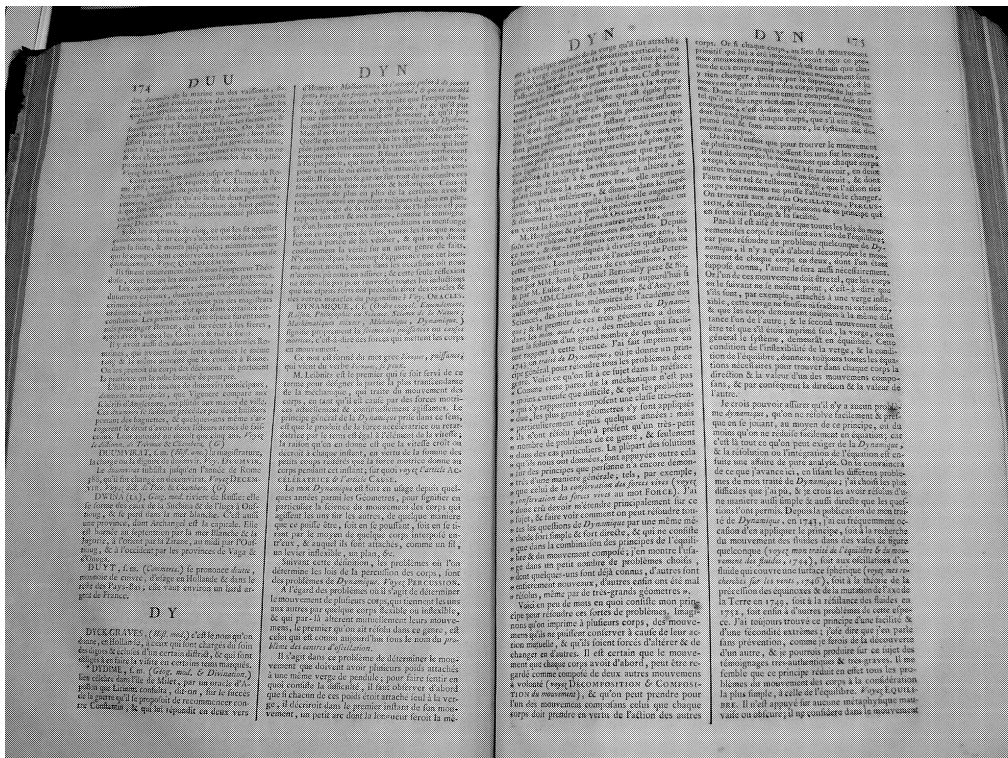


物理学概論 I



「百科全書（初版）」Dynamique（動力学）の頁（高知大学附属図書館蔵）

高知大学理学部理学科物理科学

津江保彦*

*ホームページは、<http://www.cc.kochi-u.ac.jp/~tsue/>

目次

1 章	はじめに	2
§1.1	ニュートンの登場 (1687:プリンピキア) までに知られていたこと	2
§§1.1.1	ケプラー (Kepler) の発見	2
§§1.1.2	ガリレオ (Galileo) の発見	3
2 章	ニュートンの法則	5
§2.1	ニュートンの三法則	5
§2.2	万有引力	6
§§2.2.1	惑星運行の観測事実と地表面近傍での重力	6
§2.3	単位系	8
3 章	ニュートン力学の数学的扱い	9
§3.1	位置と座標系	9
§3.2	ベクトルの演算	10
§3.3	微分係数としての速度・加速度	11
4 章	微分方程式としてのニュートンの第 2 法則—運動方程式—	12
§4.1	運動方程式	12
§§4.1.1	地表付近での物体の上下方向の運動	12
§§4.1.2	単振り子	12
§§4.1.3	大気から速さ v に依存した抵抗を受けて自由落下する質点	14
§§4.1.4	演習問題	15
5 章	保存則	17
§5.1	運動量保存則	17
§§5.1.1	慣性中心	17
§5.2	中心力と角運動量保存則	18
§§5.2.1	中心力	18
§§5.2.2	角運動量保存則	18
§5.3	保存力と力学的エネルギー保存則	19
§§5.3.1	保存力	19
§§5.3.2	エネルギー保存則	19
§5.4	対称性と保存則	20
6 章	中心力の問題	22
§6.1	角運動量保存則の役割	22
§6.2	中心力場のもとでの運動	23
§6.3	ケプラー問題	25
§6.4	潮の満ち干き	27

7 章 振動	29
§ 7.1 単振動	29
§ 7.2 減衰振動	30
§ 7.3 強制振動	32
§ 7.4 摩擦のあるときの強制振動	34
8 章 粒子の散乱	35
§ 8.1 2 体問題と換算質量	35
§ 8.2 散乱角	36
§ 8.3 散乱断面積	37
§ 8.4 ラザフォード散乱	38
9 章 流体の運動方程式	40
§ 9.1 流体の運動方程式	40
§ 9.2 完全流体の場合	41
10 章 波動現象	42
§ 10.1 波動方程式	42
§ 10.2 振動数・波長	43
§ 10.3 音波	44

1 章 はじめに

§ 1.1 ニュートンの登場 (1687: プリンピキア) までに知られていたこと

§§1.1.1 ケプラー (Kepler) の発見

デンマーク、ウラニボリ天文台で天文観測を続けていたティコ・ブラーエ (1546-1601) は、惑星運行の『観測』データを 1576 年から 1596 の 20 年にわたって蓄積していた。そこでは、地球から見た太陽と惑星の位置が記されている。この観測データから太陽系像を数学的に構築できなかったが、弟子となったケプラーにより解析される。

ヨハン・ケプラー (1571-1630) はティコ・ブラーエの火星に関する観測データを与えられ、地球と火星の軌道・運行速度を解析した。ケプラーがまず発見したことは

- (0) 火星の軌道面と地球の軌道面の交線上に太陽がある … 太陽が太陽系の中心にあること。
- (1) 火星の軌道は楕円であり、太陽はその焦点にある。
- (2) 面積速度は一定である。

ということであった。後にケプラーの法則として纏まることになる。

(第 1 法則) すべての惑星は太陽を焦点とする楕円上を運行する。[1609 年]

(第 2 法則) 動径 (太陽と惑星を結ぶ線分) が単位時間に掃く面積は一定である。[1609 年]

(第 3 法則) 惑星の公転周期の 2 乗は軌道の大きさ (長径) の 3 乗に比例する。[1619 年]

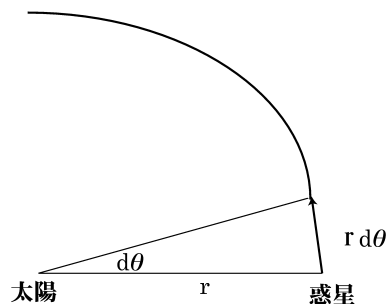


図 1:

ケプラーが如何にしてケプラーの法則に到達したか、紹介しておこう。

◎ケプラーの計算方法

1. S、E、M が一直線に並ぶときをデータから見つけ、このときの時刻を t_0 [s] とする。このとき、E は E_0 にいるとする。
2. 687 日 (火星の周期) 後 (時刻 t_1 [s] とする) の E の位置を E_1 とする。角度 $\theta_1 = \angle E_0SE_1$ はデータからわかる。角度 $\phi_1 = \angle SE_1M$ もデータからわかる。
3. 三角形 MSE_1 の形はこれでわかった。よって、長さ $\overline{SE_1}$ [m] は $\overline{SM}$ [m] 単位でわかる。
4. 同様に、687 日後 (時刻 t_2 [s] とする) にも $\overline{SE_2}$ [m] が $\overline{SM}$ [m] 単位でわかる。
5. これを続けると、軌道の形はわかる。 $\implies$ 第 1 法則へ。

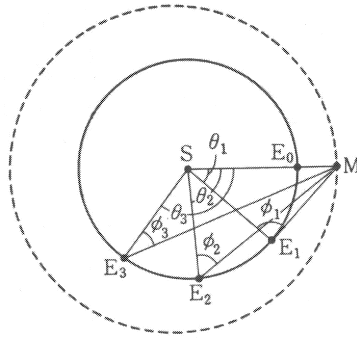


図 2: S・・太陽、E・・地球、M・・火星（朝永振一郎「物理学とは何だろうか」岩波新書より）

6. $E_0, E_1, E_2, \dots$ がわかったので、対応する時刻 $t_0, t_1, t_2, \dots$ から 365(地球の 1 周期) の適当な整数倍を引くことにより、太陽を 1 週する過程での地球の通過日時がわかる。よって、軌道上の地球の位置と通過日時から、地球の運行速度が $\overline{SM}$ 単位でわかる。 $\Rightarrow$ 第 2 法則へ。
7. E と M の役割を入れ替えて、365 日毎に M の位置を決めていく。すると、今までやったのと同様に、M の軌道、運行速度が $\overline{SM}$ 単位でわかる。
8. 軌道の大きさの比がわかる。公転周期はわかっている。 $\Rightarrow$ 第 3 法則へ。

最後に、ケプラーの第 3 法則を観測から確かめておこう。

	軌道長半径 a [天文単位]	周期 T [太陽年]	a^3/T^2
水星	0.3871	0.2409	0.9995
金星	0.7233	0.6152	0.9998
地球	1.0000	1.0000	1.0000
火星	1.5237	1.8809	0.9999
木星	5.2026	11.862	1.0008
土星	9.5549	29.438	1.0052

§§1.1.2 ガリレオ (Galileo) の発見

イタリアのガリレオ・ガリレイは、数々の発見をするが、ここでは後に必要となる振り子の等時性と等加速度運動を紹介しておく。

振り子の等時性とは、振り子の周期が振幅に依らないことを言う[†]。

次に、等加速度運動の発見について見ておこう。図 3 のように、斜面を転がる球の進む距離は、最初の単位時間に進んだ距離を 1 とすると、引き続き単位時間に進む距離は 3、引き続き 5、7、9... と進んでいくことが、ガリレオにより実験事実として認められた。これを数式で表現すると、単位時間 $t = 1$ に進む距離を $a/2$ として、時刻 t に進む距離 s は、

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

[†]ガリレオが 19 歳の時、教会のシャンデリアが風に揺れているのを見て発見したと言われている。

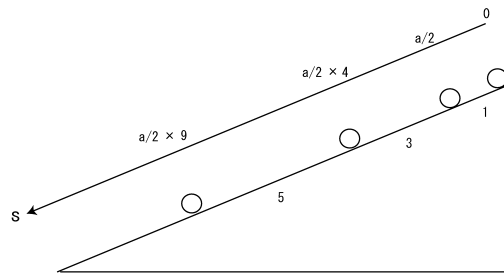


図 3:

と表すことができる。ここで、 a は定数であり、動いた距離を時間で微分したものが速度 v 、すなわち $v = \frac{ds}{dt} = at$ であり、さらに速度の時間変化率 $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = a$ は加速度である。加速度が一定のこの運動を**等加速度運動**と呼ぶ。斜面の傾きを 90° にすると、物体の自由落下になる。このときの加速度はおおよそ 9.8 m/s^2 であり、**重力加速度**と呼び、 g と書く。

最後に、**相対性原理**を認識していたことに触れておこう。当時の天動説の有力な論拠として、大地が動くなから、高い塔から石を落としたときには石が着地するまでに大地は動き、塔の根本に落ちないはずである、ということが言われていた。ガリレオは投射体の実験からの推論から、一定速度で動く船のマストの上から物体を落下させたときのことを想像し、マストの上から落とした物体は常にマストの根本に落ちるはずと反論し、天動説の論拠を崩した。すなわち、大地が運動しているかどうかは落体運動の結果からはわからないということである。言い換えると、物体が新たな運動を得るとき、その運動はもとの慣性運動に影響を与えることなく合成されるので、慣性運動を共にしている観測者には新たな運動しか見えない、ということになる。この事実は**(ガリレイの) 相対性原理**と呼ばれる。

2章 ニュートンの法則

§ 2.1 ニュートンの三法則

ケプラー、ガリレイの発見した運動を、より基本的な（少数の）法則から理解することを求めよう。

まず、数学的定式化の第一歩として、ある物体の運動を記述するとき、その大きさが無視できる物体のことを考える。これを**質点**と呼ぶ。

アイザック・ニュートンは、次の3つの法則を基本法則と考えた。

第1法則 (慣性の法則)	すべての物体は、外力によって強制されない限り、静止の状態、または直線上の様な運動の状態（等速直線運動）を続ける。
第2法則 (運動の法則)	物体の運動（量）の変化は、作用する力の大きさに比例し、力の向きにおこる。 $F = m a$ （力）＝（慣性質量）×（加速度）
第3法則 (作用・反作用の法則)	作用には反作用を伴い、2物体相互の作用は常に大きさが等しく、逆向きである。

法則1は、ガリレイの慣性の法則を精密化したものであり、**慣性系**が存在することを述べている。また、“物体は**慣性**を持つ”ことをも意味する

法則2は法則1を受けて、“運動の変化”と“力”を定量的に結んでいる。すなわち、法則1が成り立つ“慣性系”において法則2は成り立つ。また、物体に働く力は同じでも、“運動形態”には様々なものがあり得ることを暗示している。すなわち、運動形態の多様性は力の多様性に依るという考え方は否定される。ここで、**慣性質量**と**力**は第2法則から導けるかについて考察しておこう。2物体間に働く力の大きさを f [N] とすると[‡]、第2法則から、力の向きまで考慮すると

$$f = m_0 a_0, \quad -f = m_1 a_1$$

となる。ここで、負符号は力の向きが反対であることを意味する。したがって、慣性質量 m_1 [kg] は m_0 [kg] を単位質量として

$$m_1 = \left| \frac{a_0}{a_1} \right| m_0$$

と表わすことができる。**加速度** a_0 [m/s²]、 a_1 [m/s²] は、「時計」と「物差し」で測れるので、すべての物体の慣性質量は m_0 [kg] を単位に測定できることになる。慣性質量が定義できるので力 f は $f = ma$ [kg m/s²] で決められる。

法則3は法則1とあわせると、幾つかの物体からなる系の“慣性中心（重心）”は静止、または一様な直線運動をすることを示すことができる。体系内の物体同士の相対運動は慣性中心の運動に無関係であることを意味する。これは、ガリレイの相対性原理そのものである。

[‡]単位については §2.3 を見よ。

§ 2.2 万有引力

運動の 3 法則によって、ケプラーの発見した惑星運動の法則を記述するには、物体間に働く「力の法則」が必要になる。ニュートンは**万有引力の法則**として、**重力質量**を持つ物体間に普遍的に働く力を導入した。

万有引力の法則	重力質量を持つ 2 つの物体間には、両者を結ぶ直線の方に、両物体の重力質量の積に比例し、距離の 2 乗に反比例する引力が働く。
---------	---

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2.$$

ここで、 m_1 [kg]、 m_2 [kg] は 2 物体それぞれの重力質量[§]、 r [m] は 2 物体間の距離、 G は万有引力定数と呼ばれる定数である。

§§2.2.1 惑星運行の観測事実と地表面近傍での重力

惑星運動の観測事実から、質量を持つ 2 物体間に働く万有引力、すなわち**重力**を求めておこう。惑星運動の観測事実を分析することにより、惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くこと、太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に掃いていく面積は常に一定であること、惑星の公転周期の 2 乗と軌道の長半径の 3 乗の比は全ての惑星に於いて等しいこと、の 3 つの事実が成立していることが発見された。2 つめの事実は後に述べる角運動量の保存に他ならないのであるが、3 番目の事実を用いて、2 物体間に働く力を導く。また、惑星は楕円軌道を描いているが、円も楕円の一種であるので、計算の簡単さのため、惑星は円軌道を描くものとする。また、惑星に比べて太陽の質量は大きいので、太陽を固定して考えておく。

太陽の質量を $M_\odot$ [kg]、惑星の質量を m [kg] とする。太陽と惑星間の距離（中心距離、または軌道の大きさ）を r [m] とすると、図 4 のように

$$\overline{AB}^2 = (s + r)^2 - r^2 \text{ (ピタゴラスの定理)} = 2sr + s^2$$

が成り立つ。一方、惑星の速さを v [m/s] とすると、時間 t [s] に惑星は $\overline{AB} = vt$ だけ進む。ここで、図 4 の s [m] は小さいので s^2 を無視すると

$$(vt)^2 \approx 2sr$$

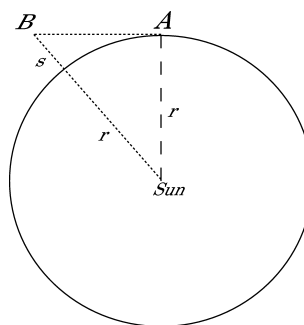


図 4:

[§]第 2 法則に現れる「慣性質量」は、物体の“動きにくさ（慣性の大きさ）”を表す量であり、一方、万有引力の法則に現れる「重力質量」は物体間に働く“力の大きさ”を決める量であり、本来無関係なものである。しかし、実験によると、これらの 2 つの量の比はすべての物体で等しいので、この比を 1 に取って両者を区別しないことにする。アインシュタインは 1915 年に、慣性質量と重力質量が同じものであるという「等価原理」のもとで、一般相対性理論を組み立てた。

となる。等加速度運動より、加速度を a [m/s²] として、時間 t に進む距離 s は前節 §§1.1.2 より

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

となるが、上の 2 式から s を消去して

$$a = \frac{v^2}{r}$$

と、中心へ向かう加速度 (**向心加速度**) が求められる。惑星が太陽のまわりを 1 周まわるのに要する時間、すなわち**公転周期**を T とすると、

$$vT = 2\pi r$$

であり、先ほどの加速度の式に代入して惑星の速さ v を消去すると

$$a = \frac{4\pi^2}{r^2} \cdot \frac{r^3}{T^2}$$

が得られる。惑星の公転周期 T [s] の 2 乗は軌道の大きさ r の 3 乗に比例するという観測事実から $\frac{r^3}{T^2} = \text{一定}$ であるので、

$$a = 4\pi^2 \times (\text{一定}) \times \frac{1}{r^2}$$

と書いて良い。運動方程式 (ニュートンの第 2 法則) より、

$$F(\text{力}) = ma = 4\pi^2 m \times (\text{一定}) \times \frac{1}{r^2}$$

となる。ここで、作用・反作用の法則 (ニュートンの第 3 法則) から、太陽と惑星を入れ替えて考えると、同様に

$$F(\text{力}) = M_{\odot} a' = 4\pi^2 M_{\odot} \times (\text{一定})' \times \frac{1}{r^2}$$

と、惑星と太陽の役割を入れ替えればよい。同じ力 F についての式なので上の 2 つの式の比を取ると

$$1 = \frac{4\pi^2 m \times (\text{一定})}{4\pi^2 M \times (\text{一定})'}$$

となり、ある定数 G を用いて、

$$4\pi^2 m \times (\text{一定}) = GM_{\odot} m, \quad 4\pi^2 M_{\odot} \times (\text{一定})' = GM_{\odot} m$$

と書いてよい。以上から、 $(\text{一定}) = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2}$ となるので、太陽と惑星に働く力 F は

$$F = G \frac{M_{\odot} m}{r^2} \quad (2.1)$$

と得られる。これは、質量を持った 2 質点間に働く力であると理解される。これを**万有引力の法則**と呼ぶ。

地球を一樣な球とし、その質量を M [kg]、半径を R [m]、地表から物体までの距離を h [m] とすると、質量 m [kg] の地上物体に働く力の大きさは $f = G \frac{mM}{(R+h)^2}$ である。地表から物体までの距離 h [m] が地球の半径 R [m] に比べて十分小さいとすると、分母の h を R に対して無視して良いであろう。この力 f [N] により物体は力を受けて加速度が生じるとすると、その加速度を g [m/s²] と書くことにして、

$$mg = f \approx G \frac{mM}{R^2}, \quad \text{すなわち} \quad g = G \frac{M}{R^2}.$$

よって、重力の法則から、地表付近では物体に依らず、物体は一定の加速度 g のもとで鉛直下向きに $f = mg$ の力を受けて運動することが言える。この g が**重力加速度**である。その値はおおよそ $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$ である。

§ 2.3 単位系

ここでは MKSA 単位系と呼ばれる単位系を用いる。まず、長さ ([L])、時間 ([T])、質量 ([M]) の単位を与える。

長さ (距離) : メートル (m)

時間 : 秒 (s)

質量 : キログラム (kg)

その他の力学量はこの 3 つの組み合わせで表せる。たとえば、

速度 : (距離) / (時間) $\cdots \text{m/s}$

加速度 : (速度の変化) / (変化に要した時間) $\cdots \text{m/s}^2$

力 : $F = ma \quad \cdots \text{kg m/s}^2 \equiv \text{N}$

ここで、力の単位は、普通、 kg m/s^2 の代わりに、N (ニュートン) を用いる。

1 秒は「セシウム 133 原子の基底状態における 2 つの超微細構造準位の間の遷移に対応する放射の 9192631770 周期の継続時間」、1m は、「光が $1/299792458$ 秒間に真空中を進行する距離」、1kg は「フランスのセヴレ市にある国際度量衡標準局に保存されているプラチナ・イリジウム合金円柱の質量」と定義されている。

電磁気現象では、長さ、時間、質量に加えて、電流の単位、アンペア ([A]) を用いる。1A は、「1m 離して真空中に平行おかれた導線に、同方向に流れる 2 本の直線電流間に働く力が導線 1m あたり 1N であるときの電流の大きさ」として導入される。

3章 ニュートン力学の数学的扱い

§3.1 位置と座標系

基準点 O から、点 P へは、 $\mathbf{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ として、大きさと向きを持つ量、**ベクトル**で表す。ベクトルは太文字で表わすことにする[¶]。

基準点 O からある方向に x 軸をとり、それに垂直な方向に y 軸、さらに x 軸と y 軸に垂直に z 軸をとる。このとき右手の親指、人差し指、中指で3つの直交する軸を表したときに指の向く方向をそれぞれ x 、 y 、 z 軸の正の方向になるように取る（右手系）。これをデカルト座標系と呼ぶ。

長さ1の単位ベクトルをそれぞれの軸の正方向にとり、それらを $\mathbf{e}_x$ 、 $\mathbf{e}_y$ 、 $\mathbf{e}_z$ と書くと位置ベクトル $\mathbf{r}$ は

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

と記することができる。ベクトルを“成分”で表すと、

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書ける。

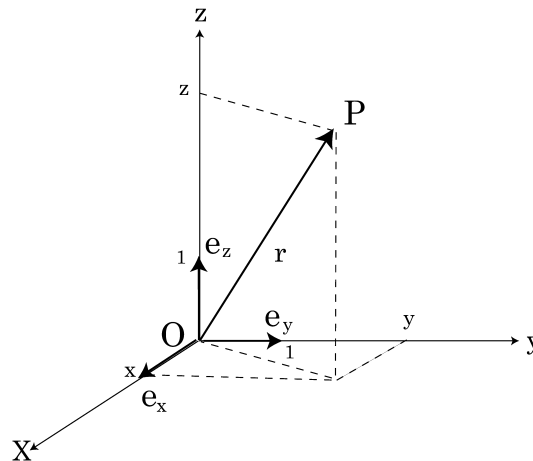


図 5:

[¶]高等学校では $\vec{a}$ 等と表わしていたものを、 $\mathbf{a}$ と記す。

§ 3.2 ベクトルの演算

以下、ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ 、 $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ 等とする。

- ベクトルの大きさ（長さ）

ベクトルの大きさは、ベクトルの長さのことである。三平方の定理を使うと、容易に

$$a \equiv |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

であることがわかる。

- ベクトルの加法・減法

2つのベクトルを足し合わせたベクトル

$$\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

は、次の成分を持つ新しいベクトル

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

である。また、減法（引き算）のためには次の関係を知っていればよい。

$$-\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix}$$

こうして、

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) .$$

- ベクトルの内積（スカラー積）

2つのベクトルから、ある数を生じる次の演算を、**ベクトルの内積**と呼ぶ。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &\equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= ab \cos \theta . \end{aligned}$$

ここで、 θ は2つのベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角である。

- ベクトルの外積（ベクトル積）

2つのベクトルから新しいベクトルを生じる次の演算を、**ベクトルの外積**と呼ぶ。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} .$$

新しいベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を成分で書くと

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

となる。ベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ が向いている方向は、ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を含む平面に垂直で、 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{e}$ の順に右手系をなす単位ベクトル $\mathbf{e}$ の方向である。またベクトル $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の大きさは $ab \sin \theta$ となる。ここで θ は 2 つのベクトル $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ のなす角である：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \sin \theta \mathbf{e} .$$

(問) $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ を 3 次元のベクトルとすると、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

§ 3.3 微分係数としての速度・加速度

ある時刻に質点が位置 $\mathbf{r}(t)$ にいたが、微小時間 Δt 経過後には $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ に到達していたとする。すなわち、質点は微小時間 Δt に $\Delta \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ だけ移動している。このとき、時刻 t での質点の速度 $\mathbf{v}(t)$ は

$$\mathbf{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

により表される。

デカルト座標では、ベクトル表示を成分で表して

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt}$$

と書ける。

さらに加速度 $\mathbf{a}(t)$ は速度 $\mathbf{v}(t)$ の変化率であるので、速度を導いたときと同様な考え方で

$$\mathbf{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}$$

と導かれる。デカルト座標では、ベクトル表示を成分で表して

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2 z(t)}{dt^2}$$

と書ける。ここで、 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 等は時間 t についての 2 階微分である。

(問) x 軸上を、 $x(t) = A \sin(\omega t)$ で運動する質点の速度と加速度を求めよ。また加速度を $x(t)$ を用いて表せ。

(問) 地球をまわる月の軌道はほぼ円形であり、平均半径は 3.84×10^8 m である。月が完全に地球の周りを 1 回転するには、地球を動かないものとして、27.3 日を要する。このとき、月の平均軌道速度、及び向心加速度を求めよ。

4 章 微分方程式としてのニュートンの第 2 法則—運動方程式—

§ 4.1 運動方程式

ニュートンの第 2 法則を数式で表そう。質点に働く力を $\mathbf{F}$ [N]、質点の質量を m [kg] とし、速度を $\mathbf{v}$ [m/s] とする^{||}。今、運動量 $\mathbf{p}$ を次のように導入しておく。

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} .$$

すなわち、(運動量)=(質量)×(速度) である。このとき、ニュートンの第 2 法則は次のように、時間に関する微分方程式として表される：

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} . \quad \left(\text{または} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \right)$$

質量 m が時間に関して不変であれば、それを時間微分の前に出しておこう。また、速度は質点の位置ベクトルの 1 階時間微分であることから、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

と書ける。

§§4.1.1 地表付近での物体の上下方向の運動

鉛直下向きに z 軸をとろう。重力加速度を g [m/s²] とし、物体は下向きに力 mg [N] を受けるので、運動方程式は

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) = mg$$

となる。両辺 m で割っておいてから時間について 1 回積分すると

$$v_z \equiv \frac{dz(t)}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) dt = \int g dt = gt + v_0 .$$

ここで、 v_0 [m/s] は時刻 $t = 0$ での速度であり、“初速度”と呼ばれる。さらに時間について積分すると

$$z(t) = \int \left(\frac{dz(t)}{dt} \right) dt = \int (gt + v_0) dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0 .$$

ここで、 z_0 は $t = 0$ での質点の位置である。

v_0 、 z_0 をそれぞれ、速度、位置の初期条件という。ニュートンの運動方程式は時間に関して 2 階微分方程式なので、2 回積分することにより 2 つの積分定数が現れるが、それは初期条件により決められる。今の場合、初速度 $v_0 = 0$ のとき、質点は自由落下するという。このとき、質点の進む距離は、 $\frac{1}{2}g$ を単位にして、 $t = 0 \sim 1$ 、 $1 \sim 2$ 、 $2 \sim 3$ 、 $3 \sim 4$ 、 $\dots$ に対して、1、3、5、7、 $\dots$ である。これはガリレイが発見した落体の等加速度運動に他ならない。

§§4.1.2 単振り子

地上物体の運動の別の例として、単振り子を見ておこう。質量の無視できる長さ l [m] のひもの先に、重りとして質量 m [kg] の質点がついていて、振り子運動をしているとする (図 6)。ただし時刻 $t = 0$ で重りは鉛直

^{||}以下では関数の引数 t をしばしば省略する。ここで、 t [s] は時間を表わす。

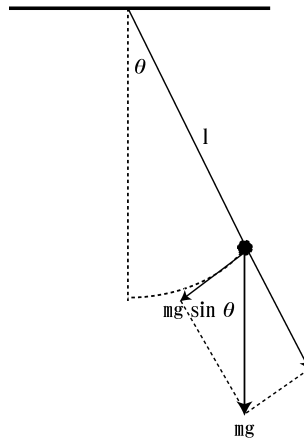


図 6:

から測った角度 θ_0 [rad] にあり、初速度は 0 とする。重力加速度を g [m/s²] として、重りが動く方向 (接線方向) の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l\theta) = -mg \sin \theta$$

となる。ここで θ [rad] は鉛直から測ったひもの角度である。今、振れ幅が小さいとすると、角度 θ は微小だから三角関数を近似して $\sin \theta \approx \theta$ とできる。このとき運動方程式は

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -mg\theta \quad , \quad \text{すなわち} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l} \theta$$

と書ける。2 階微分して負号がついて (係数を除いて) 元に戻る関数は三角関数であるので、この運動方程式の解としては、一般に

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right)$$

が得られる。ここで、 A 、 α は初期条件で決められるべき定数である。時刻 $t = 0$ で $\theta = \theta_0$ としたので、 $A \cos \alpha = \theta_0$ が得られる。また速度は $v = l \frac{d\theta}{dt} = -lA \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right)$ より、 $t = 0$ で $v = 0$ から $-A\sqrt{lg} \sin \alpha = 0$ が得られる。これより $\alpha = 0$ 、よって $A = \theta_0$ となるので、最終的に求める解は

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

である。

振り子が一振れして元に戻ってくるまでに要する時間 T [s] は、上で求めた解より、三角関数がもとの値に戻る時間であるので

$$\sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi \quad , \quad \text{すなわち} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる。この T を振り子の**周期**と呼ぶ。今扱ったように振れ幅が小さいとした範囲では、周期は振れ幅に依存せず、ひもの長さ (と重力加速度) にのみ依存する。これが、ガリレイの発見した**振り子の等時性**と呼ばれることである。

§§4.1.3 大気から速さ v に依存した抵抗を受けて自由落下する質点

空気中での物体の運動は、空気から抵抗力を受けているはずである。ここでは、(i) 速さに比例する抵抗力 μv (μ は定数) を受ける場合、及び (ii) 速さの 2 乗に比例した抵抗力 γv^2 (γ は定数) を受ける場合、の 2 つの場合について**、重力と抵抗力が釣り合ったときの速度を求めておこう。

鉛直下向きに z 軸をとる。重力加速度を g と書くと、運動方程式は、(i)、(ii) の場合それぞれについて

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v, & \text{for (i)} \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v^2, & \text{for (ii)} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 z 方向の速度成分を v と書いた。重力と抵抗力が釣り合った状況では、速度に変化はなく、

$$\begin{aligned} mg &= \mu v, & \text{for (i)} \\ mg &= \gamma v^2, & \text{for (ii)} \end{aligned}$$

となる。よって、その時の速度—これを**終端速度**と呼ぶ—をそれぞれ v_1 、 v_2 と書くと、それらは、鉛直下向きで、それぞれ

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{mg}{\mu}, & \text{for (i)} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}, & \text{for (ii)} \end{aligned}$$

となる。

参考までに、雨粒の落下を考えておこう。速さに比例した抵抗力のことを**粘性抵抗**と呼ぶ。詳しいことは連続体力学を学ばなければならないので、結果を示しておこう。粘性係数と呼ばれる量を η とし、雨粒が球だとしてその半径を a とすると、速さに比例した抵抗の係数 μ は

$$\mu = 6\pi a \eta, \quad \text{抵抗力} = F = \mu v. \quad (4.2)$$

と表わされることが知られている。以下に必要な数値を表にしておく。

	η [kg/m·s]	ρ 密度 [kg/m ³]
空気 (20 °C、1 気圧)	1.8×10^{-5}	1.2
水 (20 °C)	1.0×10^{-3}	1.0×10^3

終端速度 ($v(t \rightarrow \infty) \equiv v_1$) は

$$v_1 = \frac{mg}{\mu} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho \cdot g}{6\pi a \eta} \sim 120 \times (a[\text{mm}])^2 [\text{m/s}]. \quad (4.3)$$

物体の速さが小さいときは、大気からの抵抗力を速度の大きさに展開して、第 1 項が速度の 1 乗、第 2 項が速度の 2 乗、以下…のようになると思われるが、以下で見るようにある程度の大きさの物体は速度の 2 乗に比例した抵抗が主要となる。速度の 1 乗に比例した抵抗は粘性抵抗**と呼ばれ、大気の粘性による抵抗であり、物体の接線方向に働く。一方、速度の 2 乗に比例する抵抗は**慣性抵抗**と呼ばれ、大気中の分子が物体表面に垂直に衝突することによって生じる抵抗力である。物体が速さ v [m/s] で運動していると、物体の静止系から見て大気中の分子は速さ v で物体に衝突してくる。大気の密度を ρ [kg/m³] とすると、単位体積あたり運動量 $p = \rho v$ [kg m/s/m³] を持って衝突してくる。この運動量をすべて物体が受けるとすると、単位時間・単位面積あたり物体から v [m³/(s·m²)] まで離れた領域中の分子が物体に衝突するので、このとき物体が受ける単位時間・単位面積あたりの運動量は $p v$ [kg m/s/(s·m²)] となる。微小時間 Δt [s] に物体が受ける単位面積あたりの運動量 Δp は $\Delta p = p v \Delta t = \rho v^2 \Delta t$ となり、単位面積あたり物体が受ける力 f は $f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho v^2$ となり、速さの 2 乗に比例することがわかる。また、慣性抵抗と粘性抵抗の比を**レイノルズ数**と呼び、流体力学で重要な量となる。一般にレイノルズ数 Re は、物体の典型的な大きさを l 、速度を u 、媒質の密度を ρ 、粘性係数を η として $Re = \frac{\rho u l}{\eta}$ と表わされる。(4.2) 式と (4.4) 式を用いて確かめてみよ。ただし、数係数は除く。

となる。半径 1 mm の雨粒として、 $v_1 \sim 120$ [m/s] は速すぎるように思える。

では、速さの 2 乗に比例した抵抗力を考えてみよう。これは**慣性抵抗**と呼ばれる。速さの 2 乗に比例した抵抗の係数 γ は、雨粒の周りの空気の密度を ρ として、

$$\gamma = \frac{\pi}{4} \rho a^2, \quad \text{抵抗力} = F = \gamma v^2 \quad (4.4)$$

と表わされる。こうして終端速度 v_2 は、

$$v_2 = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{\pi}{4} \rho a^2}} \sim 6.60 \sqrt{a[\text{mm}]} \text{ [m/s]} \quad (4.5)$$

と書ける。

実測値と比較してみよう (「一般物理学 上 (太田信義 著) 丸善株式会社」より引用)。

半径 a [mm]	0.05	0.25	0.5	1.0	1.5	2.0
測定速度 [m/s]	0.27	2.06	4.03	6.49	8.06	8.83
v_1 (粘性抵抗のみ) [m/s]	0.30	7.56	30	120	270	480
v_2 (慣性抵抗のみ) [m/s]	1.48	3.30	4.67	6.60	8.08	9.33

§§4.1.4 演習問題

(問) 質量 m [kg] の質点が水平面と角度 θ_0 [rad] をなす方向に、初速度の大きさ v_0 [m/s] で投げ出された場合を考える。空気抵抗などの重力以外の効果を見捨て、次の各問いに答えよ。ただし重力加速度を g [m/s²] とする。

1. 水平方向 (x 方向とする) と鉛直方向 (y 方向とし、鉛直上向きに y 軸をとる) にわけて、運動方程式を書き下せ。

$$[\text{答え}] \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg$$

2. 上記で記した運動方程式を解き、 $x = \dots$ 、 $y = \dots$ の形に記せ。

$$[\text{答え}] \quad x = v_0 t \cos \theta_0, \quad y = v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

3. 2. で、時間 t を消去し、質点の軌道の式を導け。

$$[\text{答え}] \quad y = x \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2$$

4. 水平面での到達距離を求めよ。

$$[\text{答え}] \quad \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

5. 到達距離が最大となるための投射角 θ_0 は、いくらか。

$$[\text{答え}] \quad \theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad (= 45^\circ)$$

(問) 摩擦のない水平な床の上で、バネに結びつけられている質量 m [kg] の質点が水平方向に単振動しているとする。バネの自然の長さからの変位を x [m] とすると、質点には $F = -kx$ [N] の力が働く。ここに k [N/m] はバネ定数である。このときの運動を論じ、振動の周期 T [s] を求めよ。

(問) 大気から速さ v [m/s] に依存した抵抗、 μv [N] (μ : 定数) を受けて質点が初速 v_0 [m/s] で落下するとき、

1. 重力加速度を g [m/s²] として運動方程式をたてよ。

[答え] 鉛直下向きに z 軸をとると、

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 z}{dt^2} &= mg - \mu v \\ &= mg - \mu \frac{dz}{dt} . \end{aligned}$$

2. 1. の微分方程式を解き、速度、位置を時間 t の関数として求めよ。

速度 v について解く。運動方程式は v を用いて

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v .$$

と書ける。よって、上式から左辺に v 、右辺に t に関する量を分離して

$$\frac{mdv}{mg - \mu v} = dt .$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$-\frac{m}{\mu} [\ln(mg - \mu v)]_{v_0}^v = t - t_0 .$$

となる。ただし、初期時刻 $t = t_0$ で初速 $v = v_0$ として。今、 $t_0 = 0$ としても一般性を失わないので $t_0 = 0$ としておく。よって、

$$-\frac{m}{\mu} \ln \left(\frac{mg - \mu v}{mg - \mu v_0} \right) = t .$$

これを整理して、

$$v \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{mg}{\mu} \left[1 - \left(1 - \frac{\mu v_0}{mg} \right) \exp \left(-\frac{\mu}{m} t \right) \right]$$

を得る。さらに t で積分して、 $t = 0$ で質点の位置を $z = z_0$ とすると、

$$z = \frac{mg}{\mu} t + \frac{m^2 g}{\mu^2} \left(1 - \frac{\mu v_0}{mg} \right) (e^{-\mu t/m} - 1) + z_0$$

を得る。

3. 時刻が $t \rightarrow \infty$ での速度を求めよ。

2 つ前の式で、 $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$v = \frac{mg}{\mu} .$$

が得られる。これは先に求めた終端速度に一致している。

5 章 保存則

時間にかかわらずある量が一定値を取り続けるとき、その物理量に対して**保存法則**が存在すると言い、その物理量を**保存量**と呼ぶ。以下では2つの質点系で話をすすめるが、 N 個の質点系でも同様なことを示すことができる。

§5.1 運動量保存則

2つの質点(1, 2とする)を考え、それぞれの質量を m_1 [kg]、 m_2 [kg] とし、これらは時間とともに変化しないとする。質点1に働く力は質点2から及ぼされており、これを $\mathbf{F}_{12}$ [N] と書こう。逆に質点2に働く力は作用・反作用の(ニュートンの第3)法則から、質点1から及ぼされており、これを $\mathbf{F}_{21}$ [N] と表す。作用・反作用の法則から、お互いに及ぼしあう力は大きさが同じで向きが反対であるので、ベクトルで表すと

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

と書ける。さて、運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21}$$

となる。ここで、質点1, 2の位置を $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ で表した。この2式を辺々それぞれ足し合わせ、作用・反作用の法則 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) を用いると、右辺の和は消えて

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{0}$$

が得られる。今、前に定義し、導入しておいた運動量ベクトル

$$\mathbf{p}_i \equiv m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \quad (i \text{ は質点を区別する番号、今は1または2})$$

を用いると、上式は

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{0},$$

積分して $\mathbf{P} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = (\text{時間に依らない定ベクトル})$

となる。これは、質点1, 2の運動量のベクトル的な和は時間にかかわらず一定値をとることを意味している。これを“運動量保存則”と呼ぶ。また $\mathbf{P}$ は系の全運動量である。

§§5.1.1 慣性中心

慣性中心のベクトル、 $\mathbf{R}$ を次のように導入しよう：

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

このとき、慣性中心の速度は、慣性中心の座標を時間で微分することにより

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}}{m_1 + m_2} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}$$

と得られる。全運動量 $\mathbf{P}$ 、及び全質量 $M \equiv m_1 + m_2$ を用いると、上式は

$$\mathbf{P} = M \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

と表される。したがって、全運動量 $\mathbf{P}$ は、系の全質量 (M) $\times$ 慣性中心の速度 $\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)$ という、期待される形を持っている。また、全運動量は保存する $\left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{0}\right)$ ので、慣性中心は全運動量が保存するときあたかも質量 M を持った、力を受けない 1 個の質点と同様な運動をすることがわかる。すなわち、質点間相互の運動が解ければ、そのあと全系の慣性中心の慣性運動を重ねればすべての運動がわかったことになる。

§ 5.2 中心力と角運動量保存則

§§5.2.1 中心力

互いに力を及ぼす 2 つの質点間を結ぶ方向に、その力の向きが向いているとき、この力を**中心力**と呼ぶ。要するに、質点を結ぶ線と力が平行であるということである。

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{F}_{12}, \quad \text{または} \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

§§5.2.2 角運動量保存則

互いに力を及ぼし合う 2 質点を考える。このとき力は中心力であるとする。運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21}.$$

となる。第 1 式の両辺に $\mathbf{r}_1$ との外積を取り、第 2 式の両辺には $\mathbf{r}_2$ との外積をとる：

$$\mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}, \quad \mathbf{r}_2 \times m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}.$$

この両式の辺々足し算をし、作用・反作用の法則、及び力が中心力であることを用いて計算していこう：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ここで、右辺第 1 行目から 2 行目へは作用・反作用の法則 ($\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$) を使い、2 行目から 3 行目は力が中心力であることを用いた。したがって、同じベクトルの外積は常に $\mathbf{0}$ であること、 $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{0}$ 、等に注意して左辺を書き直しておく

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{r}_1 \times \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right) + \mathbf{r}_2 \times \left(m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right) \right] = \mathbf{0}$$

の様に表すことができる。これは左辺の $[\dots]$ の量が時間に依存していないことを示している。ここで、質点 1、2 の**角運動量** $\mathbf{L}_1$ 、 $\mathbf{L}_2$ 及び系の“**全角運動量**” $\mathbf{L}$ を次のように定義し、導入しよう：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &\equiv \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 \left(= m_1 \mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \right), \quad \mathbf{L}_2 \equiv \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \left(= m_2 \mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right), \\ \mathbf{L} &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2. \end{aligned}$$

これを用いると先ほどの式は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}, \quad \text{積分して、} \quad \mathbf{L} = (\text{時間に依存しない定ベクトル})$$

となる。これを**角運動量保存則**と言う。

§ 5.3 保存力と力学的エネルギー保存則

§§5.3.1 保存力

力 $\mathbf{F}$ [N] が作用しているもとで、質点のある微小な位置変化 $d\mathbf{r}'$ [m] を考えよう。力 $\mathbf{F}$ と位置変化 $d\mathbf{r}'$ のなす角を θ [rad] とすると、力 $\mathbf{F}$ の、 $d\mathbf{r}'$ 方向の成分は、 $|\mathbf{F}| \cos \theta$ である。この力の成分によって質点はその方向に $|d\mathbf{r}'|$ だけ動くので、その積は、内積を使って

$$|\mathbf{F}| \cos \theta |d\mathbf{r}'| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

となる。これを、力 $\mathbf{F}$ によって為された**仕事**と呼ぼう。位置 $\mathbf{r}_0$ から $\mathbf{r}$ まで質点が力 $\mathbf{F}$ のもとで運ばれたとすると、為された仕事は、すべての微小な仕事の和をとって、

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}'$$

と書ける。

さて、このとき、力 $\mathbf{F}$ の為した仕事が途中の道筋に依らず、あるスカラー関数（これを**ポテンシャルエネルギー**という）の始点と終点における値の差で書けるとき、この力 $\mathbf{F}$ を**保存力**と言う。すなわち、力 $\mathbf{F}$ が保存力の時、位置 $\mathbf{r}$ の関数であるポテンシャルエネルギーを $V(\mathbf{r})$ として、

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' = V(\mathbf{r}_0) - V(\mathbf{r})$$

と書ける。逆に、力 $\mathbf{F}$ が保存力の時には、ポテンシャルエネルギー $V(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = -\text{grad } V(\mathbf{r}) \quad (= -\nabla V(\mathbf{r}))$$

と、ポテンシャルエネルギーの勾配（に負号をつけたもの）で表すことができる。

§§5.3.2 エネルギー保存則

力学的エネルギー E として、次の量を定義し、導入しよう：

$$E \equiv \frac{1}{2}m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + V(\mathbf{r}) .$$

右辺第1項は、**運動エネルギー**と呼ばれる。第2項は前節のポテンシャルエネルギーである。ポテンシャルエネルギーがあからさまに時間に依存しないとしよう。ただし、質点の位置 $\mathbf{r}$ を通して時間に依存している。このことに注意して、 E を時間で微分してみよう：

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \left(m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F} \right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

ここで、1行目中辺へは、 V が $\mathbf{r}$ を通して時間に依存しているので、 $\frac{dV(\mathbf{r})}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ であることを使った。

第1行目から2行目へは、保存力とポテンシャルエネルギーの関係 $\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$ を使い、2行目から3行目へはニュートン方程式を用いた。こうして、力学的エネルギー E の時間微分は0であること、すなわち力学的エネルギーは時間に依存しない保存量であることがわかった。このことを、**力学的エネルギー保存則**と呼ぶ。

(問) 力が万有引力(重力)のとき $(\mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r, \text{但し } \mathbf{e}_r \text{ は } \mathbf{r} \text{ 方向の単位ベクトルである。})$ ポテンシャルエネルギー $V(r)$ を求めよ。
 (答え: $V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$)

(問) ニュートン方程式の両辺に速度 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ との内積を取り、その後、両辺を時間で積分することによって、力学的エネルギー保存則を導け。ただし、力は保存力とする。

§ 5.4 対称性と保存則

保存法則が成り立つためには、自然界が具えている**対称性**が背後に存在している。簡単にこのことを見ておこう。

2つの質点1、2の間に保存力が及ぼし合うとしよう。ポテンシャルエネルギーは、2つの質点の位置の関数であり、 $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ と記す。質点1、2に働く力 $\mathbf{F}_{12}$ 、 $\mathbf{F}_{21}$ は

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad \mathbf{F}_{21} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2}$$

となる。空間座標を一斉に $\mathbf{a}$ だけずらしたとしよう。座標原点を $-\mathbf{a}$ だけずらして座標を取り直したとしてもよい。もし、空間が一様(特別な場所が存在しない)とすれば、ポテンシャルエネルギーはこの変換で変化しないであろう。したがって、空間が一様であればポテンシャルエネルギーは、2質点の位置の差の関数でなければならない: $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 。なぜなら、このときのみ、空間を $\mathbf{a}$ だけずらしても物理法則、すなわち自然は変わらない:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}) &= V([\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}] - [\mathbf{r}_2 + \mathbf{a}]) \\ &= V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) . \end{aligned}$$

このとき、この節の最初の式から、質点に働く力は、それぞれ

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \\ \mathbf{F}_{21} &= -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = -\frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} = \frac{\partial V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} = -\mathbf{F}_{12} . \end{aligned}$$

2行目最後の等式は1行目の最右辺と見比べると成り立つことがわかる。これはニュートンの第3法則(作用・反作用の法則)であり、作用・反作用の法則は空間の一様性の結果、成り立つ法則であることがわかる。前に、作用・反作用の法則が成り立つことに基づいて、運動量保存則を導いた。よって、運動量保存則は空間の持つ対称性の一つである空間の一様性から帰結される保存則であることが理解される。

もう一つ、空間の持つ対称性を考察してみよう。先程は空間の一様性から、2質点系のポテンシャルエネルギーは $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ の関数であることを理解したが、これはベクトルであるので、その向きと大きさに依存することを意味する。空間に特別の方向が無いとすると、空間を回転させても物理法則は変わらないはずである。すなわち、空間に設定した3つの座標軸を回転して別の座標軸を取って力学法則を記述しても同じ結果が得られるはずである。したがって、ポテンシャルエネルギーはベクトル $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ の大きさだけに依存すべきである。(方向には依存すべきでない。) よって、

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \implies V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \equiv V(r) .$$

ここで、簡単のために $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と、相対位置ベクトル $\mathbf{r}$ を導入した。 r はその大きさである。このときには力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

となる。すなわち、力 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ と平行であり、中心力になっている。小節 B では力が中心力であるということに基づき、角運動量保存則が導かれた。すなわち、角運動量が保存するのは、空間の等方性（空間に特別な方向が無い）という自然の持つ対称性の帰結である。

では、エネルギーは何故保存するのか？ これは時間の一様性に結びついている保存法則であることだけをここでは述べておく。

6章 中心力の問題

§ 6.1 角運動量保存則の役割

空間の等方性から、2 物体間の相互作用を表すポテンシャルエネルギーも $\mathbf{r}$ の大きさにしかよらない。このポテンシャルエネルギーから導かれる力を**中心力**と呼んだ。力の中心を原点にとると

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V(r)}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{dV(r)}{dr} \mathbf{e}_r$$

となる。ここで $\mathbf{e}_r$ は $\mathbf{r}$ -方向の単位ベクトル $\left(\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right)$ である。例えば中心力として重力を考えよう。

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{\alpha}{r}, & \longrightarrow \mathbf{F} &= -\frac{\alpha}{r^2} \mathbf{e}_r, \\ \alpha &= Gm_1m_2 \end{aligned}$$

ここで、 α として $\alpha = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ ととり、 q_1 、 q_2 を物体が持つ電荷、 ϵ_0 を誘電率とすると、2 つの荷電粒子間のクーロン力を扱うことになる。

力が中心力の場合には当然、角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ は保存するベクトルである。ここで、 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0$ となることはベクトルの計算から簡単に確かめられるので、角運動量ベクトルと質点の位置ベクトルは互いに直交していることがわかる。したがって、角運動量が保存しているときには、位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、時間と共に変化しない保存するベクトル $\mathbf{L}$ に垂直であり、質点の位置ベクトルは常に $\mathbf{L}$ に垂直な平面内にあることになる。すなわち質点は角運動量ベクトルに垂直な、ある平面内でしか運動できない。この事実は物体の運動の軌道面が存在することを意味する。よって、中心力場の問題は、2 次元平面で考えればよい。

そこで、この平面を x - y -平面にとる。さらに x 、 y の代わりに、“極座標” (r, θ) をとる。すなわち、

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

の関係から、 r と θ を導入する。ここで、 r は原点から質点までの距離、 θ は原点と質点を結ぶ線分が x -軸となす角である (図 7)。このとき、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

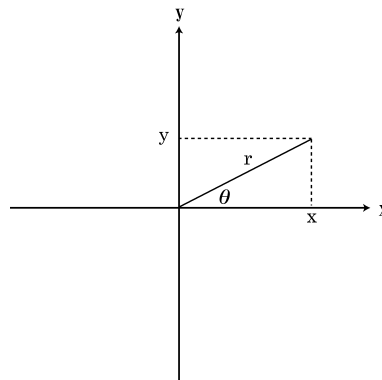


図 7:

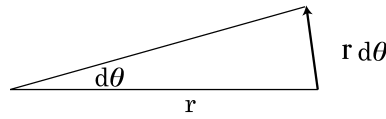


図 8:

となる。角運動量をこの座標系で計算しておこう。 L_x と L_y はともに 0 になる。 L_z は

$$\begin{aligned} L_z &= xp_y - yp_x \\ &= m \left[r \cos \theta \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) - r \sin \theta \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \\ &= mr^2 \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

となる。

ここで、角運動量の保存則を幾何学的に見ておこう。原点と質点を結ぶ線分が微小な時間に掃いていく面積を dS として表すと、それは近似的に三角形として

$$dS = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta$$

と表せる (図 8)。微小時刻 dt で割った後、 $dt \rightarrow 0$ の極限を取り、微分で表すと

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

となるが、先ほど導いた角運動量で表すと

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} L_z$$

となる。角運動量保存則から L_z は一定値をとるので、結局 $\frac{dS}{dt}$ は時間に依存せず一定であることがわかる。これは**面積速度一定の法則**と呼ばれることのある、ケプラーの発見した惑星運動の観測事実に他ならない。

§ 6.2 中心力場のもとでの運動

さて、ここからは角運動量の大きさを L と書くことにする。今、 $L_x = L_y = 0$ なので、 $L_z = L$ である。上で導いた式 $\left(L_z = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$ より

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

と表される。この関係を用いると、エネルギーは、極座標表示で

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] + V(r) \\ &= \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + V(r) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left[V(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right] \end{aligned}$$

と書ける。ここに現れた $U_{\text{cf}} \equiv \frac{L^2}{2mr^2}$ は、**遠心力ポテンシャル**と見なせる。実際、 U_{cf} をポテンシャルエネルギーと見なしてこの項から導かれる力は、

$$\mathbf{F}_{\text{cf}} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \frac{L^2}{mr^3} \mathbf{e}_r$$

であり、方向は中心から外に向かう方向、すなわち、**遠心力**である。運動が円運動のときには、角運動量 L は簡単に $|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = mrv$ となるので遠心力の大きさは、 $\frac{mv^2}{r}$ の形になる。

さて、先程導かれたエネルギーの表式を使うと

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

が得られる。さらに $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ の関係を使うと、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}$$

となるので、これらの上記2式より、

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(r)] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}$$

が得られ、結局これを積分することにより

$$\theta = \int \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} dr + (\text{積分定数}) \quad (6.6)$$

が得られる。この右辺の積分を、与えられた $V(r)$ のもとで実行すれば、 r と θ の関係、すなわち質点の軌道が得られることになる。

§ 6.3 ケプラー問題

中心力が距離の 2 乗に反比例する場合の問題（ケプラー問題）を考えよう。力は $\mathbf{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\mathbf{e}_r$ という形をとり、そのときのポテンシャルエネルギーは $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ である。ここで $\alpha = GM_{\odot}m$ と取れば $M_{\odot}$ を大きな太陽質量として太陽は動かないものとしたときの、万有引力のもとでの質量 m の惑星運動を扱うことになる。ここで $\alpha > 0$ （引力）としておく。軌道は、前節の最後の式 (6.6) に、 $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$ を代入して積分を実行することにより簡単に求まる。今、 $u \equiv \frac{1}{r}$ と変数変換した後、 $a < 0$ の場合に成り立つ次の積分公式

$$\int \frac{du}{\sqrt{au^2 + bu + c}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arccos \left(-\frac{2au + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right)$$

を用いると

$$\begin{aligned} r &= \frac{C}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \\ C &= \frac{L^2}{m\alpha}; \quad (\text{半通径}), \\ e &= \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}; \quad (\text{離心率}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

を得る^{††}。また、積分定数を θ_0 と書いた。以後、簡単のために $\theta_0 = 0$ としておく。この r と θ の関係は、円錐曲線と呼ばれる一群の曲線を与える。保存する角運動量 L が与えられると、軌道の大きさを決める半通径 C が決まり、さらに保存するエネルギー E を与えると軌道の形を決める離心率 e が決まる。

具体的にどのような軌道が得られるか見ていこう。

- (1) $e = 0$; $E = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}$; 円
このとき

$$r = C = (\text{一定}).$$

すなわち、 $r = \text{一定}$ の曲線、円軌道を描く。

- (2) $0 < e < 1$; $-\frac{m\alpha^2}{2L^2} < E < 0$; 楕円
このとき、図 9 のように

$$a = \frac{C}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|} \quad b = \frac{C}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$$

となっている。

楕円を一周まわるのに要する時間、すなわち公転周期を求めておこう。これには角運動量保存則を表現し直した面積速度一定の法則を用いるのが便利である。 $L = 2m \frac{dS}{dt}$ だったので、この両辺を時間 0 から公転周期 T まで積分する。左辺の L は角運動量保存則により時間に依存しないので、積分は単に時間 T を掛けるだけである。よって

$$LT = 2mS$$

が得られる。ここで右辺の S は楕円の面積、 $S = \pi ab$ である。上で見た楕円の関係から、 $b^2 = Ca$ が得られるので、半通径 C の具体的表式を用いて

$$T = \frac{2m}{L} \pi ab = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} a^{\frac{3}{2}}$$

^{††}離心率を e と記したが、もちろん単位ベクトル (の大きさ) とは関係がない。

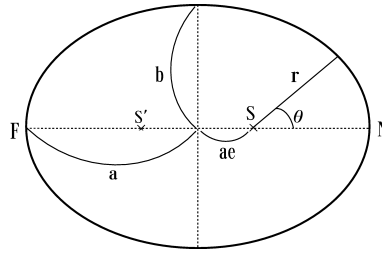


図 9:

が得られる。すなわち公転周期は軌道の大きさの $3/2$ 乗に比例する。または、公転周期の 2 乗は、軌道の大きさの 3 乗に比例するとも言える。これはティコ・ブラーエによる観測事実の、ケプラーによる解析結果である。

- (3) $e = 1$; $E = 0$; 放物線

このとき、 $\theta = \pm\pi$ で $r \rightarrow \infty$ となる。得られる軌道は放物線を与える。

- (4) $e > 1$; $E > 0$; 双曲線

このとき、 $\cos \theta < -\frac{1}{e}$ の領域では r が負となり、そこでは運動が許されない。このとき軌道は $\cos \theta = -\frac{1}{e}$ を漸近線に持つ双曲線を描く。

- (問) 万有引力の下での惑星の運動を考える。このとき惑星の軌道は、太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。太陽からの距離を r [m]、近日点（太陽から最も近い惑星の位置）の方向を $\varphi = 0$ として角度 φ [rad] をとると、軌道の式は

$$r = \frac{C}{1 + e \cos \varphi}$$

と求められる。ここに C はある定数であり、 e は離心率であり $0 < e < 1$ である。

1. 近日点の距離 r_1 [m]、及び遠日点（太陽から最も遠い惑星の位置）の距離 r_2 [m] はいくらになるか、 C と e を用いて記せ。 $\left(\text{答え} : r_1 = \frac{C}{1+e}, r_2 = \frac{C}{1-e} \right)$
2. 近日点での惑星の速さを v_1 [m/s]、遠日点での惑星の速さを v_2 [m/s] とすると、それぞれの位置での惑星の角運動量の大きさ、 L_1 、及び L_2 を求めよ。ただし、惑星の質量を m [kg] とする。（太陽は重いので動かないとして良い。） $\left(\text{答え} : L_1 = mv_1 r_1, L_2 = mv_2 r_2 \right)$
3. 角運動量の保存則から、近日点、遠日点での惑星の速さの比を離心率 e を用いて記せ。近日点と遠日点では、惑星はどちらで速く動いているか？ $\left(\text{答え} : \frac{v_1}{v_2} = \frac{1+e}{1-e} \right)$ 。近日点で速く動く。
ちなみに、地球の離心率は $e \approx 1/60$ である。

§ 6.4 潮の満ち干き

月と地球は互いに万有引力を及ぼしあいながら、月は地球の周りを回っている。月に比べて地球は重いので、ここでは地球は静止していると考ええる。月の質量を M [kg] とし、月の中心から地球の中心までの距離を r [m]、万有引力定数を G とする。地球の半径を R [m] とする。また、月は地球を中心とした円軌道を描いているとみなす。

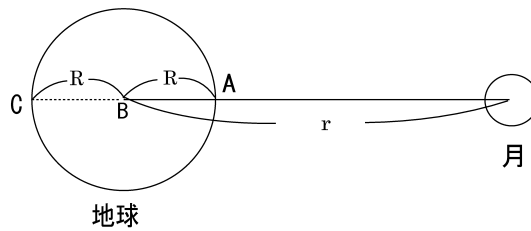


図 10:

月の存在によって地球の各点に働く万有引力を考えてみよう。図 10 の A、B、C の各点におかれた質量 m [kg] の物体に働く月からの万有引力の大きさ、 F_A [N]、 F_B [N]、 F_C [N] ($F_A > 0, F_B > 0, F_C > 0$) を書くと、

$$F_A = G \frac{Mm}{(r-R)^2}, \quad F_B = G \frac{Mm}{r^2}, \quad F_C = G \frac{Mm}{(r+R)^2}$$

となる。

力の大きさには

$$F_A - F_B \approx F_B - F_C (\approx \frac{2GMmR}{r^3}) > 0$$

の関係が得られる。重要なのは $F_A - F_B > 0$ 、 $F_C - F_B < 0$ であることである。すなわち、地球の中心を基準に考えると、A 点では月側に余分の引力を受け、C 点では月と反対側に力を受けるように見える。地球が水で覆われているとすれば、海水面は図 11 に示したように月側とその反対側に膨らむ。これが潮の干満である。よって、潮の干満は 1 日に 2 回おきることがわかる。

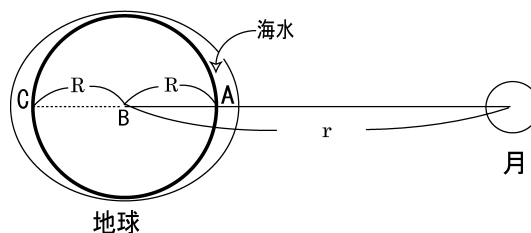


図 11:

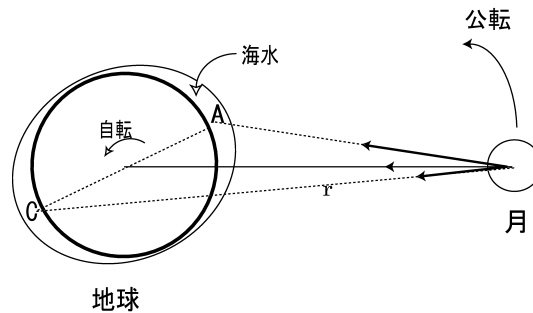


図 12:

実際は地球の自転に際しての、地球表面と海水との摩擦によって、海水の膨らみは図 12 の様な位置関係になる。このとき、図に、A、B、C の各点から月（の中心）が受ける万有引力を、矢印で図示しておいた。

上の結果から、月に働く力は、地球に引かれる部分と月の進む方向の成分に分けられることがわかった。したがって、この力により、月は加速される。月が加速されると月の軌道半径 r は大きくなる。

ケプラーの第 3 法則を用いると、月の軌道が Δr だけ変化したとき、月の公転周期 T がどれだけ変化するかを計算できる。公転周期の変化を ΔT と書くと、 $\frac{\Delta r}{r}$ 、 $\frac{\Delta T}{T}$ の 2 次以上を無視すると $((a + \Delta a)^n \approx a^n + na^{n-1}\Delta a$ として良いということ)

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T}$$

が導かれる。

この結果と、現在の月と地球の距離 ($r = 3.8 \times 10^8 \text{m}$) と公転周期 ($T = 27.3$ 日) を用いると、月の公転軌道が $1.5 \sim 3 \text{km}$ 大きくなると、公転周期は $15 \sim 30$ 秒延びることが言える。もし、月と地球の距離が離れて行くと、月の公転周期は次第に遅くなり、最終的には月の公転と地球の自転が一致するところで月と地球の距離は固定される。すなわち、月から見ると地球はいつも同じ面を向けていることになる。（これは、既に質量の軽い方の月に関しては実現されてしまっている !! 月を見上げたときに気づいていますね。いつも同じうさぎさんが餅をついています !!）地球と月の距離がどれくらいになると固定されるかは角運動量保存則を使うことにより計算できて、それによると、現在の地球と月の距離 38 万 km が、 56 万 km に離れると、地球の自転、月の公転が、現在の 48 日くらいの時間がかかるようになり、地球の面と月の面が固定される。

7章 振動

§ 7.1 単振動

ここでは1次元の運動のみを考えることにする。系がつり合いの状態にあり、静止することが可能であれば、必ずポテンシャルエネルギー $V(q)$ [J] に極小の位置 q_0 があり、そこでは質量 m [kg] の質点には力が働かない。すなわち、力 F [N] はポテンシャルエネルギーの座標微分に負号を付けたものであるので、 $V(q)$ の極小点では

$$F = - \left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} = 0$$

である**。こうして、ポテンシャルエネルギーを極小点 q_0 の周りで展開しよう。

$$V(q) = V(q_0) + \left. \frac{dV(q)}{dq} \right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \cdots$$

ここで、安定点としての極小点 q_0 からの変位 $q - q_0$ を x [m] と書くことにしよう。また、極小点であるので右辺第2項は0、右辺第1項は単なる定数であるので運動には影響を与えないことから、落としてしまう。さらに、右辺第2項の係数を $\left. \frac{d^2V(q)}{dq^2} \right|_{q=q_0} \equiv k$ と書くことにする。もちろん極小点は時間とともに変化しないので、 $dq_0/dt = 0$ である。

このとき、質量 m [kg] の質点に働く力 F [N] は

$$F = - \frac{dV(x)}{dx} = -kx$$

と、変位に比例する††。運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx .$$

となり、整理すると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 , \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

と書ける。こうして、一般に、安定点の周りの運動は、振幅が十分に小さいとしたときに単振動の方程式となる。ここで導入した ω [1/s] を角振動数と呼ぶ。この方程式の解は、§4.1.2 の振り子の運動で見たのと同じ運動方程式を与えるので、解は、

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

となる。ここで、 A と α は初期条件で決まる定数である。 A は振動の振幅である。

(問) 時刻 $t = 0$ で、単振動のつりあいの位置からの変位が x_0 、速度が0であった。このとき、上式の A と α を決めて、単振動の解を完成せよ。

([答え] $A = x_0$ 、 $\alpha = 0$)

(問) 単振動の力学的エネルギーを求めよ。

([答え] $E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$)

§ 7.2 減衰振動

単振動している物体に、速度の 1 次 に比例した抵抗力が働いているとする。抵抗力を $F = -\mu \frac{dx}{dt}$ [N] として、運動方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

となる。整理して

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{ただし} \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\lambda \equiv \frac{\mu}{m} \quad (7.8)$$

と書き直される。この方程式 (7.8) は形式的に

$$\left(\frac{d}{dt} - \gamma_1 \right) \left(\frac{d}{dt} - \gamma_2 \right) x(t) = 0, \\ \gamma_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}, \quad \gamma_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

と書けるので、 $\frac{dx}{dt} - \gamma x = 0$ の解が $x(t) = ce^{\gamma t}$ であることから、上式の一般解は、 $\gamma_1 = \gamma_2$ の場合を除き、2 つの解の線形結合として

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

となる。ここで、 c_1 、 c_2 は運動の初期条件で決まる定数である。こうして、 ω_0^2 と λ^2 の大小関係により、2 つの場合が生じる。

(i) 減衰振動 : $\omega_0^2 > \lambda^2$

このとき、 γ_i のルートの中は負になるので虚数が現れる。こうして一般解は三角関数で書き表わされ^{††}

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

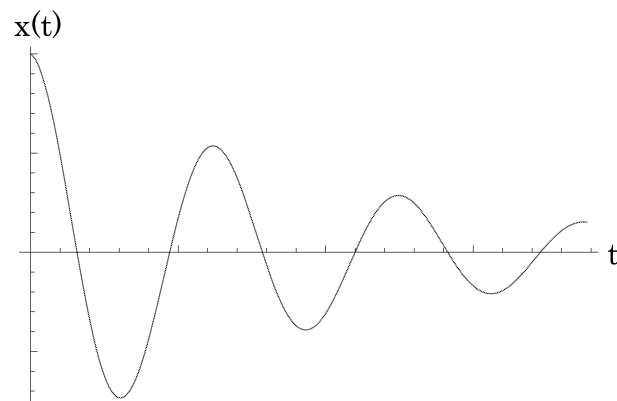


図 13:

**極大点では不安定なつり合いになってしまう。

††フックの法則と呼ばれることがある。

‡‡ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いる。

と書き直される。 A と α は初期条件により決まる定数である。この場合は図 13 のように、振動しながら減衰していく運動が見られる。これを**減衰振動**と呼ぶ。

(ii) 非周期的減衰 : $\omega_0^2 < \lambda^2$

一般解は

$$x(t) = e^{-\lambda t} (c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t})$$

である。ここで c_1 と c_2 は初期条件により決まる定数である。この場合は図 14 のように、単調に減衰していく。この運動は**非周期的減衰**、または**過減衰**と呼ばれる。

(iii) $\omega_0^2 = \lambda^2$ の場合

この場合には、 $\gamma_1 = \gamma_2$ となるので、先の一般解は成り立たない。運動方程式は

$$\left(\frac{d}{dt} - \gamma_1 \right)^2 x(t) = 0$$

となっている。両辺に $e^{-\gamma_1 t}$ をかけると、

$$e^{-\gamma_1 t} \left(\frac{d}{dt} - \gamma_1 \right)^2 x(t) = \frac{d^2}{dt^2} (e^{-\gamma_1 t} x(t)) = 0$$

となるので、時間に関する 2 階微分が 0 であることから

$$e^{-\gamma_1 t} x(t) = c_1 + c_2 t$$

と書ける。ここで、 $\gamma_1 = -\lambda$ であるので、こうして一般解は次の形を持つ。

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

ここで、 c_1 と c_2 は初期条件により決まる定数である。この解も振動せずに減衰していく振る舞いを示す。これは**臨界減衰**と呼ばれる。

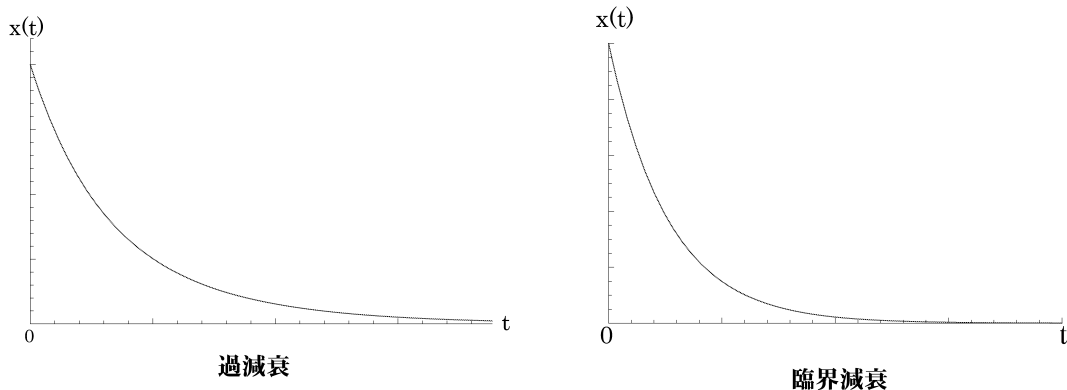


図 14:

(問) x 軸上で変位に比例した力 (バネの様なもの) を受けて調和振動している質量 m [kg] の質点が、速度に比例する抵抗を同時に受けているとする。このとき運動方程式は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + kx(t) = -\alpha \frac{dx(t)}{dt}$$

とかける。ここで $x(t)$ [m] は振動子の変位であり、 k [N/m] はバネ定数、また α [Ns/m] は抵抗係数である。

1. $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ 、 $\lambda \equiv \frac{\alpha}{2m}$ と定義し、(i) $\omega_0^2 > \lambda^2$ 、(ii) $\omega_0^2 < \lambda^2$ の2つの場合にわけて、運動を論じよう。(i) のときには、

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \gamma)$$

が解になる。但し、 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ である。また A 、 γ は初期条件を与えたときに決まる定数である。これを確かめなさい。

2. (ii) のときには、

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t})$$

が解になる。但し、 C_1 、 C_2 は初期条件を与えたときに決まる定数である。これを確かめなさい。

3. 上の (i)、(ii) の場合について、 $x(t)$ を時間の関数としてその概略を図示しなさい。

4. 力学的エネルギー $\left(\text{運動エネルギー} + \text{弾性エネルギー} ; \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right)$ の時間変化率 $\frac{dE}{dt}$ は、抵抗力の仕事によるエネルギー消耗率 $\left(-\alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right)$ に等しいことを示しなさい。

§ 7.3 強制振動

単振動をしている質点が、外場のもとに置かれている状況を考えよう。外場のポテンシャルエネルギーを $V_{\text{ex}}(q)$ とすると、外場がない場合の質点の平衡点 $q = q_0$ の周りに展開する。前と同じように $x = q - q_0$ として、

$$V_{\text{ex}}(x, t) = V_{\text{ex}}(0, t) + \left. \frac{\partial V_{\text{ex}}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} x + \dots$$

となる。第1項は x に依らないので運動には寄与しない。第2項は $-\left. \frac{\partial V_{\text{ex}}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = F(t)$ と書くことにすると、 $F(t)$ は外力に他ならない。こうして、ニュートン方程式は

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) + F(t)$$

と書ける。変位に比例した復元力 kx が単振動を引き起こすが、そこに時間に依存した外力 $F(t)$ が作用している系の運動方程式である。整理して、

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m} F(t), \quad \text{ただし} \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

が得られる。これを**強制振動**と呼ぶ。

外力としての関数型は制限されていないが、ここでは

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta)$$

で振動している場合を扱う。このとき、運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta)$$

と書ける。この方程式の左辺は求めたい関数 $x(t)$ の 1 次であるが、右辺は 0 次であり、数学的には非同次線形微分方程式と呼ばれる。この場合には方程式の解の一つを見つけ（特解）、その解に右辺を 0 とおいた同次方程式の一般解を加えることで求めたい非同次線形微分方程式の一般解が得られることが知られている。特解を探すために、 $x = B \cos(\gamma t + \beta)$ とおいて上の運動方程式に代入してみると、 $-B\gamma^2 + \omega^2 B = \frac{f}{m}$ がえられるので、未知の B が $B = \frac{f}{m} \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2}$ と得られる。外力を零とおいた同次方程式の一般解は単振動の解としてすでに知っているの、結局求めたい一般解として、

$$x(t) = A' \cos(\omega t + \alpha') + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t + \beta)$$

が得られる。このままでは $\omega = \gamma$ のときに発散するように見えるので、特解の B と外場の位相 β を用いて $A' \cos \alpha' \equiv A \cos \alpha - B \cos \beta$ 、 $A' \sin \alpha' \equiv A \sin \alpha - B \sin \beta$ と、 A' 、 α' の代わりに A 、 α を導入すると、最終的に

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \gamma^2} \{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\}$$

が得られる。ここで、 A 、 α は初期条件により決まる定数である。

さて、強制力の角振動数 γ が、系の持つ固有の角振動数 ω に等しくなる場合を考えよう。このときには上の解で $\gamma \rightarrow \omega$ の極限をとると、

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{(\omega + \gamma)(\omega - \gamma)} \{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)\} \\ &= A \cos(\omega t + \alpha) - \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega + \gamma} \frac{\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)}{\gamma - \omega} \\ &\rightarrow A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} \cdot t \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

となる。ここで、2 行目から 3 行目は微分の定義を利用した。こうして、振幅は時間 t とともに増大していくことがわかる。この現象を、**共鳴**と呼ぶ。

(問) 地上で、ばね定数 k [N/m] のばねの下端に質量 m [kg] の質点をつるし、上端の支点を $f \cos \gamma t$ で動かした。ばねの自然の長さを l [m] とする。

1. ばねの上端を動かさないときの運動方程式を書け。ただし、鉛直下向きに x 軸をとり、支点 (ばねの上端) を原点とする。
2. ばねの上端を $f \cos \gamma t$ で動かすときの運動方程式を書け。
3. 2. の運動方程式を解き、どのような条件で共鳴現象が見られるか述べよ。

§ 7.4 摩擦のあるときの強制振動

前節では振動する外場 $f \cos \gamma t$ を考えた。このときには振動の振幅が時間とともに増大することが見られたが、多くの現象では増大し続けるわけではなく、抵抗力を受けて振幅の増大は止まる。そこで、速度の 1 次比例した抵抗力が働くとして、再び振動する外力の下での強制振動を考えよう。運動方程式は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t$$

となる。ただし、 $\omega_0^2 > \lambda^2$ として、外力がない場合には減衰振動をしている系としよう。この方程式は非同次線形微分方程式であるので、解法は前節と同様である。まず、右辺の外力がない場合の一般解は減衰振動の解としてすでに知っている。すなわち、 $x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha)$ 、ただし $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ であった。特解を一つ見つければ良いので、 $x = B \cos(\gamma t - \delta)$ において、 B と δ を決定しよう。運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} & (\omega_0^2 - \gamma^2)B \cos(\gamma t - \delta) - 2\lambda\gamma B \sin(\gamma t - \delta) = \frac{f}{m} \cos(\gamma t) \\ \text{すなわち} \quad & [(\omega_0^2 - \gamma^2)B \cos \delta + 2\lambda\gamma B \sin \delta] \cos(\gamma t) \\ & + [-2\lambda\gamma B \cos \delta + (\omega_0^2 - \gamma^2)B \sin \delta] \sin(\gamma t) = \frac{f}{m} \cos(\gamma t) \end{aligned}$$

となる。ここで、2 番目の式へは三角関数の加法定理を用いた。任意の時刻で成り立つには、 $\cos(\gamma t)$ 、 $\sin(\gamma t)$ の係数を両辺比較して等しいと置くと

$$\begin{aligned} [(\omega_0^2 - \gamma^2) \cos \delta + 2\lambda\gamma \sin \delta] B &= \frac{f}{m} \\ [-2\lambda\gamma \cos \delta + (\omega_0^2 - \gamma^2) \sin \delta] B &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。これを解くと B と δ が決定される。こうして、摩擦がある時の強制振動の解として

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\gamma t - \delta), \\ B &\equiv \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}} \\ \tan \delta &\equiv \frac{2\lambda\gamma}{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 A 、 α は初期条件で決まる定数である。

十分時間がたつと、第 1 項の減衰振動項は零に近くなり、

$$x(t \rightarrow \infty) \longrightarrow B \cos(\gamma t - \delta)$$

となる。十分時間が経つと、振動は強制力の振動の位相から δ だけ遅れるが、強制力と同じ振動数で振動していることがわかる。また、振動の振幅が最大 (B が最大) となる共鳴は、 $\gamma \rightarrow \omega_0$ で見られることがわかる。

8章 粒子の散乱

§ 8.1 2体問題と換算質量

粒子1 (質量 m_1 [kg]) が位置 $\mathbf{r}_1$ に、粒子2 (質量 m_2 [kg]) が位置 $\mathbf{r}_2$ に居たとする。この2物体は互いに力を及ぼしているとしよう。このとき、慣性中心の座標 $\mathbf{R}$ と、相対座標 $\mathbf{r}$ を導入する。

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

逆に、慣性中心の座標と相対座標を粒子の位置座標で表わすと

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{M} \mathbf{r}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \\ \text{但し} \quad M &= m_1 + m_2 \end{aligned}$$

となる。粒子1が粒子2から及ぼされる力を $\mathbf{F}_{12}$ [N]、粒子2が粒子1から及ぼされる力を $\mathbf{F}_{21}$ [N] とすると、作用・反作用の法則から $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ となる。こうして、ニュートン方程式は

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} \quad m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

と書ける。今、 $\mathbf{r}_1$ 、 $\mathbf{r}_2$ を $\mathbf{R}$ と $\mathbf{r}$ で表すと、上のニュートン方程式は

$$m_1 \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{m_2}{M} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2 \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - \frac{m_1}{M} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) = -\mathbf{F}_{12}$$

となるが、辺々足したり引いたりすることで、

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} &= \mathbf{0}, & \mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \mathbf{F}_{12}, \\ \text{ここで} \quad \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{8.9}$$

を得る。ここで、 μ は**換算質量**と呼ばれる。上の第1式は、2粒子の慣性中心 $\mathbf{R}$ は等速直線運動、 $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (\text{一定})$ をすることを示している。第2番目の運動方程式は、相対座標 $\mathbf{r}$ の変化が力を受けて起きることを意味する。こうして、互いに相互作用を及ぼす2粒子問題は、あたかも換算質量 μ [kg] を持った1粒子が力を受けて運動しているとのみ考えればよいことになる。

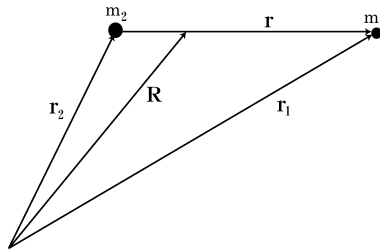


図 15:

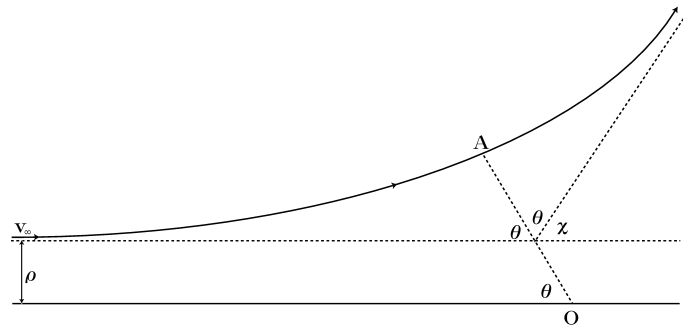


図 16: 点 A は軌道上で力の中心 O に最も近い点。軌道は $\overline{OA}$ に対して対称である。また、 χ は慣性中心系での散乱角であり、 θ は入射粒子の無限遠での軌道と、 $\overline{OA}$ の為す角である。ここで、 $\overline{OA} = r_{\min}$

§ 8.2 散乱角

力の中心を原点 O にとる。無限遠方から力の中心に向かってやってきた質量 m [kg] の粒子が、力を受けてどれくらい軌道が曲げられるかを考察しよう。これは粒子の散乱の問題に他ならない。問題とするのは、無限遠方からやってきた粒子がどれくらい曲げられて無限遠方に去っていくかの角、すなわち散乱角 χ [rad] の決定である。

図 16 より、散乱角 χ は

$$\chi = |\pi - 2\theta|$$

となる。ここで、6 章「中心力の問題」の (6.6) 式から、 θ と r の関係は、

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2}}{\sqrt{2m[E - V(r)] - \frac{L^2}{r^2}}} dr$$

と得られている。但し、 $r_{\min} = \overline{OA}$ は、分母のルートの中の根として求められる。なぜなら、点 A で粒子の r 方向の速さは 0 となるからである。すなわち、 $\frac{dr}{dt} = 0$ 。今、

$$\rho : \text{衝突径数 (図 16 を参照)}, \quad v_{\infty} : \text{無限遠方での粒子の入射速度}$$

を用いると、保存する粒子のエネルギー E と角運動量 L は、無限遠方での値を用いて、常に

$$E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2, \quad L = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m\rho v_{\infty}$$

となるので、上の角度 θ の式は、

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2V(r)}{mv_{\infty}^2}}} dr \quad (8.10)$$

となる。

ポテンシャルエネルギー $V(r)$ が r の関数としてわかっているとき、入射粒子の ρ と v_{∞} を与えれば、散乱角 χ は $\chi = |\pi - 2\theta|$ として、決定される。

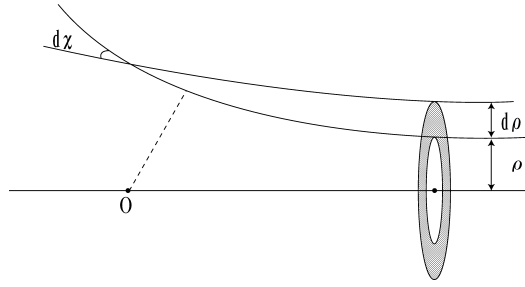


図 17:

§ 8.3 散乱断面積

粒子のビームを散乱中心（力の中心）に向けて投入したとしよう。散乱中心へ向けて、単位時間、単位面積あたり n 個の粒子が通過するとする。衝突径数 ρ とその周りの微少な半径方向の長さ $d\rho$ を考え、 ρ と $\rho + d\rho$ の間から来る粒子が、散乱角 χ と $\chi + d\chi$ の間に散乱された粒子数を dN とする。このとき、比 $\frac{dN}{n}$ を微分断面積と呼び、散乱過程を特徴付ける量となる。

$$d\sigma = \frac{dN}{n} : \text{微分断面積}$$

このとき、図 17 より

$$dN = 2\pi\rho d\rho \cdot n$$

であるので、衝突径数 ρ を散乱角 χ の関数と見て、 $d\rho/d\chi$ が負になる場合までを考慮して絶対値をとっておくと、微分断面積 $d\sigma$ は

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (8.11)$$

と書ける。ここで、“立体角” $d\Omega$ は、 $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ となっているので、微分断面積は

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega \quad (8.12)$$

と得られる。

全断面積 σ は、微分断面積を全立体角で積分して、

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi} \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \rho(\chi) \left| \frac{d\rho(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (8.13)$$

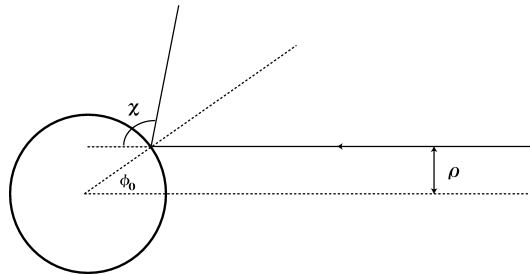


図 18:

と得られる。

簡単な例を挙げておこう。半径 a の剛体球 ($r < a$ で、 $V(r) = \infty$ 、 $r > a$ で、 $V(r) = 0$) による粒子の散乱断面積を求めてみる。衝突径数 ρ と散乱角 χ の間の関係は、図 18 より、明らかに

$$\rho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2}$$

である。よって、微分断面積 (8.11) は、

$$d\sigma = 2\pi a \cos \frac{\chi}{2} \left| -\frac{a}{2} \sin \frac{\chi}{2} \right| d\chi = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi d\chi = \frac{a^2}{4} d\Omega \quad (\text{ここで、} d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi)$$

となる。したがって、全断面積 σ は、

$$\sigma = \int \frac{a^2}{4} d\Omega = \frac{\pi a^2}{2} \int_0^\pi \sin \chi d\chi = \pi a^2$$

と得られる。この場合には、入射粒子が剛体球を見込む幾何学的断面積に一致していることがわかる。

§ 8.4 ラザフォード散乱

クーロン場（静電場）による質量 m [kg] の荷電粒子の散乱を考えよう。ポテンシャルエネルギー $V(r)$ は

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \alpha = \frac{Ze \cdot ze}{4\pi\epsilon_0}$$

とかける。ここで、 e [C] は素電荷 ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C])、 Z は標的の原子核の電荷（陽子数）、 z は入射粒子の原子核の電荷（陽子数）、 ϵ_0 は真空の誘電率 ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ [F/m]) である。このとき、(8.10) 式から、衝突係数を ρ 、入射粒子の初速を v_∞ として、

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2} \cdot \frac{1}{r}}} dr = -\arccos \frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2 \rho}\right)^2}}$$

となり、少し整理すると、

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \tan^2 \varphi_0 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \cdot \frac{1}{\tan^2 \frac{\chi}{2}}, \quad \left(\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2} \right)$$

が得られる。よって、散乱の微分断面積 $d\sigma$ は、(8.11) 式にあてはめると、($d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ に注意して)

$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \\ &= \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \end{aligned}$$

となる。

歴史的にはラザフォード散乱として知られる、金原子核によるアルファ粒子の散乱を見ておこう。原子核にアルファ粒子（ヘリウム原子核）をあてて、散乱実験を行う。ヘリウム原子核の電荷は $2e$ なので、 $z = 2$ 。よって、微分断面積は

$$d\sigma = \left(\frac{2Ze^2}{2mv_\infty^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

となる。今、散乱の微分断面積の定義から、立体角 $\Delta\Omega$ に散乱されてくるアルファ粒子の個数を ΔN とすると

$$\Delta N = nd\sigma = n \left(\frac{2Ze^2}{2mv_\infty^2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}$$

である。以下に実験データの一例を示しておこう。

χ	$\sin^4 \frac{\chi}{2}$	ΔN	$\Delta N \cdot \sin^4 \frac{\chi}{2}$
150°	0.8705	33	28.8
60°	0.0625	477	29.8
45°	0.0214	1435	30.7

上式から、 $\Delta N \times \sin^4 \frac{\chi}{2}$ は定数となるべきであるが、実験データもっその様になっており、散乱公式の有用性が確かめられる。ただし、実際には、原子核散乱は量子力学で扱わなければならない問題であり、古典力学に基づくラザフォードの結果が量子力学で求めた結果と一致したのは幸運である。

9 章 流体の運動方程式

§ 9.1 流体の運動方程式

水や空気等の流体を扱ってみよう。流体内の微小な部分を考えて、この部分の質量密度を $\rho(\mathbf{r})$ [kg/m³]、単位体積に働く力を $\mathbf{f}$ [N/m³] とすると、ニュートン方程式は

$$\rho \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{a}$ [m/s²] は流体内の注目している点での流体の加速度である。流体内の注目している点に働く力 $\mathbf{f}$ を考えよう。まず、近傍の 2 点 x と $x + \Delta x$ を考え、そこでの圧力を $p(x)$ [Pa]、及び $p(x + \Delta x)$ とする。圧力は単位面積あたりの力であるので、圧力差に起因する力 F [N] は

$$F = (p(x) - p(x + \Delta x))S$$

となる。ここで、 S は x 軸に垂直な面積である。単位体積あたりの力が f であったので、 $F = f \times S \Delta x$ より、

$$f = \frac{p(x) - p(x + \Delta x)}{\Delta x} \rightarrow -\frac{\partial p(x)}{\partial x}$$

と書ける。力の各方向の成分は

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$$

となる。圧力 (単位面積あたりに働く力) の差に起因する力 (圧力の勾配) $-\nabla p$ となる。

ほかに、粘性による力 $\mathbf{f}_{\text{粘性}}$ 、外力によるもの $-\rho \nabla \phi$ がある。ここで、 ϕ [J/kg] は外力のポテンシャルエネルギーである。

$$\mathbf{f} = -\nabla p + \mathbf{f}_{\text{粘性}} - \rho \nabla \phi .$$

流体粒子の加速度を求めよう。近傍の 2 点 P_1 と P_2 を考え、点 P_2 は点 P_1 から、時間 Δt だけ後に流体粒子が到達した点とする。これら 2 点での速度の変化は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(P_2) - \mathbf{v}(P_1) &= \mathbf{v}(x', y', z', t') - \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ &= \mathbf{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) - \mathbf{v}(x, y, z, t) \\ &\approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t \end{aligned}$$

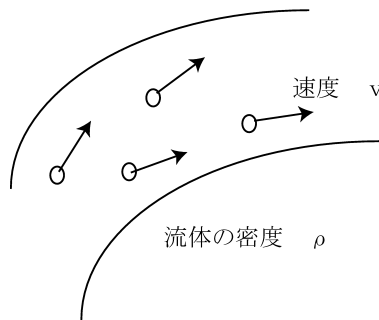


図 19:

となる。微小時間 Δt で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、点 P_1 での速度の変化率、すなわち加速度が求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(P_2) - \mathbf{v}(P_1)}{\Delta t} \\ &= v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \end{aligned}$$

よって、流体を記述するための基礎になる運動方程式として、この節の最初に記したニュートン方程式より、加速度 $\mathbf{a}$ 、力 $\mathbf{f}$ を代入して、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mathbf{f}_{\text{粘性}}}{\rho} - \nabla \phi$$

が得られる。

§ 9.2 完全流体の場合

粘性による力が無視できる ($\mathbf{f}_{\text{粘性}} \approx 0$) 簡単な場合を考えてみよう。今導いた運動方程式 (前式を見よ) は

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \rho \nabla \phi$$

となる。ここで、左辺第 2 項は

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (v^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

と書き直せることに注意せよ。今、一様な流体 ($\rho = \text{一定}$)、かつ定常流 ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$)、さらに渦無し ($\text{rot } \mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$) の場合を考える。このときには運動方程式は、さらに簡単に

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi \right) = 0$$

と書けてしまう。時間にあからさまに依存しない定常流であったことと、上式を空間変数で積分してしまうことにより、

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \phi = (\text{時間} \cdot \text{空間に依存せず、一定})$$

が得られる。すなわち、外力のポテンシャル ϕ が等しいところでは、速さ v が小さいと圧力 p は大きく、逆もまた然り、ということがわかる。

◎ ボールの回転

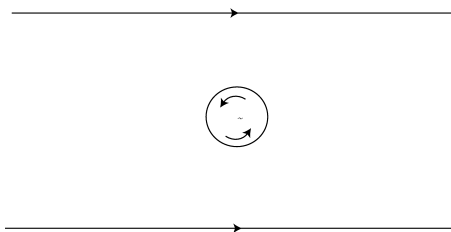


図 20:

- ◎ 飛行機の揚力
- ◎ 台風で屋根が飛ぶ
- ◎ 動脈硬化
- ◎ 山上での気圧

10 章 波動現象

§ 10.1 波動方程式

形を変えず、一定の速さで進む流体を考えよう。

時刻 t_0 での波の形（流体表面の“山”“谷”の形）が関数 $f(x)$ で表されるとする。この波が x 軸に沿って正の向きに進んでいるとしよう。時刻 $t_0 + t$ では、波の形は変わらず関数 f で表されるが、波が移動したので $f(x - vt)$ と書ける。波の各点は距離 vt 進んだので、 x が vt だけ大きいところが t_0 での元々の波の形と同じになっているからである。

よって“波動” ξ は、 x 軸正の向きに進むときには

$$\xi(x, t) = f(x - vt)$$

となり、負の向きに進むときには、速度の向きが異なるので v を $-v$ として

$$\xi(x, t) = g(x + vt)$$

というように、空間 x 、時間 t に対する依存性を持つ。

波を表す方程式を考えてみよう。方程式が時間の 1 階微分を含むとすると、“右”(x 軸正の向き)に動く波では $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \frac{d\xi}{d(x - vt)}$ と、 $-v$ が現れる。一方、“左”(x 軸負の向き)に動く波では $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v \frac{d\xi}{d(x + vt)}$ と、 $+v$ が現れる。右に進むか左に進むかという人為的なもの（“右”と“左”は座標の取り方で変わる人為的なもの）で結果が変わるのはおかしいので、基礎方程式としては時間に関して 2 階微分を含むことが必要になる（ $(-v) \times (-v) = v \times v = v^2$ ）。したがって、 $\xi(x, t) = f(x - vt)$ 、 $\xi(x, t) = g(x + vt)$ とともに満たされる方程式として

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$$

が得られる。（座標微分は“右”に進む波も、“左”に進む波も、 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d(x \pm vt)}$ となって、同じ結果を与えている。）今は波動の進行する方向を x 軸方向に限定したが、一般には空間は 3 次元であるから、空間微分を $\partial^2/\partial x^2 \rightarrow \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ に置き換えて

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \nabla^2 \xi = 0$$

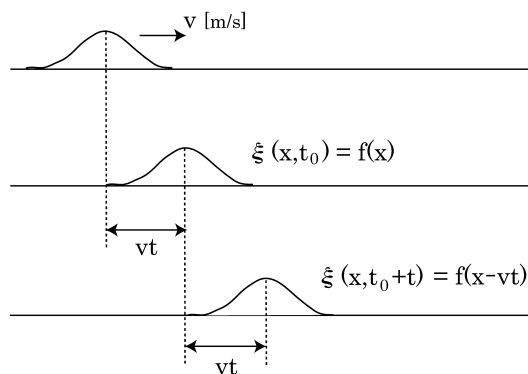


図 21:

とすれば良い。これを**波動方程式**と呼び、**波**という現象を記述する基礎方程式である。ここに現れた v は、導出から明らかなように波の進行する速さである。

§ 10.2 振動数・波長

波の簡単な例として、正弦波を考えてみよう。

$$\xi(x, t) = A \sin(\omega t - kx) = A \sin(-k(x - vt)) , \quad \text{但し } v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

は、1次元波動方程式 $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$ の解である。実際、代入して確かめてみればよい。

x を $x + \frac{2\pi}{k}$ としても、 $\xi(x, t)$ の形は全く変わらない。ここで、

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{2\pi}{k} & : \text{波長} \\ k & : \text{波数} \end{aligned}$$

と呼ぶ。**波長**は波の山（谷）から山（谷）までの長さ、**波数**は長さ 2π の中に含まれる波（の山または谷）の数である。

時間 t を $t + \frac{2\pi}{\omega}$ としても、 $\xi(x, t)$ の形は全く変わらない。ここで、

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} & : \text{周期} \\ \nu = \frac{1}{T} & : \text{振動数} \end{aligned}$$

と呼ぶ。**周期**は波の山（谷）から次の山（谷）がやってくるまでの時間、**振動数**は単位時間あたりやってくる波の数である。 $\omega = 2\pi\nu$ の関係があり、 ω を**角振動数**と呼ぶ。

また、波の速さ v と角振動数 ω 、波数 k の間には $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ の関係があった。よって、

$$v = \lambda\nu$$

の関係が成り立っていることがわかる。

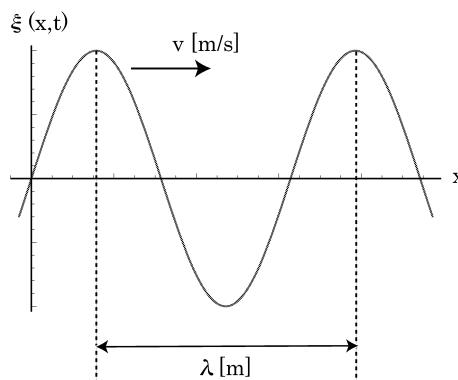


図 22:

§ 10.3 音波

音は空気の疎・密が伝わる波動現象である。

空気の密度を ρ 、考えている空気柱の断面積を S 、注目している空気の部分の幅を Δx 、1 及び 2 の面に働く圧力を P_1 、 P_2 、空気の変位を ξ と書く（図を参照）と、ニュートン方程式は

$$\rho S \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P_1 - P_2) S \quad (10.14)$$

と書ける。時間 Δt におきる（注目している 1 と 2 の面で挟まれた）空気の体積変化 ΔV は、2 の面と 1 の面の移動した距離の差 $v_2 \Delta t - v_1 \Delta t$ に断面積 S を掛けたものである。ここで、 v_1 、 v_2 は 1、及び 2 の面が動く速さである：

$$\Delta V = (v_2 \Delta t - v_1 \Delta t) S$$

よって

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = S(v_2 - v_1) = \frac{V}{\Delta x} (v_2 - v_1) = V \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (V = S \cdot \Delta x) \quad (10.15)$$

空気の疎密の変化は熱量の変化無く早く行なわれる（断熱変化）ので、断熱変化では気体の体積 V と圧力 P の間には

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (10.16)$$

という関係があることが知られている（「熱力学」で習う）。ここで、 γ は“定圧熱容量” C_P と“定積熱容量” C_V の比で、 $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ である。(10.16) 式から、断熱変化での体積の変化 ΔV と圧力の変化 ΔP の関係は、

$$\Delta P = \Delta \left(\frac{\text{一定}}{V^\gamma} \right) = -\gamma \frac{\text{一定}}{V^{\gamma+1}} \Delta V = -\gamma \frac{P}{V} \Delta V$$

として得られる。

さて、(10.14) 式に戻ると、右辺は圧力の変化 $\Delta P = P_2 - P_1$ が表れているので、整理しておくと

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\Delta P$$

となるが、断熱変化での圧力変化を代入して

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\Delta P}{\Delta x} = \gamma \frac{P}{V} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \gamma \frac{P}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

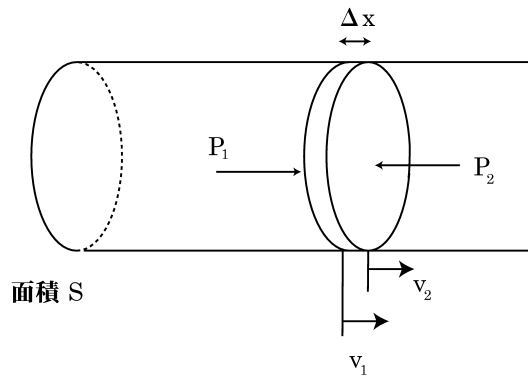


図 23:

となる。ここで (10.15) 式を用いて、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとって微分で書く。このとき、速さ v は変位 ξ を使って $v = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ であることから、上の式は

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \gamma P \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma P \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial x} = \gamma P \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

が得られる。最終的に整理して

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \gamma \frac{P}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \quad (10.17)$$

となる。これは**波動方程式**であり、空気の疎密は波動として伝わることがわかる。これが**音波**である。また波としての音の速さ v は波動方程式から

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (10.18)$$

であることがわかる。

[註] 空気中を伝わる音速を概算してみよう。空気は窒素（分子量 28）と酸素（分子量 32）が 4 対 1 で混合しているので、空気の密度は $0.8 \times 28 + 0.2 \times 32 = 28.8$ g/mol。1 モルあたり気体は 22.4 リットル占めるので

$$\rho = \frac{28.8 \times 10^{-3} \text{ [kg/mol]}}{22.4 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{/mol]}} = 1.29 \text{ [kg/m}^3\text{]}$$

酸素も窒素も 2 原子分子なので、定積熱容量は $C_V = \frac{5}{2}R$ 、定圧熱容量は $C_P = \frac{7}{2}R (= C_V + R)$ である。ここで R は気体定数。こうして、

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1.4$$

温度 0 °C で大気の圧力 P は

$$P = 1.013 \times 10^5 \text{ [N/m}^2\text{]} (= \text{[Pa]})$$

よって、音速 v は

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{1.4 \times \frac{1.013 \times 10^5}{1.29}} = 332 \text{ [m/s]}$$

大文字	小文字	読み方	大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ	N	ν	ニュー
B	β	ベータ	Ξ	ξ	グザイ (クシー)
Γ	γ	ガンマ	O	o	オミクロン
Δ	δ	デルタ	Π	π	パイ
E	ϵ, ε	イプシロン	P	ρ	ロー
Z	ζ	ゼータ (ジータ)	Σ	σ	シグマ
H	η	イータ	T	τ	タウ
Θ	θ	シータ	Υ	υ	ウプシロン
I	ι	イオタ	Φ	ϕ, φ	ファイ
K	κ	カッパ	X	χ	カイ
Λ	λ	ラムダ	Ψ	ψ	プサイ
M	μ	ミュー	Ω	ω	オメガ