

1章 リー代数と量子論

§ 1.1 角運動量代数とスピン

§§1.1.1 角運動量代数

通常量子力学では、古典力学の軌道角運動量から出発し、角運動量演算子を微分演算子で表す。そして微分演算子の固有関数として角運動量固有関数を構成し、あわせて固有値を得る。しかしながら、角運動量は回転の生成子であり、あとで見るように、回転の生成子 \mathbf{J} はリー代数を構成する。したがって、ここではリー代数の交換関係からのみ出発しよう。微分演算子で表された軌道角運動量にとられないために、空間回転の生成子としての角運動量演算子を $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ と記そう。すなわち

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hat{J}_y,$$

$$\text{または } [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, \quad \text{ただし } \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (123) \text{ およびその偶置換} \\ -1 & (ijk) = (321) \text{ およびその偶置換} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $(ijk) = (123) = (xyz)$ としている。

角運動量の大きさの2乗 $\hat{\mathbf{J}}^2$ は

$$\hat{\mathbf{J}}^2 \equiv \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$$

であるが、この演算子は $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ のいずれとも交換する。そこで、 \hat{J}_z を取り上げると、 $\hat{\mathbf{J}}^2$ と \hat{J}_z は可換であるので同時固有状態が存在する。これをブラケット表示を用いて、 $|j, m\rangle$ と書くことにする。ここで、 m は角運動量の z 成分の固有値である (図 1)。すなわち

$$\hat{J}_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle$$

が成り立っている。また、角運動量の z 射影には最大値が存在するので、この最大となる m の値を j と記した。

次に昇降演算子 \hat{J}_\pm を定義する。

$$\hat{J}_\pm \equiv \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y, \quad \hat{J}_0 \equiv \hat{J}_z$$

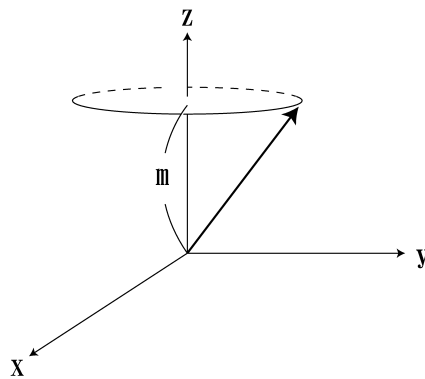


図 1:

とすると、次の交換関係を満足する：

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_0, \quad [\hat{J}_0, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$$

昇降演算子を状態 $|j, m\rangle$ に作用させたものはまた、 $\hat{J}_z (= \hat{J}_0)$ の固有状態となる。実際、

$$\hat{J}_0 \hat{J}_\pm |j, m\rangle = ([\hat{J}_0, \hat{J}_\pm] + \hat{J}_\pm \hat{J}_0) |j, m\rangle = (m \pm 1) \hat{J}_\pm |j, m\rangle$$

となる。したがって、状態 $\hat{J}_\pm |j, m\rangle$ は、角運動量の z 成分の固有値が $m \pm 1$ の固有状態であることがわかる。こうして、

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle \propto |j, m \pm 1\rangle$$

となっているので、 $\hat{J}_- |j, m\rangle = N_m |j, m-1\rangle$ としよう。ただし、 j は角運動量の z 射影の最大値であったので

$$\hat{J}_+ |j, j\rangle = 0$$

であることに注意しよう。さて、規格化 N_m を求める。今、 $\hat{J}_- |j, m\rangle = N_m |j, m-1\rangle$ であるので、 $\langle j, m | \hat{J}_+ = \langle j, m-1 | N_m$ ということでもある。内積をとると、

$$\begin{aligned} N_m^2 &= \langle j, m-1 | N_m N_m |j, m-1\rangle = \langle j, m | \hat{J}_+ \hat{J}_- |j, m\rangle = \langle j, m | ([\hat{J}_+, \hat{J}_-] + \hat{J}_- \hat{J}_+) |j, m\rangle \\ &= \langle j, m | (2\hat{J}_0 + \hat{J}_- \hat{J}_+) |j, m\rangle = 2m + \langle j, m | \hat{J}_- \hat{J}_+ |j, m\rangle \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $m = j$ で $\hat{J}_+ |j, j\rangle = 0$ を用いると

$$N_j^2 = 2j, \quad \text{すなわち} \quad N_j = \sqrt{2j}$$

と得られる。一方、 $\hat{J}_+ |j, j-1\rangle = c |j, j\rangle$ として

$$\hat{J}_+ |j, j-1\rangle = \hat{J}_+ \left(\frac{1}{N_j} \hat{J}_- |j, j\rangle \right) = \frac{1}{N_j} ([\hat{J}_+, \hat{J}_-] + \hat{J}_- \hat{J}_+) |j, j\rangle = \frac{2j}{N_j} |j, j\rangle$$

となるので、これにより、 $c = N_j$ 、すなわち、

$$\hat{J}_- |j, j\rangle = N_j |j, j-1\rangle$$

$$\hat{J}_+ |j, j-1\rangle = N_j |j, j\rangle$$

であることがわかる。同様にして、

$$\hat{J}_- |j, j-k\rangle = N_{j-k} |j, j-k-1\rangle$$

$$\hat{J}_+ |j, j-k-1\rangle = N_{j-k} |j, j-k\rangle$$

となる。すなわち、

$$\begin{aligned} N_{j-k}^2 &= \langle j, j-k | \hat{J}_+ \hat{J}_- |j, j-k\rangle = \langle j, j-k | ([\hat{J}_+, \hat{J}_-] + \hat{J}_- \hat{J}_+) |j, j-k\rangle \\ &= \langle j, j-k | 2\hat{J}_0 |j, j-k\rangle + \langle j, j-k | \hat{J}_- \hat{J}_+ |j, j-k\rangle \\ &= 2(j-k) + N_{j-k+1}^2 \end{aligned}$$

という漸化式が導かれる。これを解くと

$$N_{j-k}^2 = \sum_{l=0}^k 2(j-l) = 2j(k+1) - k(k+1) = (k+1)(2j-k) \quad (1.2)$$

$$\text{すなわち} \quad N_m = \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \quad (j-k = m \text{ とした}) \quad (1.3)$$

と、規格化因子 N_m が決定できる。さて、(1.2) 式を見ると左辺は零以上の数であるので、右辺から $2j - k \geq 0$ でなければならないことがわかる。ここで、 j は角運動量の z 射影の最大値、 k は状態 $|j, j\rangle$ から \hat{J}_- で角運動量の z 射影の固有値を 1 ずつ下げていく回数であった。すなわち、 k は零を含む自然数である。角運動量の z 射影が最大値を持つ状態 $|j, j\rangle$ から \hat{J}_- で z 射影を下げていくと、最小値 $-j$ を超えると状態は存在しないはずであるので、どこかで $N_{j-k}^2 = 0$ とならないといけない。そうでなければ、漸化式から $N_{j-k}^2 < 0$ が得られてしまい、角運動量の z 射影に最小値があるということと矛盾である。こうして、ある 0 を含む自然数 k が存在し、

$$2j - k = 0$$

となるべきであることが (1.2)。すなわち、

$$2j = k = (0 \text{ を含む自然数}),$$

$$j = \text{整数 } (0, 1, 2, \dots) \quad \text{または半整数 } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$$

という重要な結論が得られた。角運動量の z 成分の最大値は \hbar を単位にして整数倍または半整数倍に限られる。軌道角運動量の場合には整数倍のみであり半整数は現れなかったことを思い出そう。

続いて、角運動量の大きさの 2 乗を考える。今、

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_0^2 + \frac{1}{2}(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+)$$

と書けるので、容易に

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 |j, m\rangle &= \left(m^2 + \frac{1}{2}(N_m^2 + N_{m+1}^2) \right) |j, m\rangle \\ &= \left(m^2 + \frac{1}{2}[(j-m+1)(j+m) + (j-m)(j+m+1)] \right) |j, m\rangle \\ &= j(j+1) |j, m\rangle \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、角運動量の大きさの 2 乗の固有値は \hbar を戻すと $\hbar^2 j(j+1)$ であることが言える。

以上、角運動量代数から得られた事実をまとめておこう。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle \\ \hat{J}_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle \\ j; m \text{ の最大値、整数または半整数} \\ \hat{J}_+ |j, m\rangle &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle \\ \hat{J}_- |j, m\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle \end{aligned} \tag{1.4}$$

また、角運動量 j の状態、すなわち角運動量の大きさが $\sqrt{j(j+1)}$ である状態は $|j, j\rangle, |j, j-1\rangle, \dots, |j, -j+1\rangle, |j, -j\rangle$ の $2j+1$ 個存在することがわかる。

§ 1.2 リー群とリー代数

本小節では、リー群とリー代数の簡単な記述を与えておこう。

(i) 群

群 G とは、 G の要素 $\{x\}$ に“掛け算「 \cdot 」”が定義されていて、次の関係を満たすものである。

- (1) $x, y \in G, \rightarrow x \cdot y \in G$
- (2) $\exists 1 \in G, \rightarrow 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \text{for } \forall x \in G$
- (3) $\exists x^{-1} \in G, \rightarrow x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$
- (4) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

たとえば、整数 \mathbf{Z} は、“掛け算” \cdot を、足し算 $+$ とし、“単位元 1”を 0、逆元 x^{-1} を $-x$ とすれば上の (1) から (4) までを満たすので、足し算に関して群をなすことがわかる。

(ii) 群の表現

群の要素 g を、ある線形写像 ρ を用いて、具体的に表わす。これを $\rho(g)$ と書く。群の要素を表現した $\rho(g)$ はある線形空間 V に作用する。線形空間（ベクトル空間） V に属するベクトルを $|\psi\rangle$ と書こう。先の空間回転の例では、空間回転は群をなしており、群の要素を回転行列で表現した ($\rho(g) = R$)。回転行列が作用する線形空間は 3 次元空間であり、ベクトルは \vec{x} などと書いた ($|\psi\rangle = \vec{x}$)。群は掛け算が定義されていたので、群を表現した $\rho(g)$ においても同様に $\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1g_2)$ となっていなければならない。このセット (ρ, V) を群 G の表現という。ここで、 V を表現空間と呼ぶ。

さて、線形空間 V の適当な正規直交基底 $\{|i\rangle\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) をとる。また、 V に双対な双対空間を考え、その正規直交基底を $\langle i|$ ($i = 1, 2, \dots, N$) と書く。空間回転では、 $|i\rangle = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$)、 $\langle i| = \mathbf{e}^\dagger$ である。ここで、 \dagger は転置をとって各要素の複素共役をとる操作（エルミート共役）を意味する。任意のベクトル $|\psi\rangle$ はこの基底で展開できるので、展開係数を c_j と書いて

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N c_j |j\rangle$$

となる。基底 $|i\rangle$ は正規直交基底にとったので、 $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ であるので、

$$c_j = \langle j|\psi\rangle$$

となる。この展開係数を再び用いると

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^N c_j |j\rangle = \sum_{j=1}^N \langle j|\psi\rangle |j\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|\psi\rangle$$

となる。こうして、重要な**完全性**の表式を得る。

$$\sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j| = 1$$

群の表現 $\rho(g)$ の行列表示を与えよう。線形空間 V とその双対空間の基底を用いて

$$[\rho(g)]_{ij} = \langle i|\rho(g)|j\rangle$$

とできる。線形空間への作用は、基底の完全性の条件を挿入し、

$$\rho(g)|i\rangle = \sum_{j=1}^N |j\rangle \langle j|\rho(g)|i\rangle = |j\rangle [\rho(g)]_{ji}$$

と表わすことができる。

(iii) リー群とリー代数

(a) リー群

群 G の内、群 G の要素 g があるパラメータの連続関数となるものを考える。すなわち

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_a \quad (a = 1, 2, \dots, n) \in \mathbf{R} \text{ (実数)}$$

さらに“掛け算”は滑らかであるとする。

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot g(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = g(\gamma_1(\alpha, \beta), \gamma_2(\alpha, \beta), \dots, \gamma_n(\alpha, \beta)),$$

$\gamma_a(\alpha, \beta)$ は、 α, β の実解析関数

このとき、群 G はリー群と呼ばれる。また、 n を群 G の次元と呼ぶ。2次元回転群は、引き続き2回の回転 θ, φ に対して $g(\theta)g(\varphi) = g(\theta + \varphi)$ となるので、リー群である。

(b) リー代数

リー群 G の要素 g を、単位元“1”の近傍で考える。ここで、単位元は $g(0, 0, \dots, 0) = 1$ (何も変換しない) である。このとき、

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1 + i \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k + O(\alpha^2),$$

$$iX_k \equiv \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=0}$$

とできる。パラメータ α_i が有限の大きさを持つとすれば、 $g = \exp\left(i \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k\right)$ となるが、 $e^{iX} \in G$ となる元 $\{X\}$ の全体を、リー群 G に対応するリー代数 \mathcal{G} と呼ぶ。また、上で導入された $\{X_k\}$ をリー代数の生成子と呼ぶ。

さて、 X, Y がリー代数 \mathcal{G} の要素であるときには、 $X+Y$ も $XY-YX$ も同じリー代数 \mathcal{G} の要素となる。証明は以下の様に簡単である。まず、 $1+i\epsilon X \in G, 1+i\epsilon Y \in G$ であるので、両者の積もリー群 G の要素である。すなわち、 $(1+i\epsilon X)(1+i\epsilon Y) \in G$ 。左辺を計算して ϵ の1次までとると、 $(1+i\epsilon X)(1+i\epsilon Y) \approx 1+i\epsilon(X+Y) \in G$ となるので、 $X+Y$ はリー代数 \mathcal{G} の要素である。次に、 $e^{i\epsilon X} e^{i\epsilon Y} e^{-i\epsilon X} e^{-i\epsilon Y}$ を考えよう。各 e^{\dots} はリー群 G の要素であるので、これらの4つの積もリー群 G の要素である。こうして ϵ で展開し、 X や Y は行列のように互いに交換しないことに注意して、1を除く ϵ の最低次まで計算すると $e^{i\epsilon X} e^{i\epsilon Y} e^{-i\epsilon X} e^{-i\epsilon Y} = 1 - \epsilon^2(XY - YX) + O(\epsilon^3)$ となる。こうして、 $XY - YX$ はリー代数 \mathcal{G} の要素であることが示される。

(c) 構造定数

リー代数 \mathcal{G} は生成子 $\{X_a\}$ 、($a = 1, 2, \dots, n$) により決定される。(b) で示したように、リー代数の要素 X_a と X_b の交換子 $[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a$ もまたリー代数の要素であるので、 $\{X_a\}$ の組み合わせで表わされるはずである。そこで、生成子の線形結合として、

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = i \sum_{c=1}^n f_{abc} X_c$$

と書けるだろう。ここで現れる定数 f_{abc} を**構造定数**と呼び、構造定数が与えられればリー代数は決定されることになる。

さて、上の交換子の式から構造定数は最初の2つの添え字に対して反対称であることは自明である。

$$f_{abc} = -f_{bac}$$

次に、3番目の添え字 c に関する対称性を決定したい。そのために、生成子を直交化しておく。

$$\text{tr}(X_a X_b) = c_a \delta_{ab}, \quad c_a = 1 \text{ または } -1 \text{ または } 0$$

ここで、 δ_{ab} はクロネッカーのデルタである。今後、 $c_a = 1$ となる代数を考えることにする*。このとき

$$\text{tr}(X_c [X_a, X_b]) = \text{tr}(X_c \sum_{d=1}^n i f_{abd} X_d) = i \sum_{d=1}^n f_{abd} \text{tr}(X_c X_d) = i f_{abc} = -i f_{bac}$$

となるが、左辺はまた

$$\text{tr}(X_c [X_a, X_b]) = \text{tr}(X_c X_a X_b - X_c X_b X_a) = \text{tr}([X_b, X_c] X_a) = i f_{bca}$$

となり、結局

$$f_{bac} = -f_{bca}$$

となる。つまり、後ろの2つの添え字 (a と c) の入れ替えに関しても反対称であることが言える。こうして、構造定数 f_{abc} は添え字の入れ替えに対して完全反対称であることが示される。

(d) 随伴表現

交換子に関しては、恒等的に次のヤコビ恒等式が成り立つ†。

$$[X_a, [X_b, X_c]] + [X_b, [X_c, X_a]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0$$

実際、交換子を引き算の形で書いて行けば容易に示される。ここで、 X_a がリー代数 \mathcal{G} の生成子であるとき、 $[X_b, X_c] = i \sum_d f_{bcd} X_d$ を用いると、ヤコビ恒等式は

$$-\sum_d \sum_e (f_{bcd} f_{ade} + f_{cad} f_{bde} + f_{abd} f_{cde}) X_e = 0$$

となる。ここで、生成子 X_e は独立であるので、

$$\sum_d (f_{bcd} f_{ade} + f_{cad} f_{bde} + f_{abd} f_{cde}) = 0$$

が得られる。今、 $(T_a)_{bc} \equiv -i f_{abc}$ として行列 T_a を定義する。行列 T_a の (bc) 成分が、リー代数の構造定数 f_{abc} を用いて、 $-i f_{abc}$ であるということである。このとき、ヤコビ恒等式から導かれた構造定数の積に関する式は

$$(T_b T_a)_{ce} - (T_a T_b)_{ce} + \sum_d i f_{abd} (T_d)_{ce} = 0$$

と変形できる。よって、行列の関係として

$$[T_a, T_b] = i \sum_d f_{abd} T_d$$

*リー代数 \mathcal{G} のもとになる群 G がコンパクト (compact)、すなわちパラメータの変域が有限、かつ半単純 (semi-simple)、すなわち、アーベリアン不変部分群を持たない場合。

†ポアソン括弧 (§4.2) との類似性に注意せよ。

と書ける。これはもとのリー代数の生成子が満たす関係と同じである。すなわち、行列 T_a はリー代数の生成子 X_a の表現行列になっていることがわかる。次に、この表現行列に対応する表現空間を調べよう。一般に表現空間のベクトル $\{|i\rangle\}$ に働く作用 \mathcal{O} に対して

$$\rho(g)(\mathcal{O}|i\rangle) = \rho(g)\mathcal{O}\rho(g)^{-1}\rho(g)|i\rangle \equiv \mathcal{O}'|i\rangle'$$

と書ける。表現空間の基底を $\{\rho(g)|i\rangle\}$ と変換したと考えると、作用素 \mathcal{O} は

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}' = \rho(g)\mathcal{O}\rho(g)^{-1} = \rho(g)\mathcal{O}\rho(g^{-1})$$

と変換される。無限小変換 $g = 1 + i\sum_a \alpha_a X_a$ を考えると、 $g^{-1} = 1 - i\sum_a \alpha_a X_a$ であり、よって、

$$\rho(g)\mathcal{O}\rho(g^{-1}) \approx \mathcal{O} + i\sum_a \alpha_a [\rho(X_a), \mathcal{O}] + \dots$$

となる。今、 \mathcal{O} として、 $X \in \mathcal{G}$ 全体を考えよう。ここで、 $\text{Ad}(g)$ として

$$\text{Ad}(g)X \equiv gXg^{-1}$$

のように、 X に対する作用を定義すると、

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g_1)\text{Ad}(g_2)X &= \text{Ad}(g_1)g_2Xg_2^{-1} = g_1(g_2Xg_2^{-1})g_1^{-1} = (g_1g_2)X(g_1g_2)^{-1} \\ &= \text{Ad}(g_1g_2)X \end{aligned}$$

となるので、

$$\text{Ad}(g_1)\text{Ad}(g_2) = \text{Ad}(g_1g_2)$$

が得られ、 $\text{Ad}(g)$ は表現になっている。リー群の要素は指数関数の形に書けていたので、簡便に $g = e^Y$ と記しておこう。こうすると、 $\text{Ad}(g) = e^{\text{Ad}(Y)}$ となり、

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1} = e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \dots$$

となるが、左辺を直接展開すると

$$\text{Ad}(g)X = e^{\text{Ad}(Y)}X = (1 + \text{Ad}(Y) + \dots)X$$

となる。両者を比較すると、

$$\text{Ad}(Y)X = [Y, X]$$

と得られる。こうして、 X, Y ともにリー代数 \mathcal{G} の基底 $\{X_a\}$ をとると、

$$\text{Ad}(X_a)X_b = [X_a, X_b] = i\sum_c f_{abc}X_c = \sum_c (-if_{acb})X_c = \sum_c (T_a)_{cb}X_c$$

となる。これを、リー代数の表現行列と表現空間の基底の満たす関係式 $\rho(X_a)|i\rangle = \sum_j \rho(X_a)_{ji}|j\rangle$ と見比べると、

$$\begin{aligned} (T_a)_{cb} (= -if_{acb}) &\text{ は } \text{Ad}(X_a) \text{ の表現行列 } (\rho(X_a)) \\ \{X_a\} &\text{ は 表現空間の基底 } (|j\rangle) \end{aligned}$$

となっていることがわかる。リー代数のこの表現を**随伴表現**と呼ぶ。

§§1.2.1 例：無限小回転と回転の生成子

3次元回転 R は群をなしている。これはリー群である。この群を \mathbf{R} と書くことにしよう。 \mathbf{R} はベクトル空間上の線形作用素となる。1-軸、2-軸、3-軸周りの θ_1 、 θ_2 、 θ_3 回転行列を記しておこう。

$$\begin{aligned} \vec{y} &= R_1(\theta_1)\vec{x}, & \vec{z} &= R_2(\theta_2)\vec{y}, & \vec{\xi} &= R_3(\theta_3)\vec{z}, \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\ \vec{\xi} &= R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)\vec{x} = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)\vec{x} \end{aligned} \quad (1.5)$$

このとき、

$$\mathbf{R}e_i = e'_i = \sum_j l_{ij} e_j$$

ここで、 $R^t = (l_{ij}^t)$ は回転群 \mathbf{R} の表現行列になっており、この表現での表現空間の基底は $\{e_i\}$ となっている。

これからは無限小回転を考えていこう。回転角は $\Delta\theta_i \ll 1$ 、すなわち、 $\cos \Delta\theta_i \approx 1$ かつ $\sin \Delta\theta_i \approx \Delta\theta_i$ である。このとき、(1.5) より

$$R(\Delta\theta) = R_3(\Delta\theta_3)R_2(\Delta\theta_2)R_1(\Delta\theta_1) \equiv 1 + i \sum_{j=1}^3 \Delta\theta_j J_j$$

となる。但し、無限小回転であることから読み取れるように

$$J_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義される。リー代数の議論から、 J_i は3次元回転の生成子となる。今は無限小変換を考えているが、 $R_i(\Delta\theta) \approx 1 + i\Delta\theta_i J_i \approx e^{i\Delta\theta_i J_i}$ となり、無限小変換を繰り返していくと、 $R_i(\theta_i) = e^{i\theta_i J_i}$ と書ける[‡]。

さて、3次元回転の生成子 J_i は以下の関係を持つ。

$$J_i^\dagger = J_i, \quad \text{tr} J_i = 0, \quad \text{tr}(J_i J_j) = 2\delta_{ij}$$

[‡]有限の角 θ_i に対し、 $\Delta\theta_i \equiv \frac{\theta_i}{n}$ として微小な $\Delta\theta_i$ を導入する。このとき、

$$\begin{aligned} R_i(\theta_i) &= R_i(\Delta\theta_i)R_i(\Delta\theta_i)\cdots R_i(\Delta\theta_i) = \prod_n (1 + i\Delta\theta_i J_i) = \lim_{\Delta\theta_i \rightarrow 0} (1 + i\Delta\theta_i J_i)^n \\ &= \lim_{\Delta\theta_i/\theta_i \rightarrow 0} \left(1 + i\frac{\Delta\theta_i}{\theta_i} \theta_i J_i\right)^{\frac{\theta_i}{\Delta\theta_i}} = e^{i\theta_i J_i} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ を用いた。

さらに、交換子を計算すると

$$[J_i, J_j] \equiv J_i J_j - J_j J_i = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k,$$

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ 及びその偶置換} \\ -1 & (i, j, k) = (1, 2, 3) \text{ からの奇置換} \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}$$

が容易に得られる。ここで、 ϵ_{ijk} は完全反対称テンソルであり、これが 3 次元回転の構造定数となる。すなわち、3 次元回転群に対応するリー代数は $so(3)$ であり、 J_i はその一つの表現行列になっている。

無限小回転を具体的に書き下すと

$$R(\Delta\theta) = 1 + i \sum_{j=1}^3 \Delta\theta_j J_j = 1 + \begin{pmatrix} 0 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 0 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。ここで 1 は 3×3 の単位行列である。こうして、ベクトル \vec{x} の成分 x_i は回転により $x_i + dx_i$ と微小変換されるとすると、

$$(R(d\theta)\vec{x})_i = x_i + \begin{pmatrix} 0 & d\theta_3 & -d\theta_2 \\ -d\theta_3 & 0 & d\theta_1 \\ d\theta_2 & -d\theta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_i \equiv x_i + dx_i$$

であり、こうして、

$$dx_1 = x_2 d\theta_3 - x_3 d\theta_2, \quad dx_2 = x_3 d\theta_1 - x_1 d\theta_3, \quad dx_3 = x_1 d\theta_2 - x_2 d\theta_1$$

が得られる。今、

$$d\varphi \equiv \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \end{pmatrix}$$

と定義すると、 dx_i はベクトル表示で

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x} \times d\varphi$$

と表わされる。

§§1.2.2 回転の 2 価表現

次の 3 つの 2×2 行列を導入する。

$$S_1 \equiv \frac{\sigma_1}{2} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 \equiv \frac{\sigma_2}{2} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 \equiv \frac{\sigma_3}{2} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで、 σ_i をパウリ行列と呼ぶ。パウリ行列は行列群 $SU(2)$ に対応するリー代数 $su(2)$ を構成する。行列要素は複素数なので、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 成分持つが、行列 U がユニタリーであることから $U^\dagger U = 1$ より 4 つの条件式が存在する。また、“特殊”ユニタリー行列であるので、行列式が 1、すなわち $\det U = 1$ より 1 つ条件が加わ

り、独立な成分は $8 - 4 - 1 = 3$ である。すなわち、3つの独立なパラメータを持つ。パウリ行列から作られた3つの行列 S_i の交換子を計算すると

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} S_k$$

となることが示される。こうして、リー代数 $su(2)$ は3次元回転のリー代数 $so(3)$ に準同型である。

今、ベクトルの成分を (x_1, x_2, x_3) として、

$$P \equiv 2 \sum_{i=1}^3 x_i S_i = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

を導入する。このとき、行列 P の行列式は、

$$\det P = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

となり、ベクトルの長さの2乗に負号を付けたものが得られる。したがって、行列 P の行列式を不変にする変換はベクトルの長さを変えない等長変換を与え、3次元回転を表わすことが可能であることが期待される。そこで、ある $su(2)$ の元 Q を用いて

$$P' = QPQ^\dagger$$

という変換を考えよう。行列 Q は $su(2)$ に属するので、 $Q^\dagger = Q^{-1}$ であり、

$$\det P' = \det(QPQ^\dagger) = \det P$$

となり、等長変換を与える。次の3つの場合を考えよう。

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

まず、 Q_1 を用いて

$$\begin{aligned} P' &= \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix} \\ &= Q_1 P Q_1^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta & x_1 - i(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \\ x_1 + i(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) & -x_3 \cos \theta + x_2 \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。実部、虚部に注意して両辺を比較することで、

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1, \\ x'_2 &= x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta, \\ x'_3 &= -x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{aligned}$$

となることがわかる。こうして、 Q_1 による等長変換は、1軸周りの角度 θ 回転を表わすことが理解される。

同様に、 Q_2 を用いて

$$\begin{aligned}
 P' &= \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix} \\
 &= Q_2 P Q_2^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_3 \cos \theta + x_1 \sin \theta & (x_1 \cos \theta - x_3 \sin \theta) - ix_2 \\ (x_1 \cos \theta - x_3 \sin \theta) + ix_2 & -x_3 \cos \theta - x_1 \sin \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

が得られるので、実部、虚部に注意して両辺を比較することで、

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 \cos \theta - x_3 \sin \theta, \\
 x'_2 &= x_2, \\
 x'_3 &= x_1 \sin \theta + x_3 \cos \theta
 \end{aligned}$$

となることがわかる。こうして、 Q_2 による等長変換は、2 軸周りの角度 θ 回転を表わす。

さらに、 Q_3 を用いると、

$$\begin{aligned}
 P' &= \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & -x'_3 \end{pmatrix} \\
 &= Q_3 P Q_3^\dagger = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x_3 & (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) - i(-x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) \\ (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) + i(-x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta) & -x_3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いた。実部、虚部に注意して両辺を比較することで、

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\
 x'_2 &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta, \\
 x'_3 &= x_3
 \end{aligned}$$

となることがわかる。こうして、 Q_3 による等長変換は、3 軸周りの角度 θ 回転を表わすことが理解される。

以上より、3 次元回転は $su(2)$ 代数で表わされることがわかった。このとき、 $g(\theta_i) = e^{i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}}$ として、

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i, \\
 P' &= g P g^{-1} = \text{Ad}(g) P
 \end{aligned}$$

と書ける[§]。したがって、パウリ行列 σ_i が表現空間の基底になっており、基底 σ_i で張られた表現空間のベクトル P は $\text{Ad}(g)P$ の変換を受けている。すなわち、回転を随伴表現で表わしたことになる。この表現を特に、 $so(3)$ のスピノール表現と呼ぶ。

スピノール表現は 3 次元回転群の 2 価表現となっている。すなわち、3 次元回転群の要素 $T_i(\theta_i)$ は

$$T_i(\theta_i) = e^{i\theta_i \frac{\sigma_i}{2}} = \cos \frac{\theta_i}{2} + i \sin \frac{\theta_i}{2} \cdot \sigma_i$$

$$e^{i\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!}, \quad \cos \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \sigma_i^2 = 1$$

と書けるが、ここで、

$$T_i(\theta = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_i(\theta = 2\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_i(\theta = 4\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

となるので、変域を $0 \leq \theta \leq 2\pi$ から $0 \leq \theta \leq 4\pi$ として初めて元に戻る事がわかる。

§1.3 root (ルート) と weight (ウェイト)

§1.2においてリー代数の導入を行った。また、§1.1で角運動量代数を扱ったが、角運動量代数は $su(2)$ リー代数そのものである。ここでは、コンパクト群に対するリー代数に限って、やや一般的に記述しておこう。常に角運動量代数を思い出しながら見ていくことにする。

特定のリー代数を規定するのは、リー代数の生成子 $\{X_a\}_{a=1,2,\dots,n}$ の間の交換関係

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c$$

であった。ここで、繰り返す添え字 (ここでは c) については生成子の個数 n まで和を取るものとする。交換関係に現われる f_{abc} は**構造定数**とよばれ、リー代数を規定する。角運動量 ($su(2)$) 代数では $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ の完全反対称テンソルであった。

$su(N)$ と呼ばれるリー代数を考え、生成子を $\{X_a\}$ と書く[¶]。同時に対角化できる (対角行列で表示できる) 生成子をできるだけ沢山作り、それらを H_i と記す。

$$\vec{H} = (H_1, H_2, \dots, H_m)$$

$su(2)$ の時には $\vec{H} = (\hat{J}_3)$ の一つであり、 $\hat{J}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と対角形で書けていたことを思い出そう。 \vec{H} の固有ベクトルを $|\mu\rangle$ と書こう。このとき

$$H_i|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

または、まとめて

$$\vec{H}|\mu\rangle = \vec{\mu}|\mu\rangle \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

と書く。この $\vec{\mu}$ を **weight (ウェイト)** と呼ぶ^{||}。

さて、 $\{H_i\}$ は同時に対角化されているので互いに交換し、

$$[H_i, H_j] = 0$$

である。残りの生成子から

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha^i E_\alpha$$

となるような E_α を、対角的でない $\{X_a\}$ の線形結合で作る。両辺のエルミート共役をとると

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha^i E_\alpha^\dagger$$

[¶]角運動量の時には $su(2)$ 代数であり、 $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ の3つが生成子であった。

^{||} $su(2)$ のときには $\hat{J}_3|jm\rangle = m|jm\rangle$ であった。よって、weight は角運動量の z 成分 m であった。角運動量 j が与えられているとき、 m により状態が指定されたことを思い出そう。weight は状態を指定する。

が得られることは容易にわかる。よって、

$$E_{\alpha}^{\dagger} = E_{-\alpha}$$

となる**。

今、上の交換関係を $|\mu\rangle$ に作用させる。

$$[H_i, E_{\pm\alpha}]|\mu\rangle = \pm\alpha^i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle$$

左辺は

$$\begin{aligned} [H_i, E_{\pm\alpha}]|\mu\rangle &= H_i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle - E_{\pm\alpha} H_i|\mu\rangle \\ &= H_i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle - \mu_i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle \end{aligned}$$

となる。ここで、 $|\mu\rangle$ が H_i の固有ベクトルであることを用いた。こうして、

$$H_i E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = (\mu_i \pm \alpha^i) E_{\pm\alpha}|\mu\rangle$$

まとめて

$$\vec{H} E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = (\vec{\mu} \pm \vec{\alpha}) E_{\pm\alpha}|\mu\rangle$$

が得られる。すなわち、 $E_{\pm\alpha}$ は weight $\vec{\mu}$ を $\vec{\mu} \pm \vec{\alpha}$ に変えた状態を作る昇降演算子となっていることがわかる。この $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-m})$ を **root(ルート)** と呼ぶ。

このとき、状態 $|\mu\rangle$ からすべての状態を構成することができる。昇降演算子を繰り返し用いて

$$0 \leftarrow |\mu - q\alpha\rangle \leftarrow \dots \leftarrow |\mu - \alpha\rangle \leftarrow |\mu\rangle \rightarrow |\mu + \alpha\rangle \rightarrow \dots \rightarrow |\mu + p\alpha\rangle \rightarrow 0$$

ここで、 $|\mu\rangle$ から左へは $E_{-\alpha}$ を繰り返し作用させ、右へは E_{α} を繰り返し作用させる。今、コンパクト群を考えているので、規約表現を作る状態は有限であり、左へ q 回、右へ p 回それぞれ $E_{-\alpha}$ 、 E_{α} を作用させると終わるものとした。こうして、一つの閉じた状態のセットが得られる。こうした表現を**既約表現**と呼ぼう。

さて、 $E_{\pm\alpha}|\mu\rangle$ は $|\mu \pm \alpha\rangle$ に比例することはわかったので、規格化因子 $N_{\pm\alpha, \mu}$ を求めておこう。すなわち $E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = N_{\pm\alpha, \mu}|\mu \pm \alpha\rangle$ とする。ここで、次の交換関係が成り立つことに注意する††。

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = \begin{cases} \vec{\alpha} \cdot \vec{H} & (\vec{\alpha} + \vec{\beta} = 0) \\ k_{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta} & (\vec{\alpha} + \vec{\beta} \text{ がまた root になる}) \\ 0 & (\vec{\alpha} + \vec{\beta} \text{ が root でない}) \end{cases}$$

** $su(2)$ では $E_1 = \hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2$ 、 $E_{-1} = \hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2$ であり、 $H = \hat{J}_3$ であることから $[\hat{J}_3, \hat{J}_+] = 1 \cdot \hat{J}_+$ 、 $[\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -1 \cdot \hat{J}_-$ であった。

††証明は以下の通りである。ヤコビ恒等式 $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ に注意しよう。ヤコビ恒等式から、

$$[H_i, [E_{\alpha}, E_{\beta}]] = [E_{\alpha}, [H_i, E_{\beta}]] + [[H_i, E_{\alpha}], E_{\beta}] = (\alpha^i + \beta^i)[E_{\alpha}, E_{\beta}]$$

となる。 $\alpha^i + \beta^i$ がまた root ならば、上式は $[E_{\alpha}, E_{\beta}]$ が root $\alpha^i + \beta^i$ をもつ昇降演算子になっていることを意味する。よって、

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = k_{\alpha+\beta} E_{\alpha+\beta}, \quad (k_{\alpha+\beta} : \text{ある定数})$$

ここで、 $\alpha^i + \beta^i$ が root でなければ零以外に成り立たないので、 $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = 0$ となる。 $\vec{\beta} = -\vec{\alpha}$ のときには $[H_i, [E_{\alpha}, E_{-\alpha}]] = (\alpha^i - \alpha^i)[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = 0$ となるので、 $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}]$ は H_i と可換であり $\sum_j x_j H_j$ と H_i の線形結合で表されるはずである。すなわち、 $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \sum_j x_j H_j$ と表される。今、規格化として $\text{Tr}(H_i H_j) = \lambda \delta_{ij}$ 、 $\text{Tr}(E_{-\alpha} E_{\beta}) = \lambda \delta_{\alpha\beta}$ と規格化因子を共通に取っておく。式 $[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \sum_j x_j H_j$ の両辺に H_i をかけてからトレースをとると (左辺) $= \text{Tr}(H_i [E_{\alpha}, E_{-\alpha}]) = \text{Tr}([H_i, E_{\alpha}] E_{-\alpha}) = \text{Tr}(\alpha^i E_{\alpha} E_{-\alpha}) = \lambda \alpha^i$ および (右辺) $= \text{Tr}(H_i \sum_j x_j H_j) = \lambda x_i$ となるので、 $\vec{x} = \vec{\alpha}$ である。こうして、

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \sum_j \alpha^j H_j$$

ここで、 $\beta = -\alpha$ として $|\mu\rangle$ で挟むと

$$\langle \mu | [E_\alpha, E_{-\alpha}] | \mu \rangle = \langle \mu | \vec{\alpha} \cdot \vec{H} | \mu \rangle = \vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}$$

が得られる。一方、左辺の交換子をばらし、 $E_{\pm\alpha}|\mu\rangle = N_{\pm\alpha,\mu}|\mu \pm \alpha\rangle$ を用いると

$$\langle \mu | [E_\alpha, E_{-\alpha}] | \mu \rangle = \langle \mu | E_\alpha E_{-\alpha} | \mu \rangle - \langle \mu | E_{-\alpha} E_\alpha | \mu \rangle = |N_{-\alpha,\mu}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2$$

となる。両者は等しいので

$$|N_{-\alpha,\mu}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}$$

であるが、

$$N_{-\alpha,\mu} = \langle \mu - \alpha | E_{-\alpha} | \mu \rangle = \langle \mu - \alpha | E_\alpha^\dagger | \mu \rangle = \langle \mu | E_\alpha | \mu - \alpha \rangle^* = N_{\alpha,\mu-\alpha}^*$$

と計算されるので、一つ前の式は

$$|N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu}|^2 = \vec{\alpha} \cdot \vec{\mu} \quad (1.6)$$

と書き直せる。一方、 $E_\alpha|\mu + p\alpha\rangle = 0$ 、及び $E_{-\alpha}|\mu - q\alpha\rangle = 0$ であつたので、ただちに

$$N_{\alpha,\mu+p\alpha} = 0, \quad N_{-\alpha,\mu-q\alpha} = N_{\alpha,\mu-(q+1)\alpha}^* = 0$$

が言える。こうして、(1.6) を用いると

$$\begin{aligned} |N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu+p\alpha}|^2 &= \vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} + p\vec{\alpha}) \quad \rightarrow \quad |N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} + p\vec{\alpha}) \\ |N_{\alpha,\mu+(p-2)\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 &= \vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} + (p-1)\vec{\alpha}) \quad \rightarrow \quad |N_{\alpha,\mu+(p-2)\alpha}|^2 = \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\mu} + (2p-1)\vec{\alpha}) \\ &\dots \\ |N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 - |N_{\alpha,\mu-(q-1)\alpha}|^2 &= \vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} - (q-1)\vec{\alpha}) \\ 0 - |N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 &= \vec{\alpha} \cdot (\vec{\mu} - q\vec{\alpha}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

として、次々に規格化因子 $N_{\pm\alpha,\mu}$ を求めることができる。これは、§§20.3.1 の角運動量のときに規格化因子 N_m を求めた場合と同じである。

さて、(1.7) の左の部分全てを足していくと

$$\begin{aligned} 0 &= (p+q+1)\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu} + \alpha^2 \left(\frac{p(p+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2} \right) \\ \text{すなわち} \quad \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}}{|\vec{\alpha}|^2} &= -\frac{1}{2}(p-q) \end{aligned} \quad (1.8)$$

という関係式が得られることに注意しよう。ここで、 p は $|\mu\rangle$ から E_α で p 回上げられ、 q は $|\mu\rangle$ から $E_{-\alpha}$ で q 回下げられる (0 を含む) 自然数であつたことに注意しておこう。

§ 1.4 いくつかの言葉の定義

positive root とは、ルートベクトルの最初の零でない成分が正の値を取るものとして定義される。

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m) = (0, 0, \dots, 0, a, \dots) \\ a &> 0 \end{aligned}$$

simple root とは、他の positive root から正係数の和で表せないルートベクトルのことを言う。

ルート・ベクトルは複数あるので、添え字 i で区別しよう。任意の simple root α^i に対して、 $E_{\alpha^i}|\mu\rangle = 0$ をみたす状態 $|\mu\rangle$ のことを **highest weight state** と呼ぶ。このとき、対応する weight vector (ウェイト・ベクトル) $\vec{\mu}$ を、**highest weight** と呼ぶ。 $\vec{\mu}$ が highest weight のとき、状態 $|\mu\rangle$ は昇降演算子 E_α でさらに高い weight にすることはできない ($E_{\alpha^i}|\mu\rangle = 0$) ので、§26.1 で導入した p は $p=0$ である。よって、(1.9) から

$$\frac{\alpha^i \cdot \vec{\mu}}{|\alpha^i|^2} = \frac{1}{2}q^i$$

となる。simple root α^i はわかっているので、simple root α^i に対して highest weight $\vec{\mu}$ を与えれば q^i は上式から決まる。逆に、simple root α^i がわかっているので、 q^i を与えれば highest weight $\vec{\mu}$ が決まることになる。ここで、 (q^1, q^2, \dots, q^m) の組を **Dynkin label (ディンキン・ラベル)** と呼ぶ。

fundamental weight (基本ウェイト) とは、

$$\frac{2\alpha^i \cdot \vec{\mu}^j}{|\alpha^i|^2} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1.9)$$

をみたすウェイトのことを言う。Dynkin label $(1, 0, 0, \dots, 0)$ に対する highest weight を $\vec{\mu}^1$ 、Dynkin label $(0, 1, 0, \dots, 0)$ に対する highest weight を $\vec{\mu}^2$ などと書くことにしよう。

ルート・ベクトルから作られる次の行列

$$A_{ji} = \frac{2\alpha^i \cdot \alpha^j}{|\alpha^i|^2} \quad (1.10)$$

を、**Cartan matrix (カルタン行列)** と呼ぶ。よって、simple root α^j の Dynkin label は、カルタン行列の成分を用いて $(A_{j1}, A_{j2}, \dots, A_{jm})$ と表される。

§ 1.5 具体例：su(3) の場合

今までの一般論から、具体例として物理学で良く現れる su(3) の場合を取り上げよう。su(3) の生成子 $\{T_a\}$ は 8 個 ($= 3^2 - 1$) あり、交換関係、構造定数 f_{abc} は

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} T_c$$

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = -\frac{1}{2}, \quad f_{246} = \frac{1}{2}, \quad f_{257} = \frac{1}{2}$$

$$f_{345} = \frac{1}{2}, \quad f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

添え字の巡回について完全反対称

$$f_{ijk} = 0 \text{ (上記以外)}$$

生成子は $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ と書いて、行列表示で上の交換関係を満たすものとして

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

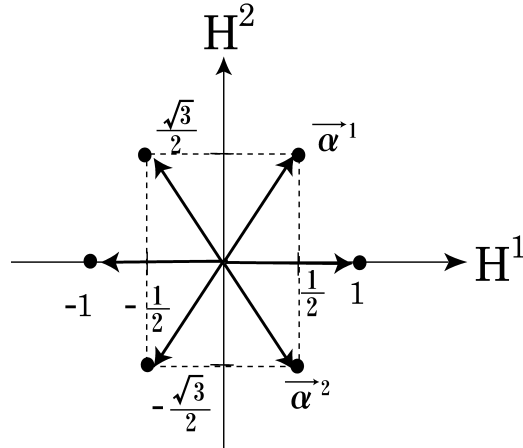


図 2:

と採ることができる。この行列は **Gell-Mann (ゲルマン) 行列** と呼ばれる。

ゲルマン行列からわかるように、 $su(3)$ の生成子で対角的なものは 2 つあり、

$$H_1 \equiv T_3 \left(= \frac{\lambda_3}{2} \right), \quad H_2 \equiv T_8 \left(= \frac{\lambda_8}{2} \right)$$

である。昇降演算子は残りの生成子から

$$E_{(\pm 1, 0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2), \quad \vec{\alpha} = (\pm 1, 0)$$

$$E_{\pm(1/2, \sqrt{3}/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5), \quad \vec{\alpha} = \pm \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$E_{(\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7), \quad \vec{\alpha} = \left(\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

と導入される。ルートベクトルをあわせて記した。ルートベクトルを図示すると、図 2 のようになる。ルート図 2 からわかるように、positive root は

$$\vec{\alpha} = (1, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

の 3 つである。このうち、 $(1, 0)$ は他の 2 つの positive root の正係数の和 (係数はともに 1) で表されるので、simple root ではない。残りの 2 つは他の 2 つのルートベクトルの正係数の和で書けないので simple root である。よって、simple root は

$$\vec{\alpha}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \vec{\alpha}^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

の 2 つである。

次に、 H_1 、 H_2 の固有ベクトルを

$$|\mu_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\mu_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

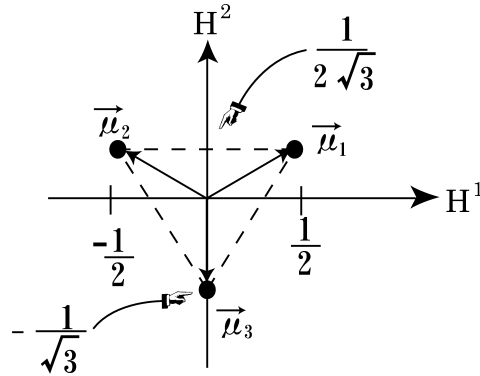


図 3:

ととると、簡単な計算

$$H_1|\mu_1\rangle = \frac{1}{2}|\mu_1\rangle, \quad H_2|\mu_1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}}|\mu_1\rangle$$

などから、weight vector $\vec{\mu}_1 = (1/2, 1/(2\sqrt{3}))$ などと得られる。

$$\vec{\mu}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \vec{\mu}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \vec{\mu}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

図示すると、図 3 のようになる。この 3 つの状態から構成される $su(3)$ の表現を**基本表現**と呼ぶ。

次に、fundamental weight $\vec{\mu}^j$ を求めよう。添え字の位置に注意せよ。simple root が 2 つあったので、fundamental weight も 2 つある。fundamental weight は (1.9) を満たす weight であった。simple root がわかっているから、簡単な計算により

$$\vec{\mu}^1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \quad \vec{\mu}^2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

と得られる。

Cartan matrix は (1.10) より、

$$A_{ji} = \frac{2\vec{\alpha}^i \cdot \vec{\alpha}^j}{|\vec{\alpha}^i|^2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $\vec{\alpha}^1$ の Dynkin label は $(A_{11}, A_{12}) = (2, -1)$ 、 $\vec{\alpha}^2$ の Dynkin label は $(A_{21}, A_{22}) = (-1, 2)$ となる。

さて、 $su(3)$ の場合、Dynkin label は (q^1, q^2) と 2 つの成分を持っている。ここで、 $E_{-\alpha^i}|\mu\rangle = N_{-\alpha^i, \mu}|\mu - \alpha^i\rangle$ のように weight $\vec{\mu}$ を simple root $\vec{\alpha}^i$ で下げることになっている。Dynkin label の成分 q^i は simple root $\vec{\alpha}^i$ で q^i 回下げられることを意味していたので、 $(\vec{\mu} - \vec{\alpha}^i \text{ の Dynkin label}) = (\vec{\mu} \text{ の Dynkin label}) - (\vec{\alpha}^i \text{ の Dynkin label})$ となる。

色々な規約表現での weight 図を描こう。Dynkin label (q^1, q^2) では、highest weight が $\sum_{i=1}^2 q^i \vec{\mu}^i$ であることを意味する。

(i) Dynkin label $(1, 0)$

このときには、 $\vec{\mu}^1$ が highest weight である。 $E_{-\alpha^i}$ を作用させて状態を構成していく。 $\vec{\mu}^1$ の Dynkin label は

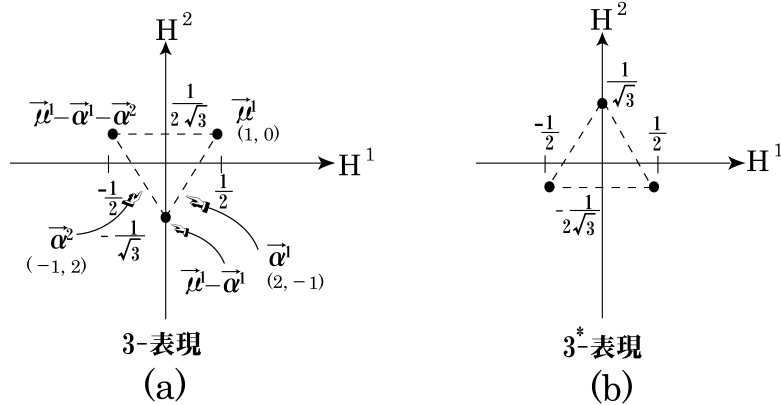


図 4:

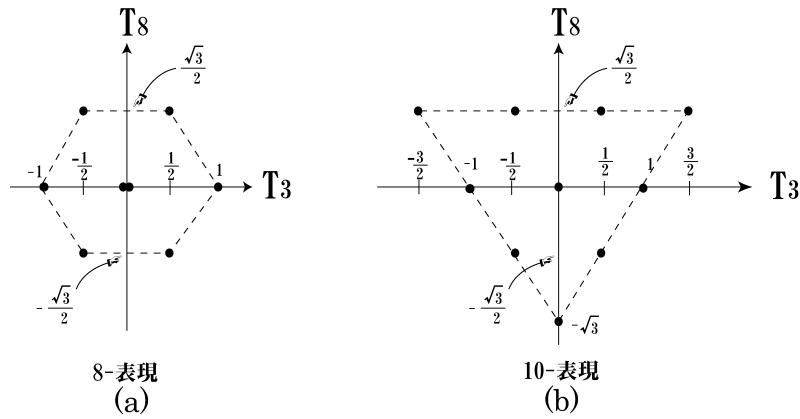


図 5:

(1, 0)なので、simple root α^1 で1回下げられる。そのとき weight は $\bar{\mu}^1 - \alpha^1$ となる。この weight をもつ新たな状態 $|\mu^1 - \alpha^1\rangle$ の Dynkin label は $\bar{\mu}$ の Dynkin label から α^1 の Dynkin label を引き、 $(1, 0) - (2, -1) = (-1, 1)$ となる。負数は意味が無いので、今度は $E_{-\alpha^2}$ で1回下げられることを意味する。 $E_{-\alpha^2}|\mu^1 - \alpha^1\rangle$ 。よって、新たに $(\bar{\mu}^1 - \alpha^1) - \alpha^2$ を weight とする状態が得られる。この weight の Dynkin label は $((1, 0) - (2, -1)) - (-1, 2) = (-1, 1) - (-1, 2) = (0, -1)$ となり、これ以上、状態を下げられず、規約表現の状態がすべて求まったことになる。すなわち、highest weight state $|\bar{\mu}^1\rangle$ と $|\bar{\mu}^1 - \alpha^1\rangle$ 、 $|\bar{\mu}^1 - \alpha^1 - \alpha^2\rangle$ の3つの状態が存在する。weight vector を図示しよう (図 4 (a))。ベクトルの先端 (矢の先) を黒丸で示した。状態は3つあるので、3-表現と呼ばれる。

(ii) Dynkin label (0, 1)

このときには、 $\bar{\mu}^2$ が highest weight である。(i) のときと同様にして、weight は3つ得られる (図 4 (b))。この表現は 3*-表現と呼ばれる。

(iii) Dynkin label (1, 1)

このときには、 $\bar{\mu} = \bar{\mu}^1 + \bar{\mu}^2$ が highest weight である。今度は weight は8つ得られる (図 5 (a))。weight vector を $\vec{0}$ とする状態が2つあるが、この2つの状態は線形独立である。highest weight state から同じ状態へ2通りの下降の仕方があった場合、(たとえば weight 図の原点へは $|A\rangle = E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\mu\rangle$ と $|B\rangle = E_{-\alpha^1} E_{-\alpha^2} |\mu\rangle$ の

2通りの方法で下降できる)、状態 $|A\rangle$ 、 $|B\rangle$ が線形独立かそうでないかは、

$$\det \begin{vmatrix} \langle A|A\rangle & \langle A|B\rangle \\ \langle B|A\rangle & \langle B|B\rangle \end{vmatrix} = \begin{cases} \neq 0 & (\text{線形独立である}) \\ = 0 & (\text{線形独立でない}) \end{cases}$$

で判定される。weight 図の原点に対応する2つの状態は線形独立となっている。この表現を8-表現と呼ぶ。

(iv) Dynkin label (3, 0)

このときには、 $\vec{\mu} = 3\vec{\mu}^1$ が highest weight である。今度は weight は10個得られる (図5 (b))。2通りの下降の仕方得られる状態が複数存在するが、すべて線形従属であり、各 weight vector に対して独立な状態は各々1つずつとなっている。この表現を10-表現と呼ぶ。

そのほかにも、Dynkin label を指定することにより、様々な表現が得られる。

§1.6 ヤング図

角運動量を思い出そう。これは $su(2)$ 代数を構成する。角運動量の大きさが $j = 1/2$ のとき、 z -射影は $m = \pm 1/2$ である。この m は1成分の weight vector である。状態数は $2j + 1 = 2$ であり、2次元表現である。状態 (波動関数) の対称性を box(箱) \square で表わす。すなわち、box を状態のように扱って、2つのスピン $1/2$ の状態を合成しよう。このとき

$$\square \otimes \square = \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (1.11)$$

の様に記す。左辺は2つのスピン $1/2$ の状態の直積であり、2つのスピンの合成を考え、右辺はそれを異なるスピンの大きさの状態に規約分解していることを意味する。横に並んだ箱 $\square \square$ は状態 (波動関数) を対称化したものであり、この場合はスピン1の状態に対応する。箱を縦に並べた場合 $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ は状態は反対称に組み入れ、今の場合はスピン0の状態に対応する。すなわち、(1.11) は波動関数の言葉で表わせば

$$\psi_1 \otimes \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1) \oplus \frac{1}{2}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1)$$


のことである。合成する際には、上の段の横の並びは決して下の段より短くはならない。

3つのスピン $1/2$ を合成してみよう。分配則が成り立っていて、

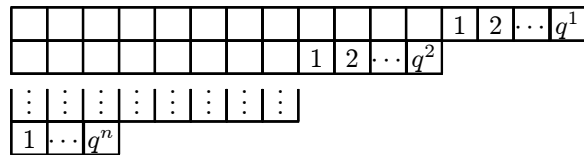
$$\begin{aligned} \square \otimes \square \otimes \square &= \left(\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) \otimes \square \\ &= \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (1.12)$$

と表わされるが、 $su(2)$ のスピンの場合には、 $m = \pm 1/2$ で状態は2つしか無く、3つの状態を反対称に組むとそのうちの2つは必ず同じ状態 (同じ m を持つ) になるので、反対称化できず、零になる。よって、縦に3つ箱の並んだものは現われない。こうして、 $su(2)$ の場合には

$$\square \otimes \square \otimes \square = \square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

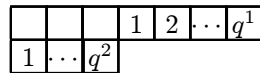
となる。縦に2つ箱が並ぶとスピンは零に組んでいて、回転に対して変換性を示さない。よって  は右端の箱1つが変換性を示し、スピン1/2である。横に3つ並んだものは3つの状態を完全対称化しているの、スピン3/2を表わす。こうして、状態数は $2j+1$ であったので、状態数は $2 \times 2 \times 2 = 4 + 2 + 2$ となり整合している。








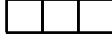
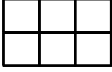
一般に、 $su(N)$ 代数で Dynkin label が $(q^1, q^2, \dots, q^{N-1} (= q^n))$ のとき、既約表現は

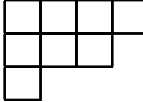
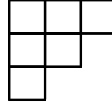


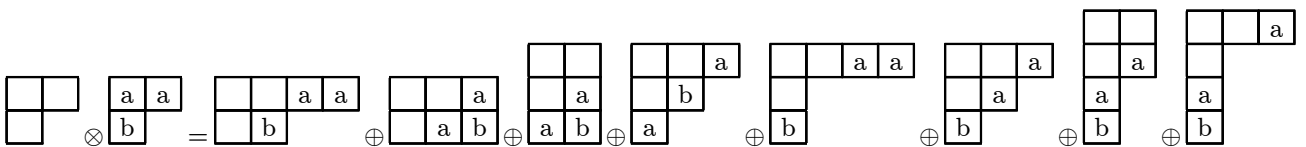
のように表わす。これを **Young tableau (ヤング図)** と呼ぶ。(箱の中の数字は、例えば1行目では、飛び出している箱が q^1 個あることを意味しており、箱の中に具体的に数字が入っているということでは無い。)

$su(3)$ のときには Dynkin label が (q^1, q^2) であれば

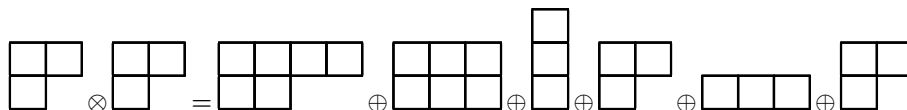


で表わされる。縦に3つ並んだ  は完全反対称で、 $su(3)$ の変換性を示さない。縦に3つまで並ぶので、互いに相補的な  と  や、 と  は、複素共役の関係にあり、複素共役表現に * を付けて表わす。例えば、 は3-表現であり、 は3*-表現、 は10-表現、 は10*-表現といった具合である。ここで、数字は表現の次元(状態の個数)を表わす。

ここで、2つの表現の積の既約分解の方法をまとめておこう。 \otimes  のような積を既約分解する。まず、(1) 掛けるヤング図の1行目に a, a, \dots と入れていく。2行目には b, b, \dots といった具合である。次に(2) まず1行目の a 達を掛けられるヤング図の違った列に付けていく。次に2行目の b 達を同様に違った列に付けていく。(3) できた図を、右から左へ、上から下へ読んだとき、 a の数の和 $\geq b$ の数の和 $\geq \dots$ となっている図だけ残す。これで既約分解は完成する。例として、 $su(3)$ の8-表現同士の直積の既約分解を実行してみよう。



といったようになるが、右辺最後の2つは縦に箱が4つ並んでおり、 $su(3)$ では基本表現の次元が3なので、4つの状態を完全反対称に組むことはできず、この2つは現われない。また、第3、4、5、6項目の縦に3つ並んだ部分は、 $su(3)$ の変換で変換性を示さず(1重項と呼ぶ)、 $su(3)$ で変換しない部分であるので省いて書いておこう。そうすると、 a や b は消して、簡単に





となる。次元はすぐ後で計算法を与えるが、 $8 \times 8 = 27 + 10^* + 1 + 8 + 10 + 8$ となっている。

ヤング図を使って表現の次元を計算する簡便な方法を述べておこう。一般に、**Factor over Hook rule**と呼ばれる。以下では $su(N)$ の場合に限ろう。このとき、表現の次元は、ヤング図の1番左上、すなわち最左列、最上行に N を入れ、最上行は右の箱に行くにつれ $N+1$ 、 $N+2$ といったように一つずつ数を増やしたものをに入れていく。下の段は、すぐ上の箱の数字より1小さい数字を入れていく。ヤング図の箱の中の数をすべて掛ける。この積を分子に置く。これを **Factor** と呼び、 F としよう。次に同じヤング図で今度は特定の箱を考え、その箱を含んで右にある箱の数と下にある箱の数の和を書き入れる。これをすべての箱に施し、やはり全ての数の積をとり、分母に置く。これを **Hook** と呼び、 H と書こう。表現の次元は F/H で得られる。たとえば $N=4$ として、下のようなヤング図で表わされる表現の次元は

$$(\text{次元}) = \frac{F}{H} = \frac{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 3 & 4 & & \\ \hline 2 & & & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 3 \times 4 \times 2}{6 \times 4 \times 2 \times 1 \times 3 \times 1 \times 1}$$


の様にして得られる。

$su(3)$ の2つの場合、 と  の場合に計算してみよう。

$$(\text{次元}) = \frac{F}{H} = \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}} = \frac{3 \times 4 \times 2}{3 \times 1 \times 1} = 8$$

$$(\text{次元}) = \frac{F}{H} = \frac{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}} = \frac{3 \times 4 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

となり、8-表現と10-表現となっている。

$su(3)$ で3つの状態の合成を考えよう。スピン $su(2)$ の場合と異なり、3つの状態の完全反対称な状態は可能であるので、箱は縦に3つまで並ぶ。箱  は基本表現であり、次元は3である。このとき

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \text{状態数} \quad 3 \times 3 \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1 \end{array} \quad (1.13)$$

となっている。

§ 1.7 動的対称性

物理学への応用として、時空や内部対称性ではないがハミルトニアンが持ち得る動的対称性の例として、水素原子と3次元調和振動子について見ておこう。

§§1.7.1 水素原子—Runge-Lenz-Pauli ベクトル—

古典力学において、逆 2 乗力の働く下での質点の運動—ケプラー問題—を、その大きさが離心率を表わすベクトルを導入して解くことができる。量子力学の世界では、水素原子の問題がそれに相当する。ここでは、水素原子の問題に関して、リー代数を用いてエネルギー固有値を求めてみよう。

ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

である。角運動量演算子は $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$ であった。ここで、次の Runge-Lenz-Pauli ベクトルを導入する：

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{L}} \times \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{L}} \right) + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

このとき、

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = [\hat{H}, \hat{\mathbf{B}}] = 0$$

となることは直接の計算により確かめられる。また、1、2、3 を x 、 y 、 z として、繰り返す添え字は和を取るものとして

$$\begin{aligned} [\hat{L}_a, \hat{L}_b] &= i\hbar\epsilon_{abc}\hat{L}_c \\ [\hat{B}_a, \hat{B}_b] &= -\frac{2i\hbar}{m}\epsilon_{abc}\hat{L}_c\hat{H} \\ [\hat{L}_a, \hat{B}_b] &= i\hbar\epsilon_{abc}\hat{B}_c \end{aligned} \quad (1.14)$$

が得られる。今、束縛状態を考えるとエネルギー固有値 E は負値をとるので

$$\hat{A}_a = \sqrt{-\frac{m}{2E}} \hat{B}_a$$

として、 $\hat{\mathbf{A}}$ を定義する。このとき、先の交換関係は

$$\begin{aligned} [\hat{L}_a, \hat{L}_b] &= i\hbar\epsilon_{abc}\hat{L}_c \\ [\hat{L}_a, \hat{A}_b] &= i\hbar\epsilon_{abc}\hat{A}_c \\ [\hat{A}_a, \hat{A}_b] &= i\hbar\epsilon_{abc}\hat{L}_c \end{aligned} \quad (1.15)$$

と書き換えられる。さらに

$$\hat{M}_a = \frac{1}{2\hbar} (\hat{L}_a + \hat{A}_a), \quad \hat{N}_a = \frac{1}{2\hbar} (\hat{L}_a - \hat{A}_a)$$

を定義すると、

$$\begin{aligned} [\hat{M}_a, \hat{M}_b] &= i\epsilon_{abc}\hat{M}_c \\ [\hat{N}_a, \hat{N}_b] &= i\epsilon_{abc}\hat{N}_c \\ [\hat{M}_a, \hat{N}_b] &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

となる。これは $\{\hat{\mathbf{M}}\}$ と $\{\hat{\mathbf{N}}\}$ の 2 つの独立な $su(2)$ 代数が成り立っていることを意味する。すなわち、水素原子の問題は $su(2) \times su(2)$ リー代数で表わすことができる。

$su(2)$ 代数であった角運動量代数の知識を用いると、固有値はただちに

$$\begin{aligned}\hat{M}^2 &\rightarrow \Lambda(\Lambda+1) & (\Lambda = 0, 1/2, 1, \dots) \\ \hat{M}_3 &\rightarrow \lambda & (\lambda = -\Lambda, -\Lambda+1, \dots, \Lambda-1, \Lambda) \\ \hat{N}^2 &\rightarrow \Sigma(\Sigma+1) & (\Sigma = 0, 1/2, 1, \dots) \\ \hat{N}_3 &\rightarrow \sigma & (\sigma = -\Sigma, -\Sigma+1, \dots, \Sigma-1, \Sigma)\end{aligned}$$

となるのがわかる。また、 $\hat{B} \cdot \hat{L} = \hat{L} \cdot \hat{B} = 0$ より

$$\hat{M}^2 = \hat{N}^2 = \frac{1}{4\hbar^2} (\hat{L}^2 + \hat{A}^2)$$

となるので、 \hat{M}^2 と \hat{N}^2 の固有値は等しく

$$\Lambda = \Sigma$$

が得られる。ここで、 \hat{A} を \hat{B} に戻し、さらに \hat{B} の定義を用いると、直接の計算から

$$\frac{1}{4\hbar^2} (\hat{L}^2 + \hat{A}^2) = -\frac{1}{4\hbar^2} \left(\hbar^2 + \frac{m}{2E} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon} \right)^2 \right)$$

となるが、左辺は \hat{M}^2 そのものなので、この固有値は $\Lambda(\Lambda+1)$ となる。上式の左辺を固有値で置き換えて E について解くと、

$$E = -\frac{m}{2\hbar^2(2\Lambda+1)^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2$$

となる。ここで、自然数を n とすると、 $\Lambda = 0, 1/2, 1, \dots$ より

$$2\Lambda + 1 = n = 1, 2, \dots$$

となるのがわかるので、自然数 n で置き換える。また、 $\hat{L} = \hbar(\hat{M} + \hat{N})$ より、右辺を 2 つの $su(2)$ スピンの合成と考えると、 \hat{L}^2 の固有値 $\hbar^2 l(l+1)$ は

$$|\Lambda - \Sigma| \leq l \leq \Lambda + \Sigma$$

となるのがわかる。ここで $\Lambda = \Sigma$ であるので、以上まとめると、

$$\begin{aligned}E &= -\frac{m}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2}, & n = 1, 2, \dots \\ l &= 0, 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

が得られる。これは、量子力学のシュレーディンガー方程式を解いて得られた水素原子のエネルギー固有値に他ならない。 n は主量子数で、角運動量の大きさ l は 0 から $n-1$ までの整数値を取る。

§§1.7.2 3次元調和振動子

3次元調和振動子を生成消滅演算子で記述しよう。 x, y, z 方向の独立な 3 成分があるのでハミルトニアンは

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{r}^2 \\ &= \hbar\omega \sum_{i=x,y,z} \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$r_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(a_i + a_i^\dagger), \quad p_i = (-i)\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(a_i - a_i^\dagger), \quad (i = 1, 2, 3 \leftrightarrow x, y, z)$$

と定義されている。交換関係は

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$

である。今、

$$\mathcal{A}_{ij} = \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_j + a_j a_i^\dagger)$$

を考えると、 \mathcal{A}_{ij} から得られる交換関係

$$[\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{A}_{kl}] = \mathcal{A}_{il}\delta_{jk} - \mathcal{A}_{kj}\delta_{il}$$

は $u(3)$ の交換関係であり、 \mathcal{A}_{ij} が作る代数は $u(3)$ 代数となる。ここで、ハミルトニアンは

$$H_0 = \hbar\omega \sum_i \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) = \hbar\omega \sum_i \mathcal{A}_{ii}$$

となり、これは $U(3)$ の部分群 $U(1)$ 群となり、 $u(3)$ から $u(1)$ 部分を除いた $su(3)$ の変換の下で不変である。実際、

$$[H_0, \mathcal{A}_{ij}] = 0$$

を満たす。こうして、3次元調和振動子は $su(3)$ 対称性を持つ。

実際、 $su(3)$ の生成子 T_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) を用いて

$$\mathcal{O}_a = a_k^\dagger (T_a)_{kl} a_l$$

という演算子を導入すると、 \mathcal{O}_a は $su(3)$ 代数を満たす。

今、多粒子系の場合も視野に入れて、粒子の区別を α で行い、 $\mathcal{A}_{ij} = \sum_{\alpha=\text{粒子}} \mathcal{A}_{ij}(\alpha)$ の意味であると考えよう。さて、 a_x^\dagger 、 a_y^\dagger 、 a_z^\dagger は3次元ベクトルを構成するので、角運動量としては大きさ1を持つと考えられる。したがって、複合演算子 $a_i^\dagger a_j$ は2つの角運動量1の合成と数学的には同じであるので、角運動量の大きさ $J = 0, 1, 2$ と既約分解できる。 $J = 0$ がハミルトニアンであった。 $J = 1$ に対応するものを L_q 、 $J = 2$ に対応するものを Q_q と書くと、変換行列は零でない要素のみ書くと、得られる結果は

	Q_1	Q_{-1}	$\sqrt{3}L_1$	$\sqrt{3}L_{-1}$	$\sqrt{3}L_0$	Q_2	Q_{-2}	$\sqrt{2}H_0$	Q_0
$\sqrt{6}\mathcal{A}_{xz}$	-1/2	1/2	1/2	1/2					
$\sqrt{6}\mathcal{A}_{zx}$	-1/2	1/2	-1/2	-1/2					
$i\sqrt{6}\mathcal{A}_{yz}$	-1/2	-1/2	1/2	-1/2					
$i\sqrt{6}\mathcal{A}_{zy}$	-1/2	-1/2	-1/2	1/2					
$i\sqrt{6}\mathcal{A}_{yx}$					$\sqrt{1/2}$	1/2	-1/2		
$i\sqrt{6}\mathcal{A}_{xy}$					$-\sqrt{1/2}$	1/2	-1/2		
$\sqrt{6}\mathcal{A}_{xx}$						1/2	1/2	$\sqrt{1/3}$	$-\sqrt{1/6}$
$\sqrt{6}\mathcal{A}_{yy}$						-1/2	-1/2	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/6}$
$\sqrt{6}\mathcal{A}_{zz}$								$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{2/3}$

となっている。このとき、

$$L_q = \sum_{\alpha} l_q(\alpha), \quad l_q(\alpha) = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_q$$

$$Q_q = \sum_{\alpha} \tilde{Q}_q(\alpha), \quad \tilde{Q}_q(\alpha) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \left(m\omega r^2 Y_{2q}(\theta_r, \phi_r) + \frac{p^2 Y_{2q}(\theta_p, \phi_p)}{m\omega} \right)$$

である。 θ_r, ϕ_r は空間座標 \mathbf{r} の極座標表示、 θ_p, ϕ_p は運動量 \mathbf{p} の極座標表示であり、 Y_{2q} は球面調和関数である。

さて、ある代数のすべての生成子と可換な演算子を、その代数の**カシミヤ演算子**と呼ぶ*。3次元調和振動子ではカシミヤ演算子 \tilde{C}_2 は

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2 &= 6 \sum_{ij} \mathcal{A}_{ij} \mathcal{A}_{ji} + (2\mathcal{A}_{zz} - \mathcal{A}_{xx} - \mathcal{A}_{yy})^2 + 3(\mathcal{A}_{xx} - \mathcal{A}_{yy})^2 \\ &= \sum_{q=-2}^2 Q_q Q_q + 3 \sum_{q=-1}^1 L_q L_q = Q \cdot Q + 3L \cdot L \end{aligned}$$

となることが知られている。ハミルトニアン H_0 は $su(3)$ 不変であり、またハミルトニアンにカシミヤ演算子が加えられても対称性は変わらず、一つの既約表現に属する状態のエネルギーは縮退している。そこで、動的 $su(3)$ 対称性を壊し、縮退が解ける場合を考えてみよう。演算子 Q_q は角運動量 2 を持つ 4 重極演算子である。原子核のような多粒子系で 4 重極変形が起きると、現象論的ではあるが $Q \cdot Q$ に比例した相互作用が生じると考えられる。この相互作用 $Q \cdot Q$ は $su(3)$ 対称性を壊す。そこで、もとのハミルトニアン H_0 に $Q \cdot Q$ 相互作用を加えてみよう†。すなわち、適当な定数を b として、

$$\begin{aligned} H &= H_0 - b(Q \cdot Q) \\ &= H_0 - b(\tilde{C}_2 - 3(L \cdot L)) \end{aligned}$$

となる。ここで、カシミヤ演算子の関係を用いた。カシミヤ演算子を加えても既約表現の状態のエネルギーを全体として変えるだけであり、定数として扱ってよいので落としてしまおう。また、演算子 $L \cdot L$ の固有値は

*例えば、角運動量 $su(2)$ 代数のときには $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ がカシミヤ演算子である。

†そもそも調和振動子は粒子間に $|\mathbf{r}(\alpha) - \mathbf{r}(\beta)|^2$ のポテンシャルが存在することにより生じていた。粒子間の 2 体相互作用の次の次数は $|\mathbf{r}(\alpha) - \mathbf{r}(\beta)|^4 \equiv r_{\alpha\beta}^4$ だとして。この相互作用からポテンシャル

$$\begin{aligned} V^{(2)} &\propto \sum_{\alpha < \beta} r_{\alpha\beta}^4 \\ &= \sum_{\alpha < \beta} (r_{\alpha}^4 + r_{\beta}^4 + \frac{8}{3} r_{\alpha}^2 r_{\beta}^2 + \frac{4}{3} r_{\alpha}^2 r_{\beta}^2 P_2(\cos \theta_{\alpha\beta}) - 4(r_{\alpha}^2 + r_{\beta}^2) r_{\alpha} r_{\beta} \cos \theta_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

が生じるが、右辺最後の項は状態がパリティの良い固有状態であればその期待値は零となる。第 1 から 3 項までは $su(3)$ 対称性を破らない。よって $su(3)$ 対称性を壊すのは第 4 項である。ここで、 $P_2(\cos \theta)$ はルジャンドル多項式であり、

$$r_{\alpha}^2 r_{\beta}^2 P_2(\cos \theta_{\alpha\beta}) = \sum_q r_{\alpha}^2 Y_{2q}(\theta_{\alpha}, \phi_{\alpha}) \cdot r_{\beta}^2 Y_{2q}(\theta_{\beta}, \phi_{\beta})$$

かつ、

$$r_{\alpha}^2 Y_{2q}(\theta_{\alpha}, \phi_{\alpha}) = \frac{1}{4m\omega} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \tilde{Q}_q(\alpha)$$

である。こうして、距離の 4 乗に比例した粒子間相互作用から、 $su(3)$ 対称性を壊す相互作用として

$$V^{(2)} \propto \sum_{q=-2}^2 Q_q Q_q$$

が考えられる。

$L(L+1)$ ($L = 0, 1, 2, \dots$) であることを知っている。こうして、エネルギーは

$$H = H_0 + aL(L+1)$$

となる ($a = 3b$)。こうして、 $Q \cdot Q$ 相互作用が存在すると、回転スペクトル $L(L+1)$ が現れることがわかる[‡]。

§ 1.8 クォークモデル

§§1.8.1 量子数の導入

加速器の発達と共に、1940年代から次々に“素粒子”が発見され、1960年頃までには100を超える素粒子が知られるようになった。このなかで、強い相互作用をする素粒子をハドロンと呼ぶ。ここではハドロンに注目しよう。強い相互作用をする粒子は、種々の反応で生成され、崩壊する。反応の前後で変わらない量（量子数）が幾つか知られており、また素粒子反応を分析することにより新たに発見されもした。たとえば、質量が近いよく似たハドロンをひとまとめにして考えよう。質量とエネルギーの等価性から、質量をエネルギーで表わすのが便利である。ここで、

$$1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

という単位を用いる。また、 $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$ である。陽子 (p)、中性子 (n) は質量がほぼ同じであり、1つのグループとする。陽子の電荷は $+e$ であり、中性子は 0 である。また、パイ中間子 ($\pi^{\pm,0}$) は電荷の異なる3種の質量がほぼ近く、 π^+ と π^- は同じ質量を持つので、これらも1つのグループとする。肩の $\pm, 0$ は素電荷 e を単位にした電荷 $Q = \pm 1$ または $Q = 0$ を表わす。

$$\begin{aligned} p, n : \text{質量} &\sim 940 \text{ MeV}/c^2 \\ \pi^+, \pi^0, \pi^- : \text{質量} &\sim 140 \text{ MeV}/c^2 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

似たグループの電荷の平均を \bar{Q} とすると、

$$\begin{aligned} p, n \cdots \bar{Q} &= \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ \pi^+, \pi^0, \pi^- \cdots \bar{Q} &= \frac{1+0+(-1)}{3} = 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

となる。ここで、“アイソスピンの第3(z)成分 I_3 ”を、次のように導入する。

$$I_3 = Q - \bar{Q}$$

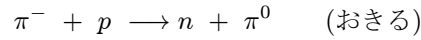
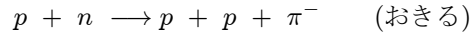
このとき、

$$\begin{cases} p : I_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ n : I_3 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \pi^+ : I_3 = 1 - 0 = 1 \\ \pi^0 : I_3 = 0 - 0 = 0 \\ \pi^- : I_3 = -1 - 0 = -1 \end{cases}$$

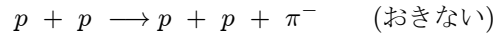
[‡]この考え方は原子核の回転スペクトルの説明に用いられ、Elliot モデルとして知られている。

となることがわかる。アイソスピンの大きさはスピンを真似て、陽子、中性子は第3成分が $\pm 1/2$ であるので、大きさ $I = 1/2$ と決める。同様にパイ中間子は $I = 1$ となる。

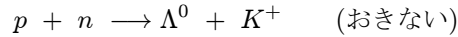
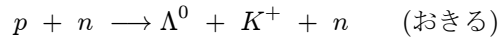
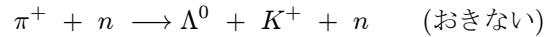
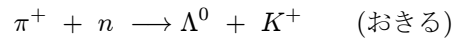
十分なエネルギーを与えれば、次の2つの素粒子反応は実際に起きる。



どちらも、反応の前後で、電荷もアイソスピンの z 成分も保存している。ところが、



という反応は起きない。これは明らかに反応の前後で電荷が保存していないからである。ところが、電荷の保存は成り立っていても、以下の様に



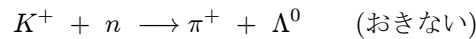
と、起きる反応と起きない反応が存在する。そこで、新たな保存量として**バリオン数**と呼ばれる量子数 B を導入する。たとえば、次のように割り振っておく。

$$n, p, \Lambda^0 \cdots B = 1$$

$$\pi^0, \pi^+, \pi^-, K^+ \cdots B = 0$$

そうすると、上の反応で電荷保存則は成り立っているのに起きないものは、バリオン数が反応の前後で保存していないことがわかる。

しかしながら、電荷保存則もバリオン数の保存も成り立っているが、起きない反応の存在に気づかれた。



そこで、今度も新しい量子数として**ストレンジネス** S が導入される。

$$K^+ \cdots S = 1$$

$$p, n, \pi^0, \pi^\pm \cdots S = 0$$

$$\Lambda^0, K^- \cdots S = -1$$

こうして、素粒子反応から幾つかの量子数が導入され、ハドロンが分類された。

§§1.8.2 ハドロンの分類

ハドロンの持つ電荷を素電荷 e を単位にして、 Qe とする。アイソスピンの大きさを I 、アイソスピンの第3成分を I_3 ($I_3 = -I, -I+1, \dots, I$) としよう。また、先に導入したバリオン数を B 、ストレンジネスを S としよう。以下の便宜のため、バリオン数とストレンジネスから、ハイパーチャージ Y を定義しておこう。

$$Y = S + B$$

強い相互作用では、 I 、 I_3 、 B 、 S (または Y) が別々に保存する。バリオン数が1のハドロンを**バリオン**、0のハドロンを**メソン**と呼ぶ。

強い相互作用する素粒子であるハドロンを、質量が近く、スピン J が等しいものにまとめておこう。

	バリオン ($B = 1$)	質量 (MeV/c^2)	I	I_3	Y
$J = 1/2 :$	p	938.3	1/2	1/2	1
	n	939.6	1/2	-1/2	1
	Λ	1115.6	0	0	0
	Σ^+	1189.4	1	1	0
	Σ^0	1192.6	1	0	0
	Σ^-	1197.4	1	-1	0
	Ξ^0	1315	1/2	1/2	-1
	Ξ^-	1321	1/2	-1/2	-1
$J = 3/2 :$	Δ^{++}	~ 1230	3/2	3/2	1
	Δ^+	~ 1230	3/2	1/2	1
	Δ^0	~ 1230	3/2	-1/2	1
	Δ^-	~ 1230	3/2	-3/2	1
	Σ^{*+}	1383	1	1	0
	Σ^{*0}	1384	1	0	0
	Σ^{*-}	1387	1	-1	0
	Ξ^{*0}	1532	1/2	1/2	-1
	Ξ^{*-}	1535	1/2	-1/2	-1
	Ω^-	1672	0	0	-2

それぞれのグループに対し、横軸に I_3 、縦軸に Y をとって図示しよう (図 6)。

次にメソンについても同様にまとめておこう。

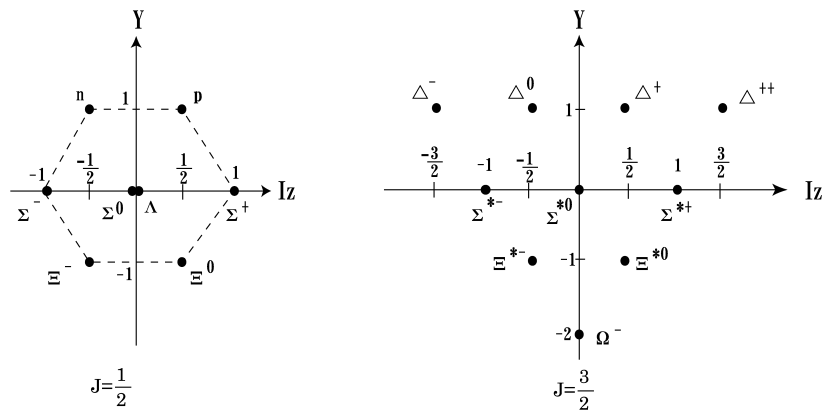


図 6:

	メソン ($B = 0$)	質量 (MeV/c^2)	I	I_3	Y
$J = 0 :$	π^+	139.6	1	1	0
	π^0	135.0	1	0	0
	π^-	139.6	1	-1	0
	K^+	494	1/2	1/2	1
	K^0	498	1/2	-1/2	1
	\bar{K}^0	498	1/2	1/2	-1
	K^-	494	1/2	-1/2	-1
	η	548.8	0	0	0
	η'	957.5	0	0	0
$J = 1 :$	ρ^+	~ 770	1	1	0
	ρ^0	~ 770	1	0	0
	ρ^-	~ 770	1	-1	0
	K^{*+}	892	1/2	1/2	1
	K^{*0}	896	1/2	-1/2	1
	\bar{K}^{*0}	896	1/2	1/2	-1
	K^{*-}	892	1/2	-1/2	-1
	ω	782	0	0	0
	ϕ	1019	0	0	0

やはり、それぞれのグループに対し、横軸に I_3 、縦軸に Y をとって図示しておく (図 7)。メソンの場合には、 η (エータメソン) と η' (エータプライムメソン) は量子力学的に η_0 と η_8 というメソンが混合を起こして良い固有状態になっていると考えられている。 ω (オメガメソン) と ϕ (ファイメソン) も同様であるが、実際には混合している (図 7)。

バリオン、メソンの図からただちに読み取れることは

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.17)$$

という関係が常に成り立っていることである。これを **中野・西島・Gell-Mann の法則** と呼ぶ。

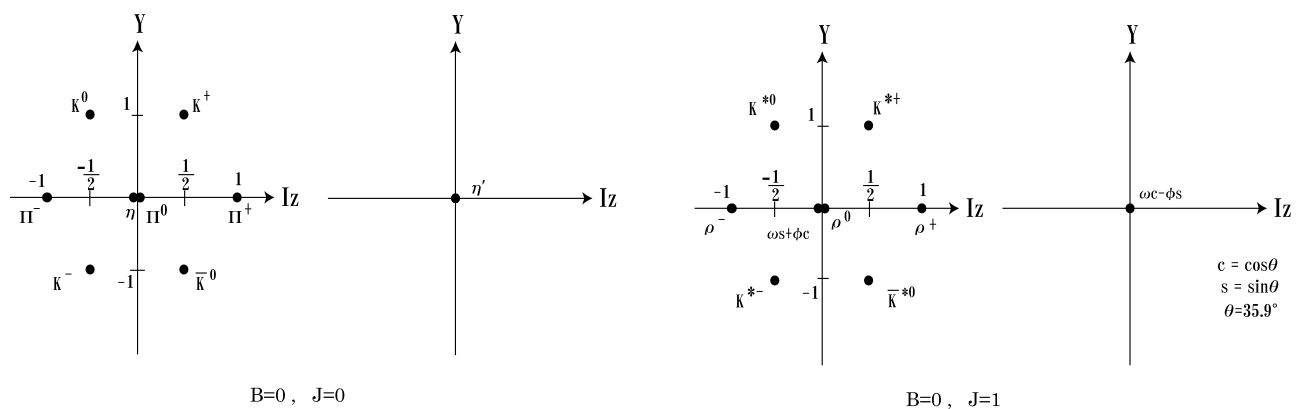


図 7:

また、ハドロンを I_3 と Y で描いた図は、 $su(3)$ の weight 図と同じ形をしていることに気づかれる。バリオンでは 8-表現と 10-表現が、メソンでは 8-表現と 1-表現が現われているように見える。実際、

$$\begin{aligned} I_3 &= H_1 (= T_3) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} Y &= H_2 (= T_8) \end{aligned} \quad (1.18)$$

とすれば完全に一致する。リー代数の表現で学んだことは、 $su(3)$ の変換の下で、各表現に属する異なる weight を持つ状態は互いに移りあうことができることであった*。これは、強い相互作用をする素粒子には $su(3)$ 対称性が存在することを意味する。こうして、強い相互作用する素粒子には $su(3)$ 対称性が存在し、 $su(3)$ の既約表現でハドロンを分類することが可能であるという考えに導かれる。この $su(3)$ 対称性を **フレーバー $su(3)$** と呼ぶ

§§1.8.3 クォークモデル

ハドロンをまとめた図は、対応 (1.18) を通して $su(3)$ 代数の weight 図と一致した。しかしながら、8次元表現、10次元表現、1次元表現は表れたが、最も基本的な3次元の基本表現やそれに複素共役な 3^* 表現が現れない。そこで、基本表現に対応する基本粒子として、**クォーク**を導入しよう。3つの状態に対応して、 u -、 d -、 s -クォークと名付ける。対応 (1.18) に基づき、 $su(3)$ の weight 図から、アイソスピンの第3成分 I_3 とハイパーチャージ Y を与えて図示しよう (図 8)。左が基本 3-表現、右が 3^* -表現であり、 3^* -表現は基本表現の複素共役表現であるので、物理的には基本表現に属する粒子の反粒子を意味する。**反クォーク**を \bar{u} 、 \bar{d} 、 \bar{s} と書こう。

クォークの持つ電荷は、中野・西島・Gell-Mann の法則 (1.17) から決定される。クォークの電荷は素電荷 e を単位にして、分数になることが理解される。クォークについて量子数をまとめると、表のようになる。

導入したクォークは基本表現 (3次元表現) に属している。したがって、クォークはヤング図 \square で表される。バリオンは 8-表現と 10-表現が表れていた。基本表現のクォークから 8-表現や 10-表現を構成するには、(1.13)

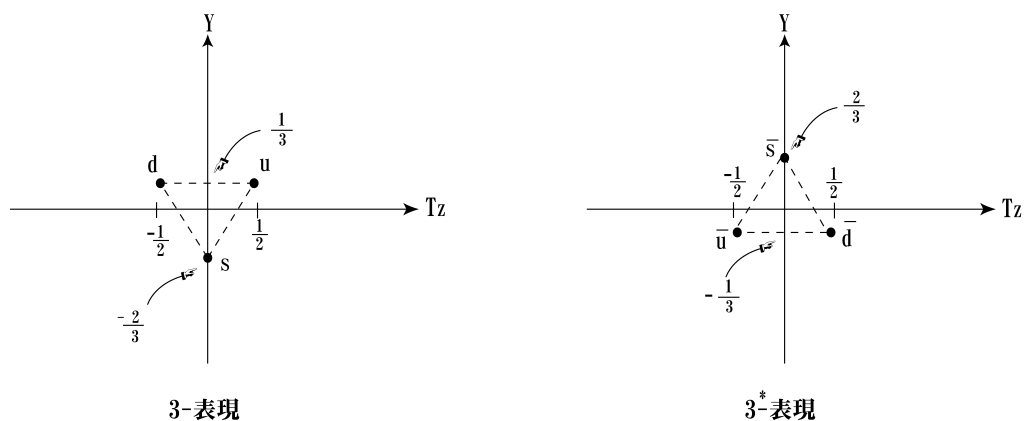


図 8:

*昇降演算子を用いる。

表 1:

クォーク	電荷 Q	Y	I	I_3	B	S
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0
s	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1

反クォーク	電荷 Q	Y	I	I_3	B	S
\bar{u}	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0
\bar{d}	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0
\bar{s}	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1

で見たように、少なくとも 3 つの基本表現の状態の積を考える必要がある。再掲しておこう。

$$\begin{array}{c}
 \square \otimes \square \otimes \square = \square \square \square \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 \text{状態数} \quad 3 \times 3 \times 3 = 10 + 8 + 8 + 1
 \end{array} \tag{1.19}$$

余分の 8-表現と 1-表現が現れてしまうが、確かに 10-表現と 8-表現は構成される。メソンについては 8-表現と 1-表現が現れなければならない。このためには、3-表現と 3*-表現の状態の直積を取ればよい。

$$\begin{array}{c}
 \square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\
 \text{状態数} \quad 3 \times 3 = 8 + 1
 \end{array} \tag{1.20}$$

もう一組 8-表現と 1-表現が必要であるが、これは次節で見ていこう。

バリオンはクォーク 3 個から、メソンはクォークと反クォークから構成されると考えると、分類された現実のハドロンを生み出すことができるという考えに導かれる。したがって、ハドロンはクォークや反クォークから構成される複合粒子であると考えよう。weight の対応から、ハドロンのクォークの構成が得られる。結果を表にしておこう。量子数が正しく生じていることは簡単に確認できるであろう。

バリオン					
$J = 1/2 :$	p	uud	$J = 3/2 :$	Δ^{++}	uuu
	n	udd		Δ^+	uud
	Λ	uds		Δ^0	udd
	Σ^+	uus		Δ^-	ddd
	Σ^0	uds		Σ^{*+}	uus
	Σ^-	dds		Σ^{+0}	uds
	Ξ^0	uss		Σ^{*-}	dds
	Ξ^-	dss		Ξ^{*0}	uss
				Ξ^{*-}	dss
		Ω^-	sss		

メソン					
$J = 0 :$	π^+	$u\bar{d}$	$J = 1 :$	ρ^+	$u\bar{d}$
	π^0	$u\bar{u}-d\bar{d}$		ρ^0	$u\bar{u}-d\bar{d}$
	π^-	$d\bar{u}$		ρ^-	$d\bar{u}$
	K^+	$u\bar{s}$		K^{*+}	$u\bar{s}$
	K^0	$d\bar{s}$		K^{*0}	$d\bar{s}$
	\bar{K}^0	$s\bar{d}$		\bar{K}^{*0}	$s\bar{d}$
	K^-	$s\bar{u}$		K^{*-}	$s\bar{u}$
	η	$u\bar{u}+d\bar{d}-2s\bar{s}$		ω	$u\bar{u}+d\bar{d}$
	η'	$u\bar{u}+d\bar{d}+s\bar{s}$		ϕ	$s\bar{s}$

§§1.8.4 フレーバー・スピン $su(6)$

バリオンでは 8 次元表現と 10 次元表現だけが現実の粒子に対応しており、クォーク 3 つから作ったときに、余分に 8 次元表現と 1 次元表現が出てしまった。またメソンでは、クォークと反クォークから 8 次元表現と 1 次元表現が出たが、現実にはもう 1 組、8 次元表現と 1 次元表現に属する粒子がある。

そこで、フレーバーの $su(3)$ 対称性に加えて、空間回転対称性であるスピン $su(2)$ 対称性も同時に考慮してみよう。 $su(3) \times su(2)$ で、 $su(6)$ 対称性を考えることにする。フレーバー $su(3)$ の状態を u 、 d 、 s で、またクォークはスピン 1/2 を持つので、スピン $su(2)$ の状態を上向きスピン \uparrow 、下向きスピン \downarrow で示すと、 $su(6)$ の状態を

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^\uparrow \\ u^\downarrow \\ d^\uparrow \\ d^\downarrow \\ s^\uparrow \\ s^\downarrow \end{pmatrix} = q^I \sim \square$$

と書いておこう。

$su(6)$ の基本表現は 6 次元になるので、クォーク 3 つからは、表現の次元の勘定に注意して*



$$\begin{array}{c} \square \otimes \square \otimes \square = \square \oplus \square \oplus \square \\ \text{状態数} \quad 6 \times 6 \times 6 = 56 + 70 + 70 + 20 \end{array} \quad (1.21)$$

ここで、状態の入れ替えに対して完全対称な 56 次元表現 \square だけ考えよう。これは $su(6)$ で書いた状態であるので、 $su(3)$ のフレーバー状態と $su(2)$ のスピン状態の内訳を見ておこう。次式の右辺の括弧の内、左

*Factor over Hook 則で計算できる。

がフレーバー $su(3)$ の状態を表し、右はスピン $su(2)$ の状態を表している。こうして

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)$$

となるように思えるが、右辺第3項のスピン $su(2)$ の状態は、2つの状態しかないので完全反対称な状態は  であり、3つの状態を完全反対称にはできない。したがって、 $su(2)$ では  は存在せず、右辺第3項は現れない。こうして正しくは、

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right)$$

$$\left(10, J = \frac{3}{2} \right) \quad \left(8, J = \frac{1}{2} \right)$$

$$56 = 10 \times \left(2 \cdot \frac{3}{2} + 1 \right) + 8 \times \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right)$$

となる。2行目に $su(3)$ の次元とスピン角運動量の大きさ J を記した。また、3行目は状態数を与えた[†]。こうして、 $su(6)$ 対称性を考え、完全対称な 56 次元表現をとると、バリオンの組がスピンまで含めて過不足なく現れることがわかる[‡]。

次に、クォークと反クォークからできているメソンを考えよう。 $su(6)$ の状態ではクォークは 6-表現、反クォークは 6*-表現に属することになるので、クォーク・反クォーク対は

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

状態数 $6 \times 6 = 35 + 1$ (1.22)

[†] $su(2)$ ではスピン J のとき状態数は $2J + 1$ であった。
[‡]70 次元表現などは、クォーク間の軌道角運動量が 0 でない励起状態として理解されている。

と規約分解される。フレーバー $su(3)$ とスピン $su(2)$ の内訳を見ておこう。

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \otimes \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \\
 = & \left[\begin{array}{c} \square \\ \square \otimes \square \\ \square \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} \square \\ \square \otimes \square \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \otimes \square \\ \square \end{array} \right] \otimes \left[\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \otimes \square \end{array} \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad [su(3)] \qquad \qquad [su(2)] \qquad \qquad [su(3)] \qquad \qquad [su(2)] \\
 = & \left\{ \left(\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \square \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \square \end{array} \right) \oplus \left(\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \square \end{array} \right) \right\} \oplus \left(\begin{array}{c} \square \square \\ \square \square \end{array}, \begin{array}{c} \square \square \end{array} \right) \\
 & \qquad \qquad \qquad (8, J=1) \qquad \qquad (8, J=0) \qquad \qquad (1, J=1) \qquad \qquad (1, J=0)
 \end{aligned}$$

ここで、2行目では $su(3)$ と $su(2)$ の状態それぞれで先に直積をとり、3行目では分配則を用いて、 $su(3)$ と $su(2)$ の組み合わせを示した。バリオンのもとと同様、今度もメソンが過不足無く現れることがわかる。また、 $su(6)$ で見たときの完全反対称状態である 1-表現は、フレーバーとスピンともに完全反対称に組まれた 3 行目の右辺最後の項であるフレーバー 1-表現、スピン 0 の状態に対応している。それ以外は 35-表現に属している。 $J=1$ のメソンは 35 次元表現の中に一緒に入っており、 $J=0$ のメソンは、 $su(6)$ の 35 次元表現に入るフレーバー $su(3)$ の 8 次元表現と、1 次元表現 (η' メソン) に分かれて出てくることがわかる。

§§1.8.5 カラー自由度

以上見てきたように、強い相互作用する素粒子であるハドロンの分類から、それらを構成する基本粒子であるクォークの存在が予想された。クォークと反クォークを考えると、ハドロンは過不足無く現れる様に見える。しかしながら、なぜ強い相互作用するハドロンはクォーク 3 つの (qqq) やクォーク・反クォークの ($\bar{q}q$) という状態でしか現れないのかは説明できていない。また、導入されたクォークはスピン 1/2 を持つフェルミ粒子であり、当然パウリの排他律に従うはずである。したがって、複数のクォークからなる状態は、完全反対称に組まれていなければならない。メソンの場合にはクォークと反クォークであったのでパウリ排他律から免れていたが、バリオンはクォーク 3 つから構成されているので、波動関数は完全反対称に組まれるべきである。然るに、我々はフレーバー・スピン $su(6)$ 対称性を考えた際に、完全対称な状態を用いることでバリオンを過不足なく説明した。これはクォークがフェルミオンであるという統計性に反する。

そこで、新たな自由度として**カラー自由度**を導入しよう[§]。カラー自由度は $su(3)_c$ 対称性を持つ[¶]。すなわちカラーの入れ替えに対して理論は不変であるとしよう。状態 (波動関数) はフレーバー、スピンに加えてカラーも指定される。

$$q^{(i,\alpha)a}, \quad i = u, d, s : \text{flavor}, \quad \alpha = \pm 1/2 : \text{spin}, \quad a = 1, 2, 3 : \text{color}$$

[§]“カラー”というのは名称であり、現実の可視光とは無関係である。

[¶] $su(3)_c$ の添え字 c は対称性がカラーであることを明確に示すためのものである。そこで、フレーバー $su(3)$ を $su(3)_f$ と書いたりする。

ここで重要な仮定をおく。ハドロンはカラー 1 重項 (1-表現) しか現れない。これをカラー (色) の閉じ込めと呼ぶ。したがって、カラー $su(3)_c$ では完全反対称なものしか現れないことになる。クォークはカラー \square を持ち、反クォークは反カラー $\bar{\square}$ をもつ。これらのものからカラー 1 次元表現 (カラー 1 重項) を構成する最も簡単な組み合わせはクォーク 3 つ $\square \otimes \square \otimes \square$ か、クォーク・反クォーク対 $\square \otimes \bar{\square}$ である。こうしてバリオンは (qqq) 、メソンは $(\bar{q}q)$ で現れることが理解される。

バリオンを考えよう。バリオンのカラー自由度は完全反対称 $\bar{\square}_c$ に組まれている。クォークはフェルミ粒子なので、3 つのクォークからなる系の状態はその 3 つの状態に対して完全反対称に組まれていなければならない。しかし、カラー自由度で既にクォークの入れ替えに対して完全反対称であるので、残りのスピン・フレーバーの自由度に対しては入れ替えに対して完全対称でなければならない。こうして、スピン・フレーバー $su(6)$ 波動関数 (状態) に対しては完全対称な 56-表現をとらなければならなかったのである。

§§1.8.6 応用例

$su(3)_f$ の破れと質量

たとえばバリオンの表を見てみよう。フレーバー $su(3)$ 対称性があるといっても、それぞれのバリオンの質量は少しずつ異なっている。これは $su(3)_f$ 対称性は完全に成り立っているのではなく、近似的に成り立っているからであると考えられる。そこで、対称性のあからさまな破れを考え、質量差を取り上げてみよう。

フェルミ粒子であるクォークの質量項は、クォークの場を q とすると $m\bar{q}q$ の形を持つはずである (§25)。ここで、 $\bar{q}q$ は反クォーク・クォークの変換性を持つとして、 $\bar{q}q$ は 8-表現、または 1-表現に属すると考えられる。ここで、1-表現では $su(3)$ 変換では変換しないので、8-表現であるとしよう。また、この項はクォークのフレーバー u 、 d 、 s について対角的であるので、 $T_8 (= H_2)$ に比例するとしよう。ここで、 H_2 は物理的にはハイパーチャージ Y に対応していたことを思いだそう ((1.18) 式)。質量差を ΔM で表しておく。10-表現に属するバ

リオンのある状態を $|\square\square\square\rangle$ と表しておく。 $\bar{q}q$ が 8-表現 $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$ の変換性を示すことから、質量差は

$$\begin{aligned} \Delta M &= \left\langle \square\square\square \left| \Delta M \times \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \right| \square\square\square \right\rangle \\ &= \Delta M \left\langle \square\square\square \left| \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix} \otimes \square\square\square \right\rangle \\ &= \langle 10 | 8 \oplus 10 \oplus 27 \oplus 35 \rangle \Delta M \\ &= \langle 10 | 10 \rangle \Delta M \end{aligned}$$

一方、 $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \end{smallmatrix}$ は H_2 に比例しているとし、 H_2 の固有値はハイパーチャージ Y に比例していたので、比例定数を a' としておくと

$$\left\langle \square\square\square \left| a' H_2 \right| \square\square\square \right\rangle = a' \frac{\sqrt{3}}{2} Y = aY$$

のようになる。新たに定数 a を定義した。こうして、両者を等値して

$$\Delta M = aY$$

が得られる。すなわち、10-表現に属するバリオンは、フレーバー $su(3)$ 対称性のあらわな破れにより、ハイパーチャージに比例した質量差を持つと結論される。定数 a があからさまに現れないようにして比較すると、例えば Ω^- 粒子の質量を M_{Ω^-} などと書くことにして、

$$M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*} = M_{\Xi^*} - M_{\Sigma^*} = M_{\Sigma^*} - M_{\Delta}$$

が成り立っているはずである。実験値と比較してみればよい。

崩壊比

10-表現に属するバリオンが、8-表現に属するバリオンとメソンに崩壊する過程を考えてみよう。フレーバーが変化するので、ここではフレーバーの部分のみあからさまに記し、スピン、カラーの量子数は省略する。例えば (ijk) の3つのクォークを“作る”演算子を D_{ijk}^\dagger などと表わすことにしよう。また、クォークの存在しない真空を $|0\rangle$ 、3つのクォーク状態を $|ijk\rangle$ などと記す。ここで、 $i, j, k = u, d, s$ のいずれかである。フレーバー $su(3)$ で10-表現に属するバリオンはフレーバーの入れ替えに対して完全対称 $\square\square\square$ であったので、 i, j, k を対称化する演算子を $\mathcal{S}(ijk)$ と記すと、

$$\begin{aligned} D_{ijk}^\dagger|0\rangle &= \mathcal{S}(ijk)|ijk\rangle \\ &= \frac{1}{6}(|ijk\rangle + |jik\rangle + |jki\rangle + |kji\rangle + |kij\rangle + |ikj\rangle) \end{aligned}$$

のようになる。規格化因子まで考慮して、10-次元バリオンを記述すると

$$\begin{aligned} D_{uuu}^\dagger|0\rangle &= |uuu\rangle = |\Delta^{++}\rangle \\ D_{uud}^\dagger|0\rangle &= D_{udu}^\dagger|0\rangle = D_{duu}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{3}(|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^+\rangle \\ D_{udd}^\dagger|0\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Delta^0\rangle \\ D_{ddd}^\dagger|0\rangle &= |ddd\rangle = |\Delta^-\rangle \\ D_{uus}^\dagger|0\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Sigma^{*+}\rangle \\ D_{usd}^\dagger|0\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{6}}|\Sigma^{*0}\rangle \\ D_{sdd}^\dagger|0\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Sigma^{*-}\rangle \\ D_{ssu}^\dagger|0\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Xi^{*0}\rangle \\ D_{ssd}^\dagger|0\rangle &= \dots = \frac{1}{\sqrt{3}}|\Xi^{*-}\rangle \\ D_{sss}^\dagger|0\rangle &= |sss\rangle = |\Omega^-\rangle \end{aligned}$$

と得られる。次に、8-表現に属するメソンを考えよう。メソンはクォークと反クォークからなり、それぞれの波動関数を $\chi_i, \bar{\chi}^j$ と記すと ($i, j, k = u, d, s$)、8-表現のメソンの波動関数 χ_i^j は

$$\chi_i^j = \bar{\chi}^j \chi_i - \frac{1}{3} \delta_i^j \sum_{k=1}^3 \bar{\chi}^k \chi_k$$

と書かれる。ここで、右辺第2項は χ_i^j のトレース (対角成分の和) が零になるための項であり、こうして、メソンは独立な $8(=3 \times 3 - 1(\text{トレースレス}))$ 成分を持ち得る。数式で表わすには、 i フレーバーのクォーク

$\chi_i \sim \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = |i\rangle$ 、 j フレーバーの反クォーク $\bar{\chi}^j \sim \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} = \epsilon^{jkl}|kl\rangle$ から、8重項のメソン M は、メソンを作る演算子を $M_i^{j\dagger}$ として

$$M_i^{j\dagger}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon^{jkl}|ikl\rangle - \frac{1}{3}\delta_i^j \epsilon^{mkl}|mkl\rangle \right)$$

と表わされる。8重項のバリオン B も同様に、 B を作る演算子を $B_i^{j\dagger}$ として M と同様の表式で書ける。こうして、

$$M_i^{j\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}^\dagger$$

と書ける。ここで、右辺の行列の肩の \dagger は、ハドロンを生成する演算子であることを意味している。同様に、バリオン8重項は

$$B_i^{j\dagger} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}^\dagger$$

と書ける。

さて、10重項のバリオン D が8重項のメソン M とバリオン B に崩壊するとしよう。この素粒子反応のハミルトニアンを対称性から書き下そう。ハミルトニアンはフレーバー $su(3)$ の変換で変換されてはいけない。すなわち、1-表現 (1重項) の形を持たなければならない。そのためにはメソン8-表現とバリオン8-表現から

10-表現の複素共役表現である 10^* -表現 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ を作り、これとバリオン10-表現 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ を反対称化し

て1-表現 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ を構成する。こうして、相互作用ハミルトニアン H_{int} は

$$H_{int} = g \left[\epsilon_{klm} M_i^{l\dagger} B_j^{m\dagger} D^{ijk} + \epsilon^{klm} D_{ijk}^\dagger B_l^i M_m^j \right] \quad (1.23)$$

と表わされる。ここで、 \dagger のつかないものはハドロンの消滅演算子であり、第1項は D が消滅して B 、 M が生成される10次元バリオンの崩壊過程を、第2項は第1項にエルミート共役な部分で、 B と M から D が生成される逆過程を表わしている。相互作用の強さを g とした。

準備が整ったので、崩壊比の1例として Δ^{++} 粒子が π^+ と p に崩壊する割合と、 Σ^{*+} 粒子が π^+ と Σ^0 に崩壊する割合の比を求めてみよう。(1.23) でこれらの反応を表わす部分だけ抜き出してみよう。

$$\begin{aligned} H_{int} &= g(\cdots \\ &\quad -B_1^{3\dagger} M_1^{2\dagger} D^{111} \quad \Leftrightarrow \quad -p^\dagger (\pi^+)^\dagger \Delta^{++} \\ &\quad +B_1^{1\dagger} M_1^{2\dagger} D^{113} \quad \Leftrightarrow \quad + \left(\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \right)^\dagger (\pi^+)^\dagger \frac{\Sigma^{*+}}{\sqrt{3}} \\ &\quad -B_1^{2\dagger} M_1^{1\dagger} D^{113} \quad \Leftrightarrow \quad -(\Sigma^+)^\dagger \left(\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} \right)^\dagger \frac{\Sigma^{*+}}{\sqrt{3}} \\ &\quad +\cdots) \end{aligned}$$

したがって、

$$\langle p\pi^+ | H_{int} | \Delta^{++} \rangle = -g, \quad \langle \pi^+ \Sigma^0 | H_{iny} | \Sigma^{*+} \rangle = \frac{g}{\sqrt{6}}$$

が得られる。よって、崩壊比は振幅の絶対値の2乗を比較して

$$\frac{|\langle p\pi^+ | H_{int} | \Delta^{++} \rangle|^2}{|\langle \pi^+ \Sigma^0 | H_{iny} | \Sigma^{*+} \rangle|^2} = 6$$

と得られる。

(問) $\pi^0 p \rightarrow \Delta^+$ と $K^- p \rightarrow \Sigma^{0*}$ の反応比を求めよ。

§ 1.9 ゲージ理論

前節で、クォークには“色”の自由度があることがわかった。実際にはこの色の自由度の間に相互作用が働く。この相互作用は強い相互作用と呼ばれており、 $su(3)$ 対称性を持つ。従って、この対称性を頼りにクォークの力学を構成すればよい。ここでは、ゲージ対称性を基礎において、ゲージ場の力学を構成しよう*

§§1.9.1 $u(1)$ ゲージ理論—電磁場の場合—

簡単のために非相対論的な量子力学で見ていこう。途中で得られる手続きは相対論の場合にも有効である。まず、波動関数 $\psi(x)$ を考えよう。ここで $x = (t, \mathbf{x})$ を意味する。シュレーディンガー方程式は†

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\theta} \psi(x)$$

と位相変換しても不変である。しかしながら、全時空間で同じ位相だけ回転させたときだけ理論は不変であることを要請するには対称性として強すぎると考えられる。そこで、各時空点で独立に位相変換を施す。

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\tilde{\theta}(x)} \psi(x) = e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x)$$

ここで、 q というパラメータと \hbar をあらかじめ含ませておいた。この変換のもとでシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \right) \psi(x)$$

は明らかに不変ではない。実際、変換後、右辺第2項は変わらないが、微分項では

$$(\text{左辺}) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x) \right) = e^{iq\theta(x)/\hbar} \left(i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} - q \frac{\partial \theta(x)}{\partial t} \psi(x) \right)$$

$$(\text{右辺の運動量の作用}) = \hat{\mathbf{p}} \left(e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x) \right) = e^{iq\theta(x)/\hbar} (\hat{\mathbf{p}}\psi + q\nabla\theta(x)\psi(x))$$

のように余分が生じ、シュレーディンガー方程式は不変にならない。そこで、余分なものが消えるように別の場 $(\phi(x), \mathbf{A}(x))$ が存在し、その場も変換 $\psi(x) \longrightarrow e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x)$ に伴って変換を受けるとしよう。時間微分から生じる余分を打ち消すように、場 ϕ をシュレーディンガー方程式の右辺に q を乗じて加え、場 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) - \frac{\partial \theta(x)}{\partial t}$$

*本節では $c=1$ の単位系を取る。ここで、 c は光速である。

†相対論的には $\psi(x)$ をクライン・ゴルドン方程式を満たすもの、あるいはディラック方程式を満たすものと考えればよい。以下の議論でほとんど変更は生じない。

と変換するとする。場 ϕ を加えることは、時間微分を

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x)$$

と置き換えることに対応する。このとき、確かに

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q\phi(x) \right) \psi(x) &\longrightarrow \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - q \left(\phi(x) - \frac{\partial\theta(x)}{\partial t} \right) \right) (e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x)) \\ &= e^{iq\theta(x)/\hbar} \left(i\hbar \frac{\partial\psi(x)}{\partial t} - q\phi(x)\psi(x) \right) \end{aligned} \quad (1.24)$$

となり、元に戻る。

一方、運動量演算子の作用による空間微分から生じる余分を消すように、運動量演算子を場 $\mathbf{A}(x)$ に q を乗じたものだけずらし、場 $\mathbf{A}(x)$ は

$$\mathbf{A}(x) \longrightarrow \mathbf{A}(x) + \nabla\theta(x)$$

と変換するものとする。このとき

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(x)) \psi(x) &\longrightarrow (\hat{\mathbf{p}} - q(\mathbf{A}(x) + \nabla\theta(x))) e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x) \\ &= e^{iq\theta(x)/\hbar} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(x)) \psi(x) \end{aligned}$$

のようにして、元に戻る。もう一度 $\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(x)$ を作用させても同じである。

整理しておく

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow e^{iq\theta(x)/\hbar} \psi(x) \quad \text{と変換したとき} \\ \begin{cases} i\hbar \frac{\partial\psi(x)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x) \\ \hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}(x))^2 + V(x) + q\phi(x) \end{cases} \end{aligned}$$

は、不変である。ただし

$$\begin{cases} \phi(x) \longrightarrow \phi(x) - \frac{\partial\theta(x)}{\partial t} \\ \mathbf{A}(x) \longrightarrow \mathbf{A}(x) + \nabla\theta(x) \end{cases}$$

場 $A^\mu(x) = (\phi(x), \mathbf{A}(x))$ の変換は 4 元形式で

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x)$$

と簡潔に表わされる。ここで得られたハミルトニアンは §11.3 で得られたものと同じである。場 $(\phi(x), \mathbf{A}(x))$ は電磁場を表わしており、場 $\psi(x)$ 及び $(\phi(x), \mathbf{A}(x))$ の変換を **ゲージ変換** と呼ぶ。理論はゲージ変換の下で不変である。電磁場の場合、 $\psi(x)$ の変換は $e^{i\theta(x)}$ による位相変換であり、この変換は $U(1)$ 群を成す。したがって、電磁気学は $U(1)$ 変換に対して不変であり、 $u(1)$ -ゲージ理論である。電磁場自身の運動方程式が必要であるが、これは次の $su(N)$ -ゲージ理論でより一般的に構成することにしよう[‡]。

§§1.9.2 非可換ゲージ理論— $su(N)$ ゲージ対称性を持つ場合—

物質場 $\psi_i(x)$ が群 G のもとで変換

$$\psi'_i(x) = \sum_j U_i^j(x) \psi_j(x) = [\exp(ig\theta^a(x)T_a)]_i^j \psi_j(x) \quad (1.25)$$

[‡] $N = 1$ のときが $u(1)$ ゲージ理論になる。

という変換を受けるとしよう。ここで、繰り返す添え字については和を取る。ここで、 T_a は群 G に対応するリー代数の生成子である。また、 a は群の次元まで和をとる。 i, j は群の表現空間の次元まで和をとる。群 G は $SU(N)$ 群としよう。例えば、 $SU(3)$ 群の時には $a = 1, 2, \dots, 8$ であり、物質場が基本表現 (3 次元表現) に属していれば $i, j = 1, 2, 3$ となる。このゲージ変換に対して理論は不変であることを要請しよう。この要請は **ゲージ原理** と呼ばれる。前節で見たように、局所変換[§] の場合には **ゲージ場** $A_\mu^a(x)$ の導入が不可欠である。そこで、 $x \rightarrow x + dx$ の“平行移動”により、 $\psi_i(x)$ は $\psi_{\parallel i}(x + dx)$ になるとしよう。一般相対論を構成したときと同様に、 dx は微小なので平行移動後の場と元の場との差は dx に比例しているとして良からう。また、場の大きさ自身にも比例する。こうして、

$$\psi_{\parallel i}(x + dx) = \psi_i(x) + igA_{\mu i}^j(x)\psi_j(x)dx^\mu \quad (1.26)$$

と書けるであろう。ここで、行列 $(A_\mu)_i^j$ が、点 x^μ から $x^\mu + dx^\mu$ へ移動したときの“内部空間” $\{j\}$ の“回転”を指定している。 A_μ がゲージ場であり、一般相対論のところで見られた接続 Γ に対応している。 $A_\mu(x)$ は群 G に対応するリー代数 \mathcal{G} の生成子の線形結合で書けることが期待されるので、

$$[A_\mu(x)]_i^j = \sum_{a=1}^{\dim G} A_\mu^a(x) [T_a]_i^j$$

と表わされる。こうして、ゲージ場 $A_\mu^a(x)$ は群 G の次元だけの成分を持つことが理解される[¶]。

さて、行列表記を取っていると考えると、場 $\psi_i(x)$ の添え字 i 等を省略しよう。今、 $x + dx$ にある場の差

$$\begin{aligned} \psi(x + dx) - \psi_{\parallel}(x + dx) &= (\partial_\mu \psi(x) - igA_\mu(x)\psi(x))dx^\mu \\ &= D_\mu \psi(x)dx^\mu \end{aligned}$$

を考えよう。1 行目右辺へは $\psi_{\parallel}(x)$ を代入して dx^μ が微小として展開の 1 次までとった。また、 D_μ を定義している。左辺は $x + dx$ での量なので $U(x + dx)$ で変換される。変換後の量に '(プライム) を付けて表わすと^{||}上の式は

$$U(x + dx)(\psi(x + dx) - \psi_{\parallel}(x + dx)) = U(x + dx)(D_\mu \psi(x)dx^\mu)$$

となるが、左辺は

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \psi'(x + dx) - \psi'_{\parallel}(x + dx) = (\partial_\mu \psi'(x) - igA'_\mu(x)\psi'(x))dx^\mu \\ &= (D'_\mu \psi)'(x)dx^\mu = D'_\mu(x)\psi'(x)dx^\mu = D'_\mu(x)U(x)\psi(x)dx^\mu \end{aligned}$$

となり、右辺は $U(x + dx)$ を x について展開し、 dx の 1 次までとると

$$(\text{右辺}) = U(x + dx)D_\mu \psi(x)dx^\mu = U(x)D_\mu \psi(x)dx^\mu$$

となる。両辺等値すると、 $D'_\mu(x)$ の変換が得られる。

$$\begin{aligned} D'_\mu(x) &= \partial_\mu - igA'_\mu(x) \\ D'_\mu(x) &= U(x)D_\mu(x)U(x)^{-1} \end{aligned} \quad (1.27)$$

ここで、 $U(x) = e^{ig\theta^a(x)T_a}$ 、 $A'_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_a$ であった。この $D'_\mu(x)$ を **共変微分** と呼ぶ。こうして、 $D'_\mu(x)$ の変換から、ゲージ場 $A_\mu(x)$ のゲージ変換が導かれる。

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \quad (1.28)$$

[§]変換のパラメータ $\theta(x)$ が時空座標 x に依存している場合をいう。

[¶] $U(1)$ の場合には $a = 1$ のみであり、これが電磁場 $A_\mu(x) = (\phi(x), \mathbf{A}(x))$ であった。

^{||} $U(x)\psi(x) = \psi'(x)$ などとするとということ。

次に、 $x \rightarrow x + dx + dy$ への平行移動を、(1) $x \rightarrow x + dx \rightarrow x + dx + dy$ (2) $x \rightarrow x + dy \rightarrow x + dx + dy$ の2通りの方法で考えよう。平行移動を繰り返すと、

$$(1) \quad x \rightarrow x + dx$$

$$\psi_{\parallel}(x + dx) = \psi(x + dx) - D_{\mu}(x)\psi(x)dx^{\mu}$$

$$x + dx \rightarrow x + dx + dy$$

$$\begin{aligned} \psi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) &= \psi_{\parallel}(x + dx + dy) - D_{\nu}(x + dx)\psi_{\parallel}(x + dx)dy^{\nu} \\ &= \psi(x + dx + dy) - D_{\mu}(x + dy)\psi(x + dy)dx^{\mu} \\ &\quad - D_{\nu}(x + dx)\psi(x + dx)dy^{\nu} + D_{\nu}(x + dx)D_{\mu}(x)\psi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned}$$

$$(2) \quad x \rightarrow x + dy$$

$$\psi_{\parallel}(x + dy) = \psi(x + dy) - D_{\nu}(x)\psi(x)dy^{\nu}$$

$$x + dy \rightarrow x + dx + dy$$

$$\begin{aligned} \psi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) &= \psi_{\parallel}(x + dx + dy) - D_{\mu}(x + dy)\psi_{\parallel}(x + dy)dx^{\mu} \\ &= \psi(x + dx + dy) - D_{\nu}(x + dx)\psi(x + dx)dy^{\nu} \\ &\quad - D_{\mu}(x + dy)\psi(x + dy)dx^{\mu} + D_{\mu}(x + dy)D_{\nu}(x)\psi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned}$$

辺々差をとると、 $dx dy$ の次数までで

$$\Delta\psi(x) = \psi_{\parallel}^{\parallel}(x + dx + dy) - \psi_{\parallel}^{\parallel}(x) = [D_{\mu}(x), D_{\nu}(x)]\psi(x)dx^{\mu}dy^{\nu}$$

が得られる。両辺 $U(x + dx + dy)$ で変換するが、 $dx dy$ の次数までで $(\Delta\psi)'(x) = U(x + dx + dy)\Delta\psi(x) = U(x)\Delta\psi(x)$ となるので、上式と比較して、

$$\begin{aligned} (\Delta\psi)'(x) &= U(x)\Delta\psi(x) = U(x)[D_{\mu}(x), D_{\nu}(x)]\psi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \\ &= U(x)[D_{\mu}(x), D_{\nu}(x)]U^{-1}(x) \cdot U(x)\psi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D_{\mu}(x), D_{\nu}(x)] \\ &= \partial_{\mu}A_{\nu}(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}(x) - ig[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x)] \end{aligned} \quad (1.29)$$

を導入しよう。 $F_{\mu\nu}$ の変換性は D_{μ} の変換性 (1.27) より

$$F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \quad (1.30)$$

となることがわかる。こうして、先の式は

$$\begin{aligned} \Delta\psi(x) &= -igF_{\mu\nu}\psi(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \\ (\Delta\psi)'(x) &= -igF'_{\mu\nu}\psi'(x)dx^{\mu}dy^{\nu} \end{aligned}$$

となる。

ところで、 $F_{\mu\nu}$ は A_{μ} で書けているので、リー代数 \mathcal{G} の生成子 $\{T_a\}$ の線型結合で表わされる。

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \sum_{a=1}^{\dim G} F_{\mu\nu}^a(x)T_a \\ F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_{\mu}A_{\nu}^a(x) - \partial_{\nu}A_{\mu}^a(x) + gf_{abc}A_{\mu}^b(x)A_{\nu}^c(x) \end{aligned} \quad (1.31)$$

ここで、2行目は(1.29)から交換関係を計算し直接得られる。ここで、 f_{abc} はリー代数 \mathcal{G} の構造定数である。この $F_{\mu\nu}(x)$ 、または $F_{\mu\nu}^a(x)$ を場の強さ (field strength) と呼ぶ。

以上の準備より、ゲージ不変なラグランジアン密度を構成することができる。物質場のゲージ変換性は(1.25)、共変微分のゲージ変換性は(1.27)、場の強さの変換性は(1.30)となることがわかっている。これらをもとに、ゲージ場が無いときには§25.1で得られた相対論的粒子の運動方程式がオイラー・ラグランジュ方程式として導かれるラグランジアン密度を与えればよい。ゲージ不変性に注意すると、物質場を複素スカラー場 φ 、またはディラック場 ψ として、物質場及び物質場とゲージ場との相互作用項を含むラグランジアン密度の部分を $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ とし、ゲージ場自身のラグランジアン密度を $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ と記すと

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{matter}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} & (1.32) \\ \mathcal{L}_{\text{matter}} &= \begin{cases} (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - V(\varphi^\dagger \varphi) & (\text{複素スカラー場}) \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi & (\text{ディラック場}) \end{cases} \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{N} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。トレースはゲージ群 G の行列添え字について取る。ゲージ変換性(1.25)、(1.27)、(1.30)に注意すると、上記のラグランジアン密度のゲージ不変性は明らかである。また、共変微分 D_μ 、場の強さ $F_{\mu\nu}$ または $F_{\mu\nu}^a$ は(1.27)、(1.29)、(1.31)で定義されている。特に、ゲージ場を $u(1)$ ゲージ場、物質場をディラック場にとったものが量子電気力学 (QED) と呼ばれる。また、ゲージ場をカラー $su(3)_c$ ゲージ場、物質場を $su(3)_c$ の基本表現に属するディラック場にとったものを量子色力学 (QCD) と呼ぶ。QCD ではゲージ場は $su(3)$ の次元の数、8個有り、この場をグルオン場と呼ぶ。ゲージ変換性(1.27)から、グルオン場は $su(3)_c$ の随伴表現に従うことがわかる。基本表現のディラック場はクォークを記述する。

このように、ゲージ原理に基づき、電磁相互作用、強い相互作用は記述される。相互作用を伝えるのがゲージ場であるゲージ粒子である。電磁相互作用を伝えるゲージ粒子は光子、強い相互作用を伝えるゲージ粒子はグルオンである。また、弱い相互作用は電磁相互作用と統一され、 $su(2) \times u(1)$ ゲージ理論としての電弱理論として理解されている。弱い相互作用を伝えるゲージ粒子は W^\pm 、 Z^0 と書かれる。