 F は、上式から

$$\begin{aligned} F &\approx T \frac{\partial \sin \theta(x)}{\partial x} \cdot \Delta x \approx T \frac{\partial \tan \theta(x)}{\partial x} \cdot \Delta x \approx T \frac{\partial(\partial \zeta / \partial x)}{\partial x} \cdot \Delta x \\ &= T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned}$$

となる。

一方、変位の加速度 a は

$$a = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

より、AB 間の弦の運動方程式は

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \Delta x$$

となる。整理すると、

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0$$

となる。これは波動方程式であるので、弦の振動は波動として伝わるのがわかる。また、そのときの波の速さ v は

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

であることも併せて示された。また、弦の振動の場合、変位の方向 (y 方向とした) と、波の伝わる方向 (x 方向であった) は直交している。このような波を横波と呼ぶ。

§ 10.5 音波

音は空気の疎・密が伝わる波動現象である。

空気の密度を ρ [kg/m³]、考えている空気柱の断面積を S [m²]、注目している空気の部分の幅を Δx [m]、及び 2 の面に働く圧力を P_1 [Pa]、 P_2 [Pa]、空気の変位を ξ [m] と書く (図 29 を参照) と、ニュートン方程式は、図から

$$\rho S \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P_1 - P_2) S \quad (10.2)$$

と書けることがわかる。時間 Δt [s] の間に、注目している 1 と 2 の面で挟まれた空気の体積変化 ΔV が起きたとしよう。この体積変化は 2 の面と 1 の面の移動した距離の差 $v_2 \Delta t - v_1 \Delta t$ に断面積 S を掛けたものになる。ここで、 v_1 [m/s]、 v_2 [m/s] は 1、及び 2 の面が動く速さである：

$$\Delta V = (v_2 \Delta t - v_1 \Delta t) S \quad (10.3)$$

よって

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S(v_2 - v_1) = \frac{V}{\Delta x} (v_2 - v_1) = V \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (V = S \cdot \Delta x) \quad (10.4)$$

が得られる。

空気の疎密の変化は熱量の変化無く早く行なわれる（断熱変化）。断熱変化では気体の体積 V と圧力 P の間には

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (10.5)$$

という関係があることが知られている（「熱力学」で習う）。ここで、 γ は“定圧熱容量” C_P と“定積熱容量” C_V の比で、 $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ である。(10.5) 式から、断熱変化での体積の変化 ΔV と圧力の変化 ΔP の関係は、

$$\Delta P = \Delta \left(\frac{\text{一定}}{V^\gamma} \right) = -\gamma \frac{\text{一定}}{V^{\gamma+1}} \Delta V = -\gamma \frac{P}{V} \Delta V \quad (10.6)$$

として得られる。

さて、(10.2) 式に戻ると、右辺は圧力の変化 $\Delta P = P_2 - P_1$ が表れているので、整理しておく

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\Delta P \quad (10.7)$$

となるが、断熱変化での圧力変化を代入して

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\Delta P}{\Delta x} = \gamma \frac{P}{V} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \gamma \frac{P}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (10.8)$$

となる。ここで (10.4) 式を上式に代入し、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとって微分で書く。このとき、速さ v は変位 ξ を使って $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ であることから、上の式は

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \gamma P \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma P \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma P \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (10.9)$$

が得られる。最終的に整理して

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \gamma \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (10.10)$$

となる。これは波動方程式 (10.1) であり、空気の疎密は波動として伝わるのがわかる。これが音波である。また、音波は、振動の方向（空気の粗密の変化の方向）と同じ方向に伝わる。波の伝わる方向と振動の方向が同じである波を、縦波と呼ぶ。また波としての音の速さ v は波動方程式から

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (10.11)$$

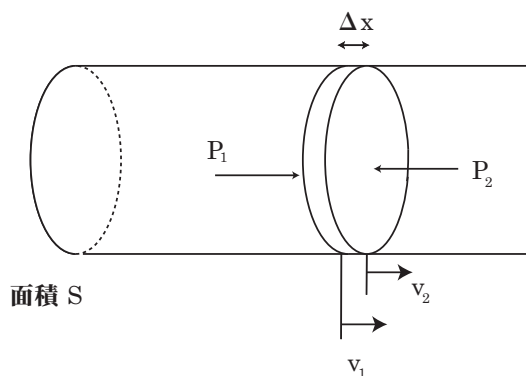


図 29:

であると読み取れる。

[註] 空気中を伝わる音速を概算してみよう。空気は窒素（分子量 28）と酸素（分子量 32）が 4 対 1 で混合しているの、空気の密度は $0.8 \times 28 + 0.2 \times 32 = 28.8 \text{ g/mol}$ 。1 モルあたり気体は 22.4 リットル占めるので

$$\rho = \frac{28.8 \times 10^{-3} \text{ [kg/mol]}}{22.4 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/mol]}} = 1.29 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

酸素も窒素も 2 原子分子なので、定積熱容量は $C_V = \frac{5}{2}R$ 、定圧熱容量は $C_P = \frac{7}{2}R (= C_V + R)$ である。ここで R は気体定数。こうして、

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1.4$$

温度 0°C で大気の圧力 P は

$$P = 1.013 \times 10^5 \text{ [N/m}^2\text{]} (= \text{[Pa]})$$

よって、音速 v は

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{1.4 \times \frac{1.013 \times 10^5}{1.29}} = 332 \text{ [m/s]}$$

11章 剛体の回転

§11.1 回転の表現

§§11.1.1 回転の行列表示

この節では、回転を表す数学的方法について述べる。次節以降で直接必要なのはオイラーの定理とオイラー角であるが、回転を表す数学は後に素粒子論などで必要となる連続群の雛型であり、ここで記述する価値があると考えられる。[†]

空間回転で互いに移りあう2つの座標系を設定しよう。互いに原点を共有する直交単位ベクトルの組を $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 、 $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ としよう。このとき、ある $l = (l_{ij})$ が存在し、2つの座標を結び付けているものとする。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= l_{11}\mathbf{e}_1 + l_{12}\mathbf{e}_2 + l_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= l_{21}\mathbf{e}_1 + l_{22}\mathbf{e}_2 + l_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= l_{31}\mathbf{e}_1 + l_{32}\mathbf{e}_2 + l_{33}\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 l_{ij}\mathbf{e}_j$$

と纏める。任意のベクトル \mathbf{x} は直交単位ベクトル $\{\mathbf{e}_i\}$ 、または $\{\mathbf{e}'_i\}$ を基底ベクトルとして

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \xi_i\mathbf{e}'_i$$

と書けるが、 \mathbf{e}_i と \mathbf{e}'_i との変換から

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \xi_i\mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \xi_i l_{ij}\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 l_{ji}\xi_j \right) \mathbf{e}_i$$

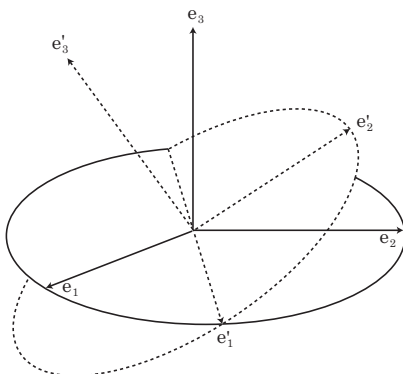


図 30:

[†]回転は空間座標を回すことであるが、相対論で出てくるローレンツ変換はミンコフスキー空間のある種の回転であり、本節の内容が活かされる。また、電磁気学などで現れるゲージ変換は、素粒子を記述するための“内部空間”の回転であり、やはり本節の内容が重要な雛型となる。

と書ける。ここで、最後の等式では和の添え字を交換した。こうして、ベクトルの成分の変換として、

$$x_i = \sum_{j=1}^3 l_{ji} \xi_j$$

が得られる。これを行列表示して

$$\begin{aligned} \vec{x} &= R^t \vec{\xi}, \\ \vec{x} &\equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\xi} \equiv \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \\ R &\equiv \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。ただし、 R^t は行列 R の転置行列を意味する。ここで、行列 R を回転行列と呼ぼう。空間回転のもとで、ベクトルの長さは変わらないので

$$\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 \xi_i^2$$

が成り立つ。左辺を回転行列を用いて ξ_i で書き直すと

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 l_{ji} \xi_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 l_{ki} \xi_k \right) = \sum_{i=1}^3 \xi_i^2$$

となるので、これより

$$\sum_{i=1}^3 l_{ki} l_{ji} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

となっていなければならないことがわかる。ここで、 δ_{jk} はクロネッカーのデルタである。これを回転行列 $R = (l_{ij})$ で書くと

$$RR^t = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。この関係を満たす行列 R は数学的には直交行列と呼ばれている。また、直交行列によるベクトルの変換は直交変換と呼ばれる。空間回転は直交変換の一種である。上の関係を用いると、 \vec{x} から $\vec{\xi}$ への逆変換は

$$\vec{x} = R^t \vec{\xi}, \quad \rightarrow \vec{\xi} = R \vec{x}$$

となる。

直交変換としての3次元空間回転の性質をもう少し見ておこう。まず、 $R^t R = R R^t = 1$ から、6個の条件式が出てくる。行列 R は9個の成分を持つので、 $(9 - 6 = 3)$ 個の独立な成分が残る。これが、各軸の周りを回転させる3つの独立な回転角に対応する。また、 $R^t R = 1$ から、両辺の行列式をとると、 $\det R = \det R^t$ より

$(\det R)^2 = 1$ となり、“回転しない”恒等変換 $R = 1$ の場合と連続的に繋がるためには $\det R = 1$ をとらなければならないことがわかる。数学的には $\det R = 1$ の直交変換は群をなすことが知られている。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{積:} & \quad R_1 \cdot R_2 = R_3 \\ \text{単位元:} & \quad R_e = 1 \\ \text{逆元:} & \quad R^{-1} = R^t \\ \text{結合律:} & \quad (R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3) \end{aligned}$$

が成り立つ。3次元回転がなす群は3次元特殊直交群と呼ばれ、 $SO(3)$ と記す。

最後に1軸、2軸、3軸周りの θ_1 、 θ_2 、 θ_3 回転行列を記しておこう。

$$\begin{aligned} \vec{y} &= R_1(\theta_1)\vec{x}, & \vec{z} &= R_2(\theta_2)\vec{y}, & \vec{\xi} &= R_3(\theta_3)\vec{z}, \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} & & (11.1) \\ \vec{\xi} &= R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\vec{x} = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)\vec{x} \end{aligned}$$

§§11.1.2 オイラーの定理とオイラー角

(i) オイラーの定理

原点を共有する2つの座標系は、1回の回転で移り変わる。この命題を示そう。1回の回転で移ると言うことは、回転軸が存在するということである。回転軸上のベクトルはこの変換で不変に保たれる。回転行列を R 、任意のベクトル \mathbf{x} とすると、数学的には

$$R\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

で、固有値 λ が1である場合が存在することが、回転軸が存在することと等価である。これをオイラーの定理と呼ぶ。この定理を証明しよう。

回転行列は実行列であったので、 $R^* = R$ が成り立つ[†]。よって、 \mathbf{x}^* は固有値 λ^* に対する固有ベクトルである。

$$R\mathbf{x}^* = \lambda^*\mathbf{x}^*$$

また、回転行列 R は直交行列であったので、 $R^t R = R R^t = 1$ である。ここで、 R^t は R の転置行列である。したがって、

$$R\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^\dagger R^t = \lambda^*\mathbf{x}^\dagger$$

となる。ここで、 \dagger は転置して複素共役をとる操作を意味する。両辺かけ算すると

$$\mathbf{x}^\dagger R^t R \mathbf{x} = \lambda^* \lambda \mathbf{x}^\dagger \mathbf{x}$$

[†]肩の記号 * は複素共役を取ることを意味する。

となるが、左辺の $R^t R$ は 1 であるので、両辺を零でないベクトルのノルム $\boldsymbol{x}^t \boldsymbol{x}$ で割り算しておく

$$|\lambda|^2 = 1$$

が得られる。次に、直交行列はユニタリ行列 X を用いて対角化できるという数学の定理を用いる。ここではこの定理を証明するかわりに、実際に X を構成しておこう。行列 R の固有値 λ_k ($k = 1, 2, 3$) に対する固有ベクトル \boldsymbol{x} の j 成分を $x_j^{(k)}$ と書くと

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j^{(k)} = \lambda_k x_i^{(k)}$$

と成分表示できるが、 $x_j^{(k)} = X_{jk}$ と、行列 X の jk 成分として新しい行列 X を定義すると、上の固有値方程式は行列の形で、

$$(RX)_{ik} = \lambda_k X_{ik} = \sum_{j=1}^3 X_{ij} \delta_{jk} \lambda_k = (X\Lambda)_{ik},$$

但し $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

と書ける。ここで、 δ_{jk} はクロネッカーのデルタである。こうして、

$$X^{-1}RX = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

のように対角化されることが言える。両辺、行列式をとると、

$$\det R = \det(X^{-1}RX) = \det \Lambda = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

となるが、直交行列 R の行列式は 1 であるので、

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

が得られる。これと、先ほど導いた $|\lambda_i| = 1$ をあわせると、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ の少なくとも一つは実数で 1 であることがわかる。これでオイラーの定理は証明された。

(ii) オイラー角

3次元空間に静止座標系を設定する。3次元空間での回転は、静止座標系から2つの角を用いて回転軸の方向を決め、1つの角でその回転軸の周りの回転角を与えることで完全に決定される。そのために、オイラー角を導入しておこう。まず空間に x_1, x_2, x_3 の3軸を設定しておく。ここから回転軸 x'_3 軸を決めるのに2つの角度を用いる。図31を参照しながら考えていこう。まず、 x_3 軸の周りに φ 回転する。この回転により x_1 - x_2 平面は角 φ 回転している。続いて回転した x_1 軸の周りに θ 回転する。これにより x_3 軸は望む方向に移動し、回転軸 x'_3 を与える。最後に、 x'_3 軸の周りに ψ 回転する。これで、任意の回転を与えることができる。

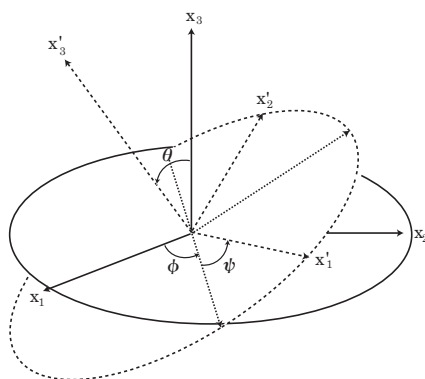


図 31:

この操作から、回転行列 R は

$$\begin{aligned}
 R &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と表現される。

§ 11.2 剛体の角速度・慣性テンソル・角運動量

§§11.2.1 剛体

質点相互間の距離が不変であるような質点の集まりを剛体という。全く変形しない理想化された物体である。質点の集まりと考えると、位置 \mathbf{r}_a にある質点の質量を m_a とすると、剛体の質量 M はすべての質点の寄与の和を取ることで $M = \sum_a m_a$ と書ける。連続的に質量が分布していると考えられるときには、各質点の質量を、質量密度 ρ とその近傍の微小体積 $dV = dx dy dz$ の積で表し、各質点についての和は剛体全体にわたる積分に置き換えれば良い。

$$\sum_a m_a \longrightarrow \int dV \rho$$

今後、いつでもこの手続きをとって、連続体に移行する。

剛体の慣性中心（重心）を原点にとり、剛体に結びつけた座標系を $(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ と表すことにする。これを剛体固定系と呼ぶことにしよう。また、原点は剛体固定系の原点と一致し、静止した慣性系の座標を (X, Y, Z) で表わすことにしよう。剛体の座標を指定するには、剛体の慣性中心の位置と、剛体の向きが必要である。3次元空間ではそれぞれ3つの変数を必要とするので、剛体の自由度は特別な対称性が無い限り、一般に6となる。

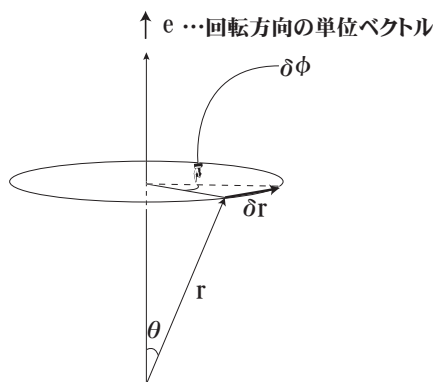


図 32:

§§11.2.2 角速度

剛体が回転する場合を考えていこう。剛体が、ある回転軸のまわりに、小さな角度 $d\varphi$ だけ回転したとする。この回転に伴って剛体内の各点は、 dr だけ動いたとする。このとき、動いた距離 $dr = |dr|$ は、図 32 からわかるように

$$dr = r \sin \theta d\varphi$$

となっている。ここに角度 θ は、回転軸と、剛体内の考えている点の位置ベクトルがなす角である。今、回転軸の方向を示すために、回転軸方向を向いていて、大きさが回転角 $d\varphi$ に等しいベクトル $d\varphi$ を導入すると、前式は向きまで含めて

$$dr = d\varphi \times r \quad (11.2)$$

のように、ベクトル積（外積）を用いて書けることがわかる。

さて、回転が微小時間 dt の間に起こったとすると、剛体内の点の速度は、上式の両辺を dt で割り算して、 $dt \rightarrow 0$ の極限を取ることにより

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dr}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \\ \text{但し } \boldsymbol{\Omega} &= \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

と表される。ここで $\boldsymbol{\Omega}$ を角速度と呼ぶ。式から明らかなように、角速度の大きさは、回転の角度が時間的に変化する割合である。また、角速度の方向は回転軸方向にある。

前節で導入したオイラー角を用いて角速度を表しておこう。角度の時間変化を $\frac{d\theta}{dt} \equiv \dot{\theta}$ と表す。剛体固定軸 x_1, x_2, x_3 に、オイラー角の時間変化を射影すると、オイラー角 θ の時間変化 $\dot{\theta}$ の x_1 軸成分を $\dot{\theta}_1$ 等と記すと、

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \dot{\theta} \cos \psi, & \dot{\theta}_2 &= -\dot{\theta} \sin \psi, & \dot{\theta}_3 &= 0, \\ \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, & \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, & \dot{\varphi}_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta, \\ \dot{\psi}_1 &= \dot{\psi}_2 = 0, & \dot{\psi}_3 &= \dot{\psi} \end{aligned}$$

となる (図 33)。各成分を集めることで、角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ をオイラー角とその時間微分で表わすことができる。

$$\Omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \Omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad \Omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

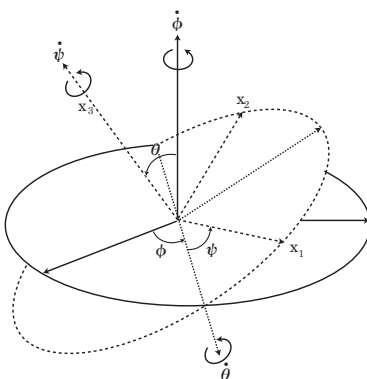


図 33:

§§11.2.3 剛体の角運動量と慣性モーメント

今、剛体の慣性中心を原点に取っているので、慣性中心の周りの剛体の角運動量は、剛体内のすべての質点の角運動量をベクトル的に足したものである。各質点を添え字 a で区別していると見なすと、全角運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{a=\text{質点}} (\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a) = \sum_{a=\text{質点}} m_a (\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a) \\ &= \sum_a m_a (\mathbf{r}_a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)) \\ &= \sum_a m_a [r_a^2 \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{r}_a (\mathbf{r}_a \cdot \boldsymbol{\Omega})] \end{aligned}$$

となる。ここで、 m_a は剛体内にある各質点の質量を表している。角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ は剛体内のすべての質点に対して共通であることに注意せよ[§]。またここで、ベクトルの3重積 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ の関係を利用した。今導いた全角運動量の式を、ベクトルの成分で表しておこう。ベクトルの成分を区別するために添え字 i をつける。ここで、 $i = 1, 2, 3$ がそれぞれ、 x, y, z 成分に相当する。こうして、角運動量の i 成分 L_i は

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{a=\text{質点}} m_a \left(\sum_{l=1}^3 (r_a)_l (r_a)_l \Omega_i - (r_a)_i \sum_{j=1}^3 (r_a)_j \Omega_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \Omega_j \sum_{a=\text{質点}} m_a \left[\sum_{l=1}^3 (r_a)_l (r_a)_l \delta_{ij} - (r_a)_i (r_a)_j \right]. \end{aligned}$$

ここで、 δ_{ij} は、クロネッカーのデルタであり、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{for } i = j) \\ 0 & (\text{for } i \neq j) \end{cases}$$

であった。全角運動量の表式は、角速度とそれ以外にわけて

$$L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega_j, \quad (11.3)$$

$$I_{ij} \equiv \sum_{a=\text{質点}} m_a \left[\sum_{l=1}^3 (r_a)_l (r_a)_l \delta_{ij} - (r_a)_i (r_a)_j \right] \quad (11.4)$$

[§] $\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$ だった。

と表すことができる。ここで定義した I_{ij} を慣性モーメントテンソルと呼んでいる。初めに述べたように、剛体が連続的な物体だと考えると、質点についての和 \sum_a は積分 \int に、質点の質量 m_a は剛体の質量密度 ρ と微小体積 $dV \equiv dx dy dz$ の積 ρdV に置き換えられるので、慣性モーメントテンソル I_{ij} は

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{ij} - r_i r_j] \\ &= \begin{pmatrix} \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) (y^2 + z^2) & - \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) xy & - \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) xz \\ - \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) yx & \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) (x^2 + z^2) & - \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) yz \\ - \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) zx & - \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) zy & \int dx dy dz \rho(\mathbf{r}) (x^2 + y^2) \end{pmatrix}_{ij} \end{aligned}$$

となる。

慣性モーメントテンソル I_{ij} は対称行列なので、うまく座標系をとれば、対角成分のみ値を持って、非対角成分はすべて 0 にすることができる[¶]。このような座標系を慣性主軸系と呼び、この座標系のもとでは

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

となる。慣性主軸系では剛体の角運動量は

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3 \quad (11.5)$$

と、それぞれの角速度に比例した形で書ける。ここで現れた I_1, I_2, I_3 を主慣性モーメントと呼ぶ。ここで、 I_1, I_2, I_3 は、式から読み取られるように、それぞれ x -、 y -、 z -軸から離れたところに置かれた物体の質量が大きいほど、大きな量であることがわかる。後に見るように、 I_1, I_2, I_3 は、 x -、 y -、 z -軸のまわりの“回転しにくさの度合い”を表していることがわかる。また、 $I_1 = I_2 = I_3$ のときには角運動量ベクトルと角速度ベクトルは同じ向きを向き、平行であるが、一般にはそうはなっていないことに注意しよう。

上に述べたことを、ある点の周りを回転する質点で確かめておこう。質量 m の質点が x - y 平面内で回転運動しているとしよう。このとき、角運動量は $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ であるが、 \mathbf{r} は x - y 面上にあるので、これと直交する角運動量ベクトル \mathbf{L} は z 軸方向を向いていて、その大きさ L_z は、

$$L_z = xp_y - yp_x = mr^2 \frac{d\varphi_z}{dt}$$

である。ただし、ここでの角度 φ_z は、 z 軸周りの回転の角度である。また、 r は x - y 面内にあるので、 $r^2 = x^2 + y^2$ である。結局、角運動量は

$$L_z = m(x^2 + y^2) \frac{d\varphi_z}{dt} = I_z \Omega_z$$

と表せる。ここに、 $I_z \equiv m(x^2 + y^2)$ である。 L_z が、 z 軸周りを回っている質量 m の質点のもつ角運動量である。同様に、 x 軸周り、 y 軸周りを回転する質量 m の質点の角運動量は

$$L_x = m(y^2 + z^2) \frac{d\varphi_x}{dt} = I_x \Omega_x, \quad L_y = m(z^2 + x^2) \frac{d\varphi_y}{dt} = I_y \Omega_y$$

と書ける。つまり、角運動量の α 成分は、“質量 \times 回転軸からの距離の 2 乗 \times 角速度の α 成分”という形をしていることがわかる。こうして、慣性モーメントが回転軸からの距離の 2 乗と質量の積で表わされる。すなわち、回転軸から離れたところに大きな質量のものがあれば、その軸の周りの慣性モーメントは大きくなる。物

[¶]数学的には、対称行列 I は直交行列 O を用いて、 OIO^{-1} として対角化可能である。

体が連続的に広がりを持っているとすると、上式の角運動量の表式で、質点の質量を広がりを持った物体の質量密度 ρ と微小体積 dV の積に置き換えて、すべての質点（質量分布）について和をとれば良いことになる。角速度はどの点でも同じなので、結局

$$\begin{aligned} L_x &= \iiint \rho(y^2 + z^2) dV \cdot \frac{d\varphi_x}{dt}, & L_y &= \iiint \rho(z^2 + x^2) dV \cdot \frac{d\varphi_y}{dt}, \\ L_z &= \iiint \rho(x^2 + y^2) dV \cdot \frac{d\varphi_z}{dt} \end{aligned}$$

となる。ここで、主慣性モーメント I_x 、 I_y 、 I_z は

$$I_x = \iiint \rho(y^2 + z^2) dV, \quad I_y = \iiint \rho(z^2 + x^2) dV, \quad I_z = \iiint \rho(x^2 + y^2) dV$$

となっている。このとき、角運動量の各成分は

$$L_x = I_x \Omega_x, \quad L_y = I_y \Omega_y, \quad L_z = I_z \Omega_z, \quad \text{ここで} \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

と、再び得られる。

§§11.2.4 剛体の回転のエネルギー

慣性中心を固定した原点に取り、剛体の回転の運動エネルギーを見ておこう。運動エネルギー T は

$$T = \sum_{a=\text{質点}} \frac{1}{2} m_a \mathbf{v}_a^2 \quad (11.6)$$

である。ここで、回転の場合には各点 a での速度 \mathbf{v}_a は $\mathbf{v}_a = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a$ であった。これを代入し、角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ と a での位置ベクトル \mathbf{r}_a のなす角度を θ_a とすると

$$\begin{aligned} T &= \sum_a \frac{1}{2} m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2 \\ &= \sum_a \frac{1}{2} m_a (\Omega^2 r_a^2 \sin^2 \theta_a) = \sum_a \frac{1}{2} m_a \Omega^2 r_a^2 (1 - \cos^2 \theta_a) \\ &= \frac{1}{2} \sum_a m_a [\Omega^2 r_a^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_a)^2] \end{aligned}$$

となる。ここで、ベクトルを成分表示して表わすと

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_a m_a \left[\sum_{i=1}^3 \Omega_i^2 \sum_{l=1}^3 (r_a)_l^2 - \sum_{i=1}^3 \Omega_i (r_a)_i \sum_{j=1}^3 \Omega_j (r_a)_j \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Omega_i \Omega_j \sum_a m_a \left(\sum_{l=1}^3 (r_a)_l^2 \delta_{ij} - (r_a)_i (r_a)_j \right) \end{aligned}$$

となる。再び、慣性モーメントテンソルが現れた。こうして、回転のエネルギー T は

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 I_{ij} \Omega_i \Omega_j$$

と書ける。慣性主軸系では

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)$$

となる。

§ 11.3 剛体回転の運動方程式

§§11.3.1 剛体回転の運動方程式

剛体の角運動量 \mathbf{L} は、前節で見たように、 $\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a$ であったので、両辺を時間で微分することで、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_a \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \times \mathbf{p}_a + \sum_a \mathbf{r}_a \times \frac{d\mathbf{p}_a}{dt}$$

となる。ここで、右辺第1項は、速度 ($\mathbf{v}_a = \frac{d\mathbf{r}_a}{dt}$) と運動量 ($\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$) が同じ方向を向いていることに注意すると $\mathbf{0}$ になることがわかる。一方、第2項の運動量の時間微分は、ニュートンの運動法則から、剛体内のこの部分に働く力 \mathbf{f}_a を用いて書き直せる。結局、剛体回転の運動方程式は、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K}, \quad (11.7)$$

$$\text{ここで } \mathbf{K} = \sum_{a=\text{質点}} \mathbf{r}_a \times \mathbf{f}_a$$

と得られる。ここで、 \mathbf{K} は力のモーメントと呼ばれる。剛体内の質点同士に作用しあう力は、作用・反作用の法則によって、すべて打ち消しあってしまい、 \mathbf{K} には効いてこない。よって、 \mathbf{f}_a としては、その質点に働く外力だけを考えればよいことに注意しておこう。

例えば、座標の原点を \mathbf{a} だけずらすと $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$ として、

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{a=\text{質点}} \mathbf{r}_a \times \mathbf{f}_a = \sum_{a=\text{質点}} \mathbf{r}'_a \times \mathbf{f}_a + \sum_{a=\text{質点}} \mathbf{a} \times \mathbf{f}_a \\ &= \mathbf{K}' + \mathbf{a} \times \mathbf{F}, \quad (\mathbf{F} = \sum_{a=\text{質点}} \mathbf{f}_a). \end{aligned}$$

となる。もし、 \mathbf{K} と \mathbf{F} が直交 ($\mathbf{K} \cdot \mathbf{F} = 0$) していれば、 \mathbf{a} をうまく選ぶと、 $\mathbf{K}' = \mathbf{0}$ にすることが可能である。すなわち、 \mathbf{a} をうまくとって、 $\mathbf{K} = \mathbf{a} \times \mathbf{F}$ とすることが可能である。こうして、剛体に働く力のモーメント \mathbf{K} を、一定の直線上に作用点を持つ剛体に働く合力 \mathbf{F} で表すことが出来る。

例として、一様な重力場を考えよう。合力 \mathbf{F} と力のモーメント \mathbf{K} は

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} \sum_a m_a, \quad \mathbf{K} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{g}, \quad (\mathbf{F} \cdot \mathbf{K} = 0).$$

となり、この場合には \mathbf{F} と \mathbf{K} は直交している。従って、上の議論から、うまい座標系をとれば、力のモーメント \mathbf{K} は剛体に働く合力 \mathbf{F} で表わされるはずである。今、慣性中心 $\mathbf{R}_0 = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{\sum_a m_a}$ を導入すると、

$$\mathbf{K} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{g} = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{g} \sum_a m_a = \mathbf{R}_0 \times \mathbf{F}$$

となる。こうして、慣性中心に働く1つの力 \mathbf{F} の作用により、剛体の回転運動 $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ が決定されることになる。

さて、運動方程式 (11.7) に戻ろう。同じ力のモーメント \mathbf{K} が働いたとしても、角運動量の成分は主慣性モーメントと角速度の成分を掛けたものなので、主慣性モーメントが大きいと角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ の時間変化は小さくなることがわかる。したがって、主慣性モーメントは、剛体の回転のしにくさ (回転に対する慣性) を表していることがわかる。

§§11.3.2 剛体回転の例:対称コマの自由回転

剛体が対称軸を持っているとしよう。その軸を x_3 軸とする (図 34)。すなわち、剛体は x_3 軸の周りに回転しても何も変わらない。 x_3 軸とそれに直交する 2 軸を慣性主軸系にとれば、剛体は x_3 軸の周りに対称なので、

$$I_1 = I_2$$

である。この剛体を、“対称コマ”と呼ぶことにしよう。剛体に外力が働いていないときには、力のモーメント \mathbf{K} は $\mathbf{0}$ となるので、剛体回転の運動方程式から

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0},$$

すなわち、剛体の角運動量は保存することがわかる。角運動量ベクトルと剛体の対称軸 (x_3 軸) を含む平面に垂直に x_2 軸をとると、 $L_2 = 0$ から、 $\Omega_2 = \frac{L_2}{I_2} = 0$ であることがわかる。すなわち、 \mathbf{L} 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 x_3 軸は常に同じ平面 (x_1 - x_3 平面) 内にあることがわかる (図 35)。剛体の対称軸は $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ の速度を持って動くが、剛体の対称軸上のベクトル \mathbf{r} は x_3 軸に平行なので、この \mathbf{v} は $\boldsymbol{\Omega}$ とも、対称軸 x_3 軸とも垂直であるので、剛体の対称軸は常に \mathbf{L} 、 $\boldsymbol{\Omega}$ 、 x_3 軸が含まれる平面に垂直に動いていこうとする。すなわち、“対称コマは対称軸のまわりを回転しながら、対称軸は保存する角運動量ベクトル \mathbf{L} のまわりを一様に回転する”という状況が実現される。これをコマの歳差運動と呼ぶ。

角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の対称軸 (x_3 軸) 成分 Ω_3 は、コマ自身の回転の角速度である。角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ の角運動量 \mathbf{L} の方向の成分が、歳差運動の角速度 $\Omega_{\text{歳差}}$ になる。角運動量ベクトルと x_3 軸のなす角度を θ とすると、

$$\begin{aligned} \Omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \frac{L}{I_3} \cos \theta, \quad \Omega_{\text{歳差}} \sin \theta = \Omega_1 = \frac{L_1}{I_1} = \frac{L}{I_1} \sin \theta, \\ \Omega_{\text{歳差}} = \frac{L}{I_1} \end{aligned}$$

と得られる。

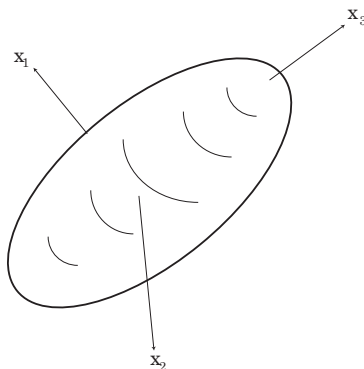


図 34:

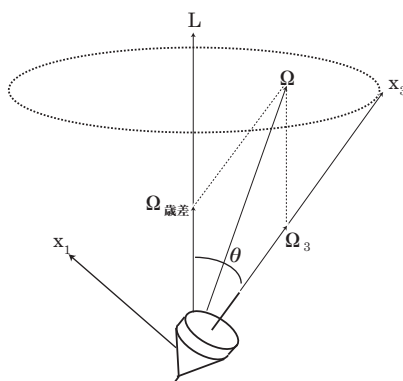


図 35:

§§11.3.3 剛体の釣り合い

剛体に力が働いているにもかかわらず、剛体が動かないための条件は、まず剛体に働く力が釣り合っていて、合力 \mathbf{F} が $\mathbf{0}$ となっていないなければならないことである。さらに、力のモーメント \mathbf{K} も釣り合っていて、全体として $\mathbf{0}$ になっていなければ剛体は回転してしまう。これらの両条件を表すと、

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{F}_a = \mathbf{0}, \quad \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0} \right)$$

$$\mathbf{K} = \sum_a \mathbf{K}_a = \mathbf{0}, \quad \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \right).$$

と書ける。

剛体が他の物体に接触していて釣り合っているときには、接触する他の物体から及ぼされる力も考慮に入れなければならない。すなわち、抗力や摩擦力まで考えないといけなくなる。接触面が完全に粗いときには、接触点において相対運動が無い。このとき、剛体はころがる。接触面と摩擦が全く無いような、完全に滑らかな状況ではなくても、接触面に沿う方向に摩擦力が働くときには剛体はすべる。接触面が完全に粗いか完全に滑らかな場合には摩擦力はあからさまには現れてこない。

具体例を一つ取り上げよう。図 41 のように、太さの無視できる質量 m [kg] で長さ $2l$ [m] の一様な剛体棒が床から壁に立て掛けられているとしよう。このとき、棒が滑り出して倒れる直前の角 θ を求める。棒と床、棒と壁の静止摩擦係数をそれぞれ μ_A 、 μ_B としよう。滑り始める直前には垂直抗力 N_i と静止摩擦力 F_i には $F_i = \mu_i N_i$ の関係があることが知られている。図の様に垂直抗力、摩擦力が考えられる。棒に働く重力は慣性中心に下向きに mg [N] である。水平方向の力のつり合いは

$$N_B = F_A, \quad F_A = \mu_A N_A$$

垂直方向の力のつり合いは

$$N_A + F_B = mg, \quad F_B = \mu_B N_B$$

次に、剛体が回転しないためには、ある点のまわりの力のモーメントがつり合っていることが必要である。どの点の周りでも良いが、ここでは A 点の周りで考えよう。力のモーメントはベクトルの外積で与えられることに注意して、力のモーメントのつり合いは

$$N_B \cdot 2l \sin(\pi - \theta) + F_B \cdot 2l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = mg \cdot l \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

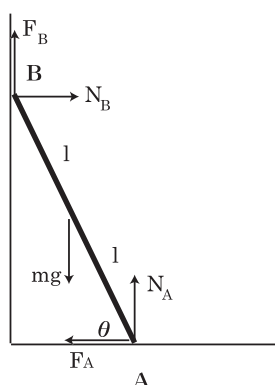


図 36:

となる。以上の式から F_A 、 F_B 、 N_A 、 N_B を消去すると

$$\tan \theta = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2\mu_A}$$

が得られる。このようにして、角 θ が決定される。

§ 11.4 オイラーの運動方程式

慣性主軸系をとり、運動方程式を再構成しよう。静止系では

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K}$$

と得られているので、これを慣性主軸系で書き直そう。慣性主軸を x_1 、 x_2 、 x_3 とし、その基底ベクトルを \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 、 \mathbf{e}_3 と書くと、角運動量はこの座標で

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3$$

と書ける。基底ベクトルは剛体に結びつけられているので、剛体が回転するとともに動いていく。回転でのベクトルの変換はすでに得られており、微小回転 $d\varphi$ のもとでの基底ベクトルの変位 $d\mathbf{e}_i$ は

$$d\mathbf{e}_i = d\varphi \times \mathbf{e}_i$$

となる。よって、角運動量の時間変化 $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ は、角度の時間変化 $\boldsymbol{\Omega} = \frac{d\varphi}{dt}$ のもとで、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{dL_1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dL_2}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dL_3}{dt} \mathbf{e}_3 + L_1 \frac{d\mathbf{e}_1}{dt} + L_2 \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} + L_3 \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} \\ &= \frac{dL_1}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dL_2}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dL_3}{dt} \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L} \end{aligned}$$

となる。ここで、慣性主軸系では $L_i = I_i \Omega_i$ であるので、主慣性モーメントが時間に依存しないとして、上の式に代入することで

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \Omega_3 \Omega_1 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= K_3 \end{aligned} \tag{11.8}$$

となる。この運動方程式をオイラーの運動方程式と呼ぶ。

§ 11.5 剛体の運動の例

§§11.5.1 地球の自転

オイラーの運動方程式を用いて、再び対称コマの自由回転を記述しておこう。対称軸を x_3 軸にとると、主慣性モーメントは $I_1 = I_2$ となる。自由回転であるので、力のモーメントは働いていないとしてよい。すなわち $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ である。よって、オイラーの運動方程式は

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\omega\Omega_2, \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \omega\Omega_1, \quad \frac{d\Omega_3}{dt} = 0,$$

$$\omega \equiv \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

となる。ここで、 ω を定義した。この解は容易に得られ、

$$\Omega_1 = A \cos \omega t, \quad \Omega_2 = A \sin \omega t, \quad \Omega_3 = \text{定数}$$

となる。角速度 Ω_1 、 Ω_2 は対称軸の周りを角速度 ω で回転することがわかる。この ω は歳差運動の角速度である。

さて、宇宙空間に浮かぶ地球は、他から力のモーメントを受けずに自由回転しているものと考えてみよう。地球は赤道が膨らんだ扁平な回転楕円体と近似的にみなせる。したがって、第0近似では、簡単に対称コマの自由回転とみなせる。対称軸を x_3 軸にとると、主慣性モーメントは $I_1 = I_2$ であり、また、

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx 0.0033$$

であるという。地球は1日1回転しているので、角速度の対称軸成分 Ω_3 は

$$\Omega_3 \approx 1 \text{ 回転/day}$$

である。また、角速度ベクトルは対称軸と少しずれていて、角速度ベクトルと対称軸のなす角を α とすると、おおよそ

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx 0.3''$$

である。歳差運動の角速度は

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx 0.0033 \text{ 回転/day}$$

と得られる。よって、理論的にはおおよそ300日で角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は対称軸の周りを1回転するといえる。観測ではおおよそ440日と見積もられている。この相違は地球が完全な剛体ではないことなどに帰せられるであろう。

§§11.5.2 一様な重力場内での対称コマの運動

次に、対称コマが一様な重力場内で回転している状況を考察しよう。静止系の座標を (X, Y, Z) とする。コマの支点に静止座標系の原点をとり、鉛直上向きに Z 軸を取る。コマの対称軸を x_3 軸とすると、主慣性モー

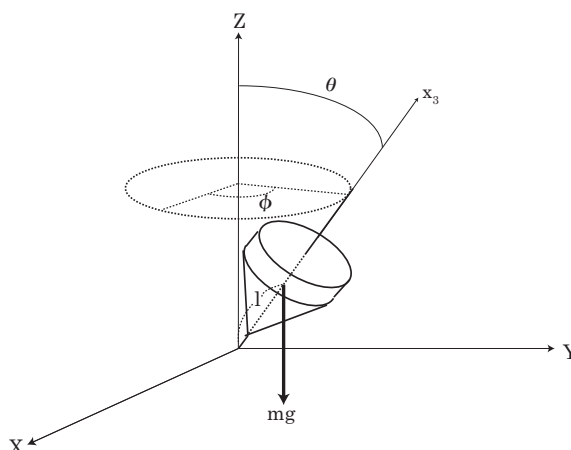


図 37:

メントは $I_1 = I_2$ である。コマの慣性中心の運動エネルギー $T_{\text{慣性中心}}$ は、コマの質量を m として、図から読み取れるように

$$\begin{aligned} T_{\text{慣性中心}} &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m \left(\left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(l \sin \theta \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、オイラー角を用いている。対称コマの回転の運動エネルギー $T_{\text{回転}}$ は §§7.2.4 で導かれており、

$$\begin{aligned} T_{\text{回転}} &= \frac{1}{2} (I_1 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3 \Omega_3^2) \\ &= \frac{1}{2} I_1 \left(\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta \right)^2 \end{aligned}$$

と表わされる。ここで、§§7.2.2 の角速度のオイラー角による表示を用いた。重力場中での対称コマのポテンシャルエネルギー $V(\varphi, \theta, \psi)$ は

$$V(\varphi, \theta, \psi) = mgl \cos \theta$$

である。

オイラーの運動方程式は、 $I_1 = I_2$ より

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_1) \Omega_2 \Omega_3 &= K_1, \\ I_1 \frac{d\Omega_2}{dt} - (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_2 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} &= K_3 \end{aligned}$$

と書ける。ここで、力のモーメントは、静止系の原点（コマの支点）から対称軸上にあるコマの慣性中心までの距離を l として、

$$K_1 = mgl \sin \theta \cos \psi, \quad K_2 = -mgl \sin \theta \sin \psi, \quad K_3 = 0$$

となる。ここでも、オイラー角を用いた。まず、 $K_3 =$ より、角速度の第3成分は時間に依存しない。角速度のオイラー角表示から、

$$\Omega_3 = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt} = \frac{L_3}{I_3} = \text{一定}$$

となる。ここで、角運動量の第3成分 L_3 は保存量であることがわかった。また、対称コマに働く力 mg は静止座標系の Z 軸に平行であるので、角運動量の Z 成分も保存する。コマの慣性中心の運動に起因する角運動量の Z 成分 $L_Z^{\text{慣性中心}}$ は、角速度が $\frac{d\varphi}{dt}$ 、質量が慣性中心に集中していると考えて慣性モーメントは $m(l \sin \theta)^2$ であるので、

$$L_Z^{\text{慣性中心}} = ml^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt}$$

となる。さらに、コマ自身が対称軸の周りに回転しているので、その角運動量の Z 成分 $L_Z^{\text{コマ}}$ は

$$\begin{aligned} L_Z^{\text{コマ}} &= L_1 \sin \theta \sin \psi + L_2 \sin \theta \cos \psi + L_3 \cos \theta \\ &= I_1 \Omega_1 \sin \theta \sin \psi + I_2 \Omega_2 \sin \theta \cos \psi + I_3 \Omega_3 \cos \theta \\ &= I_1 \left(\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \sin \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi \right) \sin \theta \sin \psi + I_2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \sin \theta \cos \psi - \frac{d\theta}{dt} \sin \psi \right) \sin \theta \cos \psi \\ &\quad + I_3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta \\ &= I_1 \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta + I_3 \left(\frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta \\ &= I_1 \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta + L_3 \cos \theta \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、1行目は慣性主軸の角運動量成分から Z 方向に射影して角運動量の Z 成分を集め、1行目から2行目へは角運動量を主慣性モーメントと角速度で表わし、2行目から3行目へは角速度のオイラー角表示を代入した。3行目から4行目へは、考えている剛体が対称コマであることから $I_1 = I_2$ を使い、最後の行へは再び保存する L_3 を用いた。こうして、コマ全体の角運動量の Z 成分 L_Z は

$$L_Z = L_Z^{\text{慣性中心}} + L_Z^{\text{コマ}} = (I_1 + ml^2) \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} + L_3 \cos \theta$$

と得られる。これは保存量である。

さて、エネルギー E も保存量であるので、保存するエネルギーを、保存する角運動量 L_3 と L_Z を用いて表してみよう。

$$\begin{aligned} E &= T_{\text{慣性中心}} + T_{\text{回転}} + V(\theta) \\ &= \frac{1}{2}(I_1 + ml^2) \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{(L_Z - L_3 \cos \theta)^2}{2(I_1 + ml^2) \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{L_Z}{I_1 + ml^2}, & b &\equiv \frac{L_3}{I_1 + ml^2}, & k &\equiv \frac{2}{I_1 + ml^2} \left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} \right), & h &\equiv \frac{2mgl}{I_1 + ml^2}, \\ w &\equiv \cos \theta \end{aligned}$$

と定義すると、エネルギーの式は

$$\left(\frac{dw}{dt} \right)^2 = (1 - w^2)(k - hw) - (a - bw)^2 \equiv f(w)$$

と書き表わすことができる。ここで定義した関数 $f(w)$ は w の 3 次式である。左辺は 2 乗の形なので、物理的に意味があるのは $f(w) \geq 0$ かつ、 w の定義から $-1 \leq w \leq 1$ の領域である。形式的には $f(w \rightarrow -\infty) < 0$ かつ $f(w \rightarrow \infty) > 0$ であり、また、 $f(-1) < 0$ かつ $f(1) < 0$ であることは容易に確かめられる。よって、 $f(w) = 0$ という方程式が重根 $w = w_0$ を持つ時には、 $f(w) \geq 0$ かつ $-1 \leq w \leq 1$ であるのは、 w_0 のみであることがわかる。このときには、 $w = w_0$ 、すなわち $\theta = \theta_0$ のみが意味のある物理的な解となり、 $\theta = \theta_0 = \text{定数}$ であることから、コマの対称軸は静止系の Z 軸、すなわち鉛直方向から傾き θ_0 を保ったまま、歳差運動を行うことになる。

次に $f(w) = 0$ の解が 2 根 $w_1, w_2 (> w_1)$ を持つ場合を考えよう。すなわち、 $\theta_1 > \theta_2$ の場合である。このときには θ_2 と θ_1 の間では $f(w) \geq 0$ であるので、コマの対称軸は Z 軸、つまり鉛直方向から傾き θ_1 と θ_2 の間を振動しながら歳差運動することになる。傾き θ_1 と θ_2 の間を行き来する現象を章動と呼ぶ。章動では、 θ_1, θ_2 で $\frac{d\theta}{dt} = 0$ となる。この点では

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_Z - L_3 \cos \theta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \theta} = \frac{a - bw}{1 - w^2} = \frac{a - b \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}$$

であるが、 $b > 0$ ($L_3 > 0$) のときには以下の 3 つの場合が可能である。

- (1) $a > bw_2 (= b \cos \theta_2)$, このとき $\frac{d\varphi}{dt} > 0$,
- (2) $a = bw_2$, このとき $\frac{d\varphi_2}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi_1}{dt} \geq 0$
- (3) $bw_1 < a < bw_2$, このとき $\frac{d\varphi_2}{dt} < 0$, $\frac{d\varphi_1}{dt} > 0$

(1) の場合には正常な歳差運動しながら章動がおきるが、(2) の場合には、 θ_1 で歳差運動は一旦止まる。さらに (3) の場合には歳差運動の向きが一時逆転しながら進んでいくことになる。

さて、章動が起きず、歳差運動のみする場合についてもう少し考察しておこう。このときには、 $\theta = \theta_0$ かつ $\frac{d\theta}{dt} = 0$ である。 $\theta_0 = 0$ のときにはコマは直立して回転し、歳差運動しない。このような対称コマを眠りコマと呼んでいる。ここでは $\theta_0 \neq 0$ の場合を考える。関数 $f(w)$ は $f(w) = 0$ の方程式で重根 $w = w_0$ ($\theta = \theta_0$) を持つ。このとき、 $\left. \frac{df(w)}{dw} \right|_{w=w_0} = 0$ でもある。従って、

$$f(w) = 0, \quad \frac{df(w)}{dw} = 0$$

の 2 式を連立させて解けば重根が得られる。2 式を具体的に記せば、

$$\begin{aligned} (1 - w^2)(k - hw) - (a - bw)^2 &= 0, \\ -2w(k - hw) - h(1 - w^2) + 2b(a - bw) &= 0 \end{aligned}$$

となる。下式から $k - hw$ を得て上式に代入して k を消去する。また、 a, b, w の定義と L_3 を用いて表わした L_Z の表式から $a - bw = \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt}$ を得るので、 h の定義と併せて用いると、先の 2 式から

$$(I_1 + ml^2)w_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - I_3 \Omega_3 \frac{d\varphi}{dt} + mgl = 0$$

が得られる。ここで、重根を w_0 とした。こうして、歳差運動の角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$ は

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{I_3 \Omega_3}{2(I_1 + ml^2)w_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(I_1 + ml^2)w_0 mgl}{I_3^2 \Omega_3^2}} \right)$$

と得られる。

今、ルートの中の $\frac{(I_1 + ml^2)w_0 mgl}{I_3^2 \Omega_3^2}$ が十分小さいとしよう。このときには歳差運動の角速度は

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx \begin{cases} \frac{I_3 \Omega_3}{(I_1 + ml^2)w_0} & \text{複号 + : 速い歳差運動} \\ \frac{mgl}{I_3 \Omega_3} & \text{複号 - : 遅い歳差運動} \end{cases}$$

と得られる。一般に速い歳差運動は摩擦などで減衰してしまい、遅い歳差運動のみが見られる。コマ自身が対称軸の周りを回転する角速度 Ω_3 が小さいときには、歳差運動の角速度 $\frac{d\varphi}{dt}$ は大きくなる。コマを回して最後に倒れそうになる直前にはこのような運動が見られる。また、前に第0近似として地球を自由回転する対称コマとして取り扱ったが、実際には太陽や他の惑星から力のモーメントを受ける。このとき、遅い歳差運動が残り、これは地軸を26000年で一周させる歳差運動を引き起こすと考えられる。

§§11.5.3 逆立ちコマ

逆立ちコマを考えてみよう。問題を簡単化するため、厚みの無視できる硬貨の中心からずれたところにおもりを付けて、重心の位置が少しずれていると考えよう。硬貨の中心と慣性中心は図38の様な関係にあるとする。この硬貨を対称軸周りに回転させると、初めは慣性中心が硬貨の中心より下にあったものが、硬貨が中心の周りに回転し、最後には慣性中心が中心の上に来て安定して回転するようになる。重心が中心より下から上に上がって来るといふことで、“逆立ちコマ”と呼ばれる。慣性中心と形の中心がさほど離れていないとして、図40(b)にある慣性中心から硬貨の接地点への位置ベクトル \mathbf{r} の大きさ r は、円盤の半径 l と近似的に等しいとしておこう： $r \approx l$ 。実際に回転させてみるとわかるが、硬貨を反時計回りに回転させると、上から見て硬貨の接地点は反時計回りに回転していく(図39)。そこで、床と硬貨の接地点には図39のように摩擦力が働く。これを \mathbf{f} としよう。硬貨の質量を M とし、床との動摩擦係数を μ とすれば摩擦力 \mathbf{f} の大きさ f は

$$f = \mu Mg$$

となる。この摩擦力により慣性中心の周りに力のモーメント \mathbf{K} が生じる。図40(b)のように、 \mathbf{r} と \mathbf{f} は直交しているので、力のモーメントの大きさ K は

$$K = |\mathbf{r} \times \mathbf{f}| = rf \sin(\pi/2) \approx lf$$

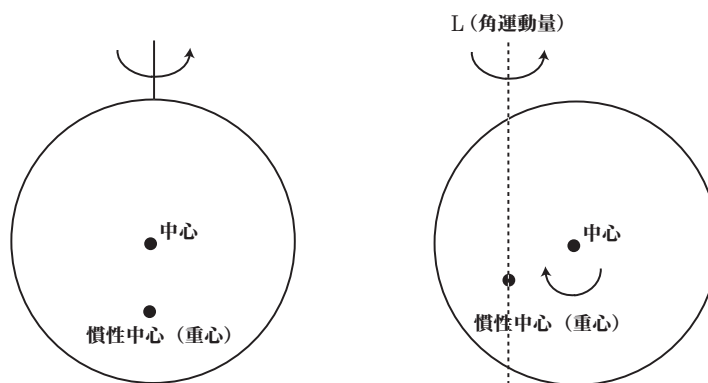


図 38:

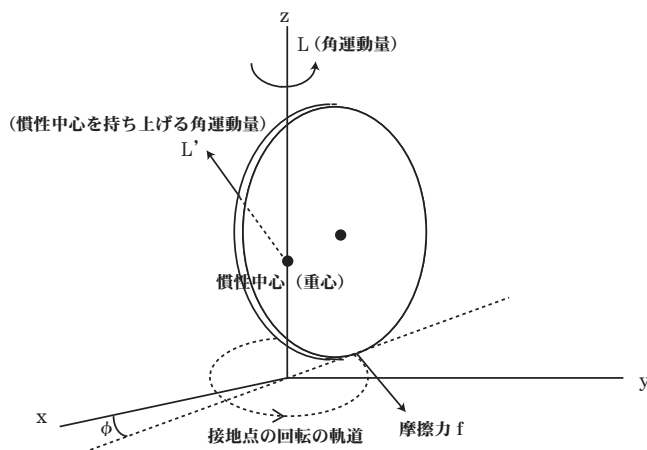
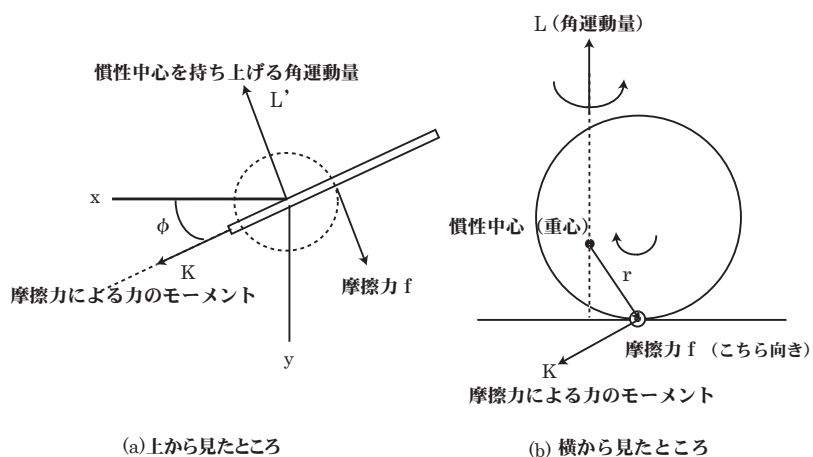


図 39:



(a) 上から見たところ

(b) 横から見たところ

図 40:

となる。ここで、 $r \approx l$ を用いた。慣性中心を持ち上げるように硬貨を回転させる角運動量 L' は、 x 及び y 成分を持ち、図 40(a) から

$$L'_x = L' \sin \varphi, \quad L'_y = -L' \cos \varphi$$

となる。ここで L' は L' の大きさである。力のモーメント K は図 40(b) のように、水平面より下を向き、 z 成分は負である。これにより、硬貨自身が回転している角運動量 L は

$$\frac{dL}{dt} = K_z (< 0)$$

より減衰していく。これが硬貨の回転を遅くする原因になる。ここでは、近似的に、力のモーメントはほぼ水平面を向いているとして、図 40(a) より

$$K_x \approx K \cos \varphi, \quad K_y \approx K \sin \varphi$$

としよう。こうして、運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dL'_x}{dt} = K_x, & \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(L' \sin \varphi) = K \cos \varphi \approx lf \cos \varphi \\ \frac{dL'_y}{dt} = K_y, & \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(-L' \sin \varphi) = K \sin \varphi \approx lf \sin \varphi\end{aligned}$$

となる。ここで、 K の大きさは変化しないので、角運動量 L' の大きさも変化しない。よって、時間変化は φ のみであり、上記運動方程式はともに

$$L' \frac{d\varphi}{dt} \approx lf = l\mu Mg \quad (11.9)$$

となる。ここで、摩擦力の表式を用いた。また、

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv \omega$$

は、硬貨が z 軸の周りを回転する角速度であり、 ω と記そう。慣性中心を回転して持ち上げる角速度を Ω とすると

$$L' = I\Omega$$

であり、慣性中心のずれを無視すれば、半径 l で質量 M の一様な円盤の慣性モーメント I は

$$I = \frac{1}{2}Ml^2$$

であるので、(11.9) から

$$\Omega = \frac{2\mu g}{l\omega}$$

が得られる。このように、近似的な扱いではあったが、角速度 Ω で慣性中心は持ち上がり、コマは倒立することがわかる。

倒立するには角度 π 回転すればよいので、倒立するまでの時間を T とすれば

$$\Omega T = \pi$$

から、倒立するまでの時間 T が求められる。

12章 非慣性基準系における運動

慣性系である K_0 系から、非慣性系である K' 系への変換を考える。ここで、 K' 系は K_0 系に対して、時間に依存した速度 $\mathbf{V}(t)$ で運動しているものとする。 K_0 系での質点の速度 \mathbf{v}_0 と K' 系での速度 \mathbf{v}' の間には

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 - \mathbf{V}(t)$$

の関係がある。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \mathbf{W}(t), \\ \mathbf{W}(t) &\equiv \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} \end{aligned}$$

となる。慣性系である K_0 系での運動方程式は $m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{f}$ であるので、これを用いて非慣性系 K' 系での運動方程式は、

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{f} - m\mathbf{W}(t)$$

と得られる。ここに $-m\mathbf{W}(t)$ は、非慣性系で運動を記述することによる見かけの力であり、 K' 系の加速度の向きと逆向きに働くように見える。

さて、次に、 K' 系からさらに K' 系に対して角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ で回転している非慣性系 K 系を考察しよう。任意のベクトル \mathbf{G} は変位 $d\mathbf{G}$ をうけるが、時間変化を考えると

$$\left(\frac{d\mathbf{G}'}{dt} \right)_{K'} = \left(\frac{d\mathbf{G}}{dt} \right)_K + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}$$

の変化をする。よって、形式的に並進系 K' と回転系 K との間には

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{K'} = \left(\frac{d}{dt} \right)_K + \boldsymbol{\Omega} \times$$

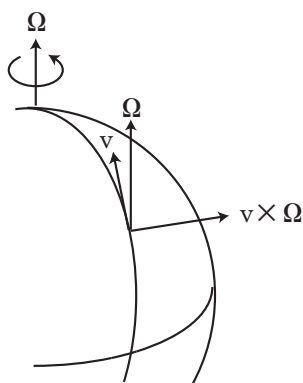


図 41:

という演算の関係があると考えればよい。よって、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{K'} &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_K + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \\ \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}\right)_{K'} &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_{K'}\right)_{K'} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}\right) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}\right) \\ &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\left(\boldsymbol{\Omega}(t) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

となる。こうして、 $m\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{K'} = \mathbf{f} - m\mathbf{W}(t)$ を用いて、

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{f} - m\mathbf{W}(t) + 2m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \boldsymbol{\Omega}(t)\right) + m\boldsymbol{\Omega}(t) \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}(t)) + m\left(\mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}(t)}{dt}\right) \quad (12.10)$$

を得る。右辺第1項は本当の力、第2項は慣性力としての見かけの力、第3項はコリオリ力として知られている。第4項は遠心力と呼ばれる見かけの力であり、最後の第5項は非一様回転から生じる見かけの力である。

さて、コリオリ力 $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})$ に関して見ておこう。地球は自転しているので、地表面に静止している観測者にとっては回転座標系である。北半球で子午線（経線）に沿って北上する物体はコリオリ力により、東の方向にそれていくことがわかる（図41）。

次に遠心力であるが、力の方向は回転軸から外を向く方向であり、大きさは $|m\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega})| = m\Omega^2 r \sin\theta$ となる。ここで、 θ は \mathbf{r} と $\boldsymbol{\Omega}$ のなす角である。