2011年度 森林統計学

第12回 7月5日 検定

講義資料

高知大学農学部 森林科学コース主
担当 鈴木保志

過去の試験問題から

問1. 以下のいずれかの問題を選択して答えよ(15点)。
・・・
③[中心極限定理] 調査や実験などでは未知の母集団についての何らかの平均値を推定するためにデータを採取する。この目的のためには、データ数は大きくした方が好ましいが、その理由を統計の理論と関連付けて説明せよ。

- しばらく（課題の返却時間の間）時間をとります
- 各自、試験のつもりで教科書やノートを見ずに、答を書いてみること。

定理2（中心極限定理）

定理2. xが平均μ、標準偏差σのある分布に従うとき、大きさnの無作為標本に基づく標本平均$\overline{x}$は、nが無限に大きくなるとき、平均μ、標準偏差$\sigma/\sqrt{n}$の正規分布に近づく。

- 要点: $\overline{x}$の分布は (nが大きければ正規分布に従い、)

① $\overline{\overline{x}} \fallingdotseq \mu$

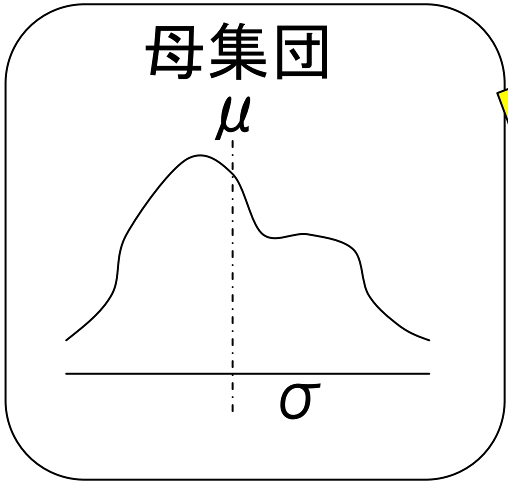
② $s_{\overline{x}} \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

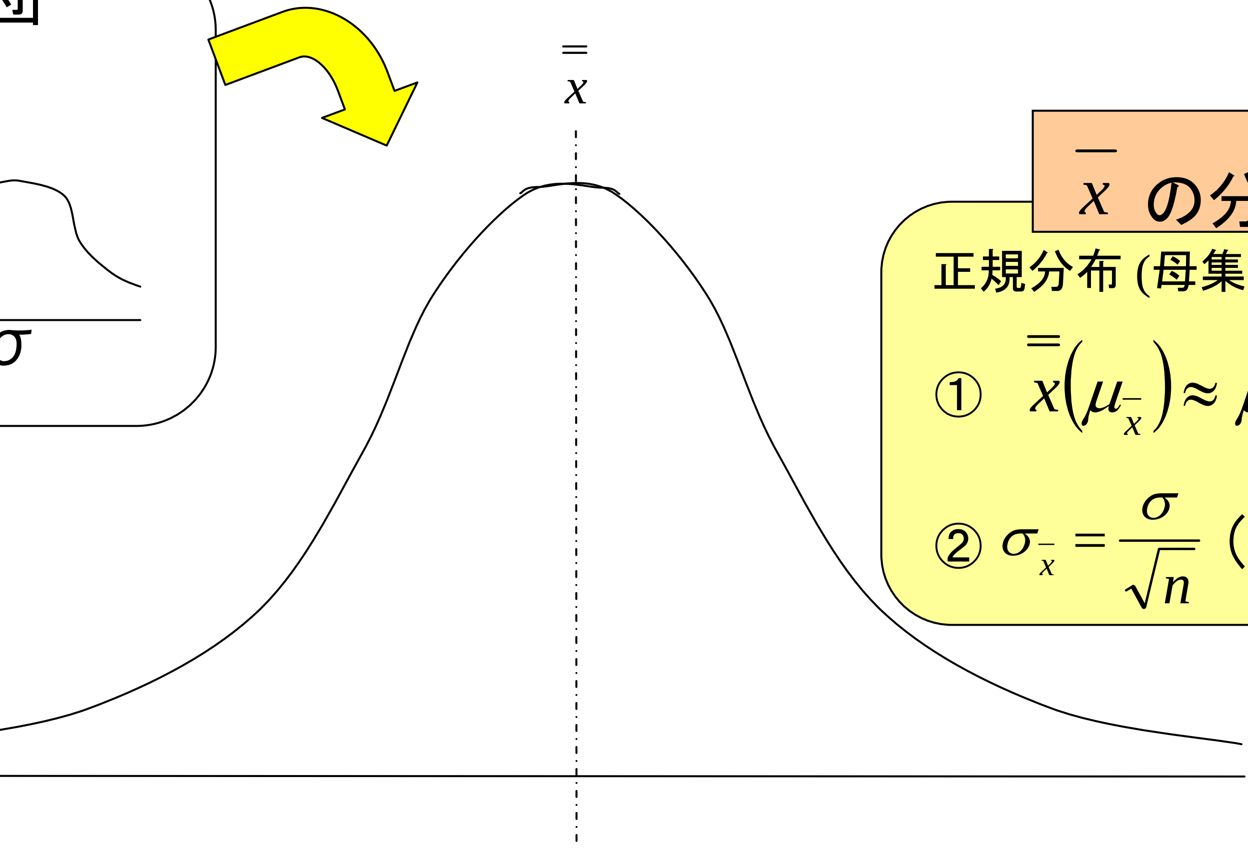
となる

- nが大きくなるほどμの推定精度が高くなる。
- 実は標本抽出の回数には関係ない（どの標本も同じ確度）

定理2 のイメージ

n 個の標本($x_1, x_2, \ldots, x_n$)抽出→ $\bar{x}$ を算出





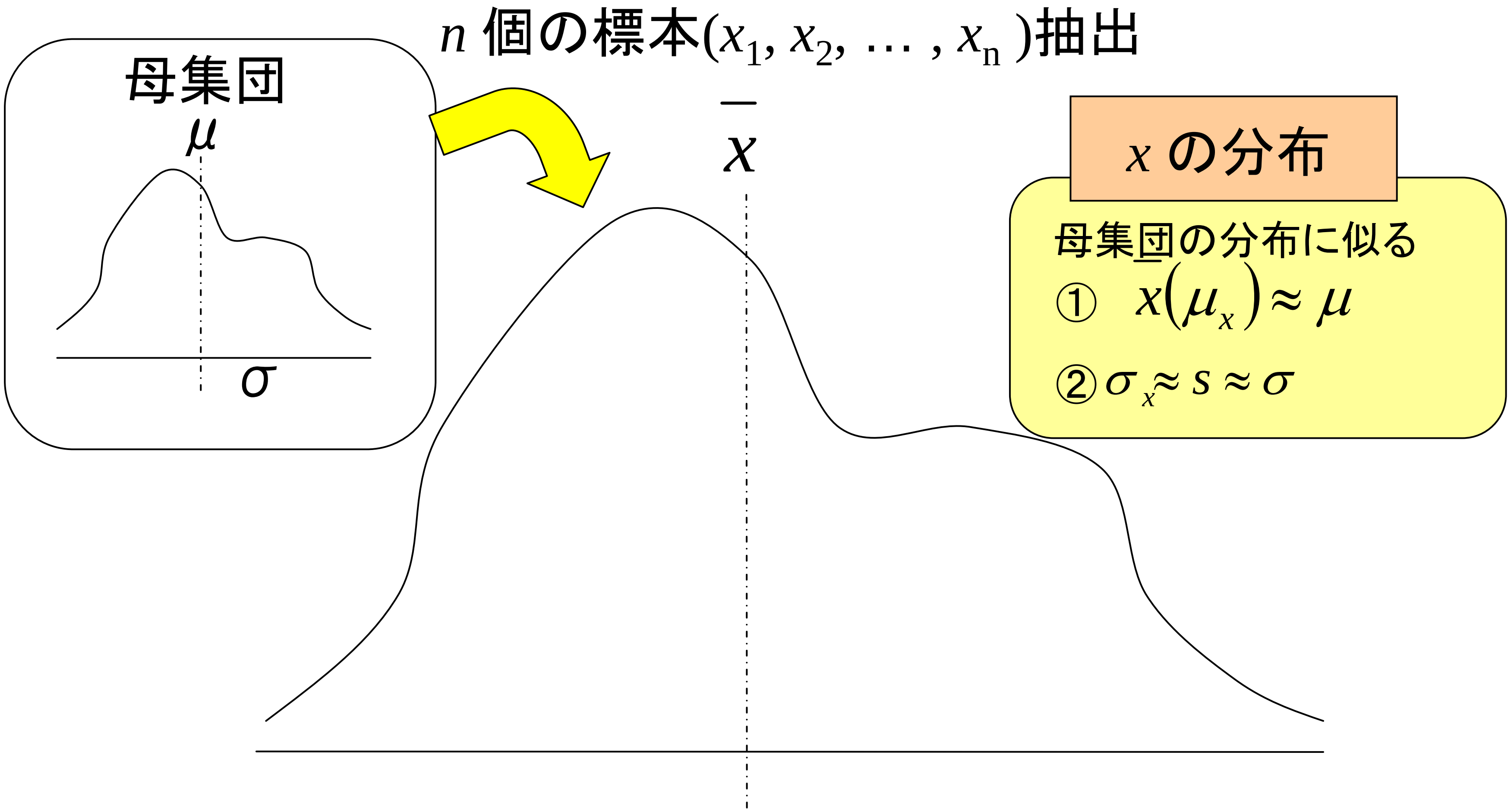
$\bar{x}$ の分布

正規分布 (母集団に関わらず)

① $\bar{\bar{x}}\left(\mu_{\bar{x}}\right) \approx \mu$

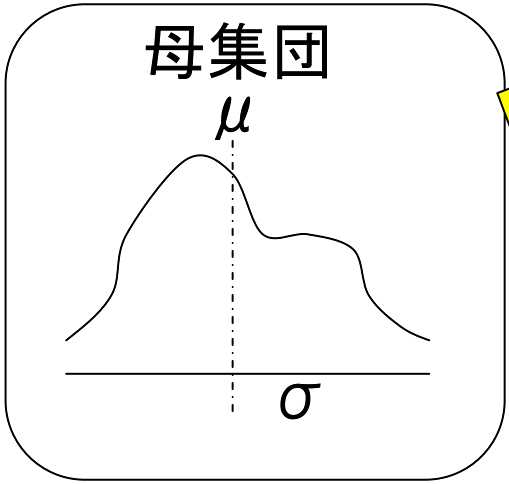
② $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

単なる x の分布だと…

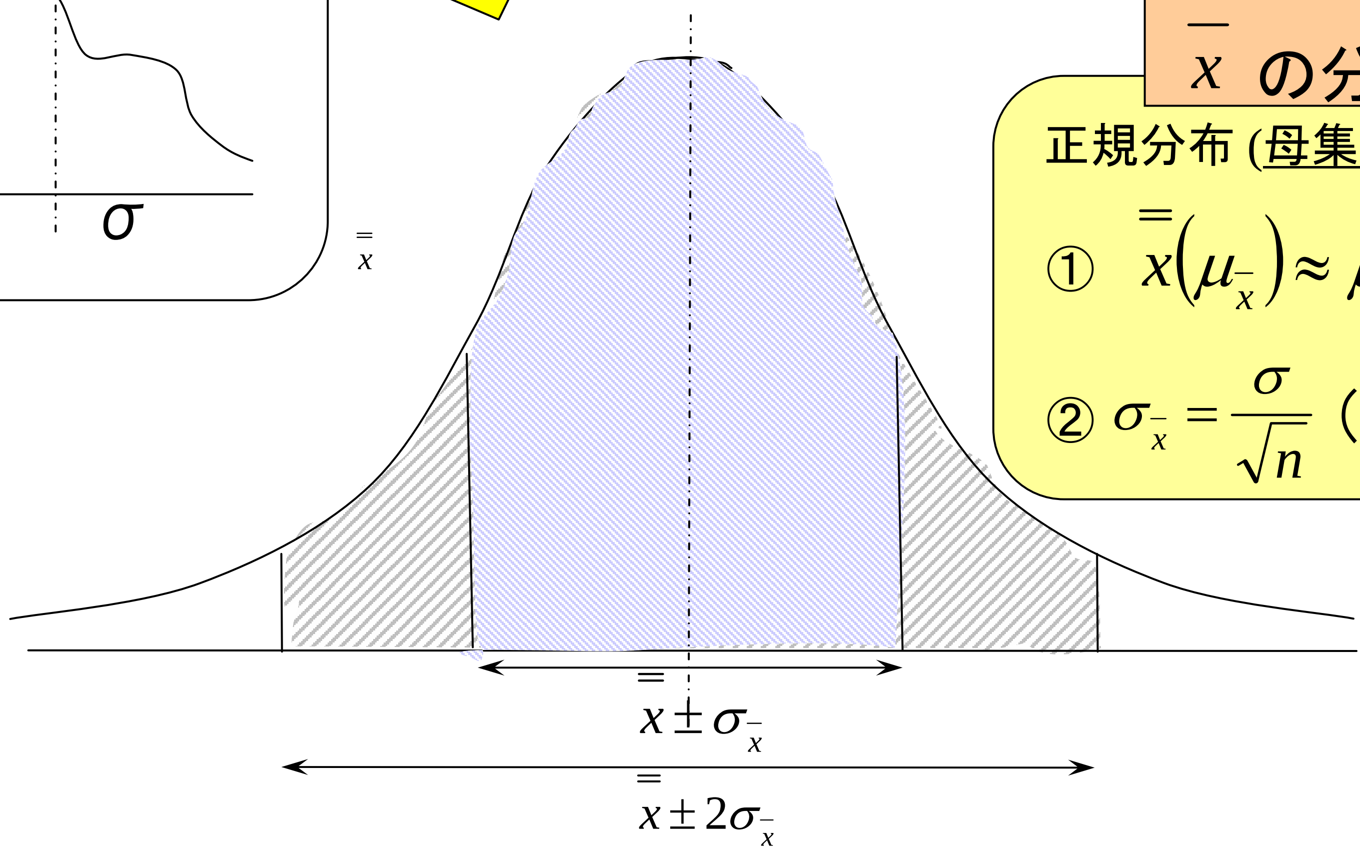


- 課題4 だと、抽出した標本で作ったヒストグラムがこれに相当する

定理2 のイメージ



n 個の標本$(x_1, x_2, \dots, x_n)$抽出→ $\bar{x}$ を算出



$\bar{x}$ の分布

正規分布 (<u>母集団に関わらず</u>)

① $\bar{\bar{x}}\left(\mu_{\bar{x}}\right) \approx \mu$

② $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

- 正規分布なので、平均値±標準偏差に入る確率は正規分布表に従う→推定に正規分布表を利用できる

[課題4]のコメント

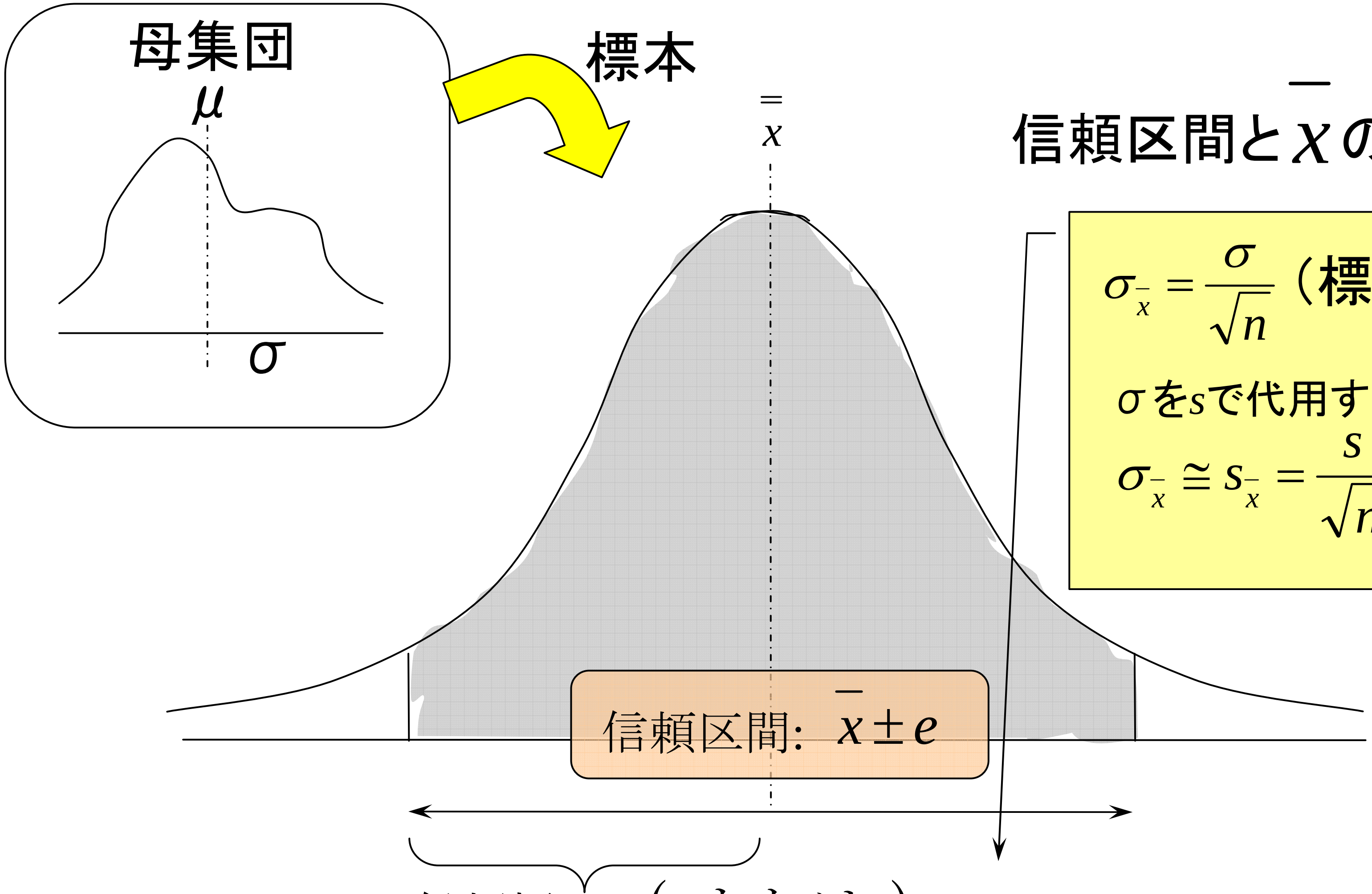
- 標本抽出の方法、$\bar{x}$ や s の計算はおおむねできていた
- 母集団の集計、ヒストグラムの作成などの復習もおおむねOK
- 適切なケタどりに注意
  - 元データの計測精度 m に対し、$\bar{x}$ や s は $m/10$ 程度が目安
- 考察して欲しかった要点は…

[課題4]の考察の要点

- 考察(1)：「$\bar{x}$ の分布は定理2のようになっているか?」
- 考察(2)：「s は σ の不偏推定値になっているか?」
  - 個々の s はバラツキはあっても σ くらいの値
    - なので σ を s で置き換えることができる
  - $\bar{x}$ のバラツキ($s_{\bar{x}}$)は n が大きい方が小さい
    → その程度は「定理2」に従う

もういちど自分のデータで確認してみよう

信頼区間と$\bar{x}$の分布



$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

σをsで代用すると

$\sigma_{\bar{x}} \cong s_{\bar{x}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ となる

信頼幅 $e = \left(z\text{または}t\right) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

95%が使われることが多い

信頼区間の推定手法

母集団: 平均 μ , 標準偏差 σ
標本: 標本数 n, 標本平均 $\bar{x}$, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes

定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{\bar{x}} = \mu \,,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\ z = \frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

No

nは大きい? $n \geqq 25$?

Yes

定理2: σ をsで代替可

$$\bar{\bar{x}} = \mu \,,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}},\ z = \frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

No

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{\bar{x}} = \mu \,,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\ t = \frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z$または$t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

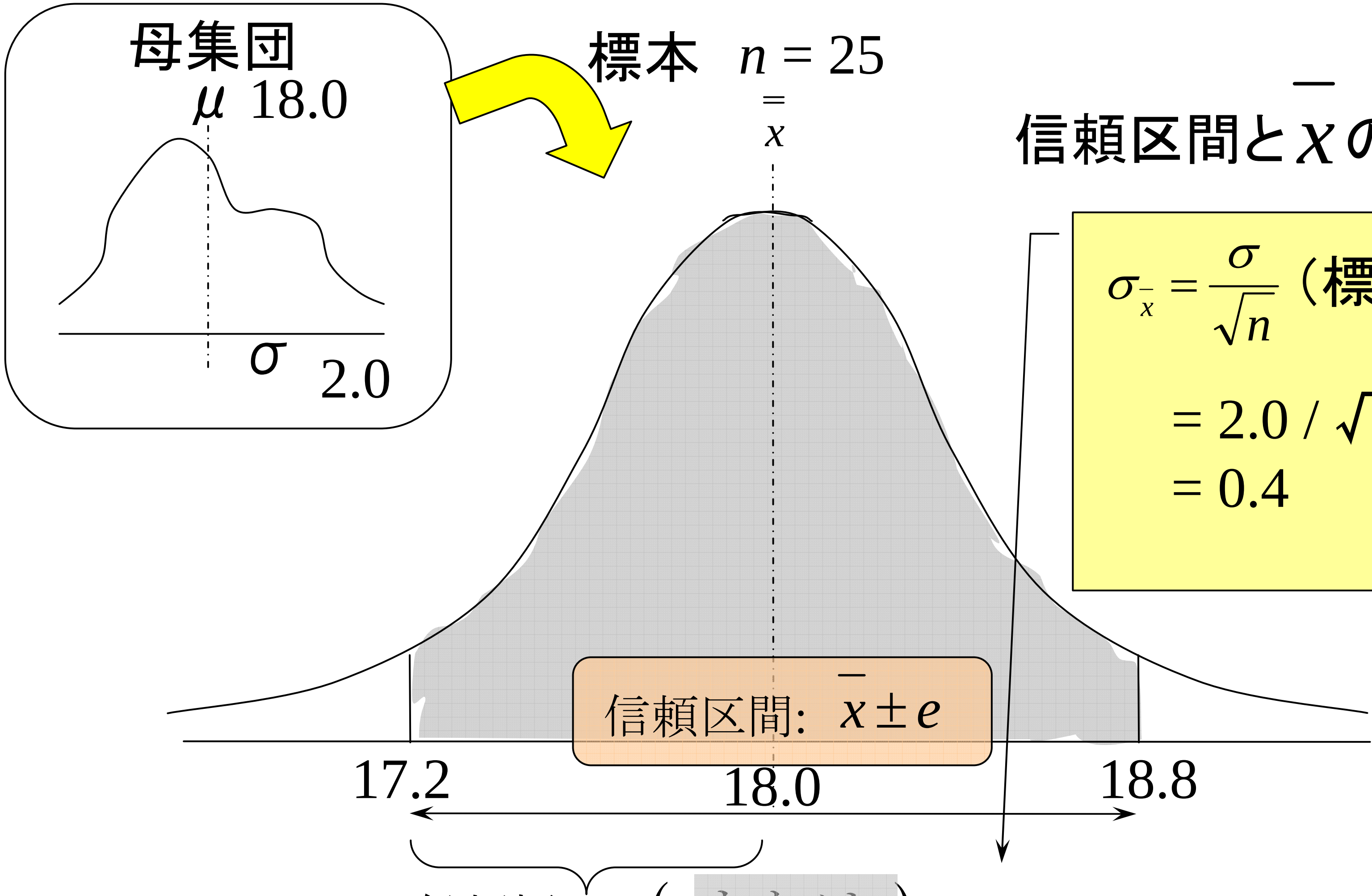
例題 (p.150) で復習

- 車の燃費
  - 母集団(これまでの車): $\mu = 18.0$, $\sigma = 2.0$
  - 標本(添加物実験): $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

(a), (c) $n = 25$ の標本平均の信頼区間は?

- その中に 18.5 が入っているなら添加物の効果はない

信頼区間と$\bar{x}$の分布



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

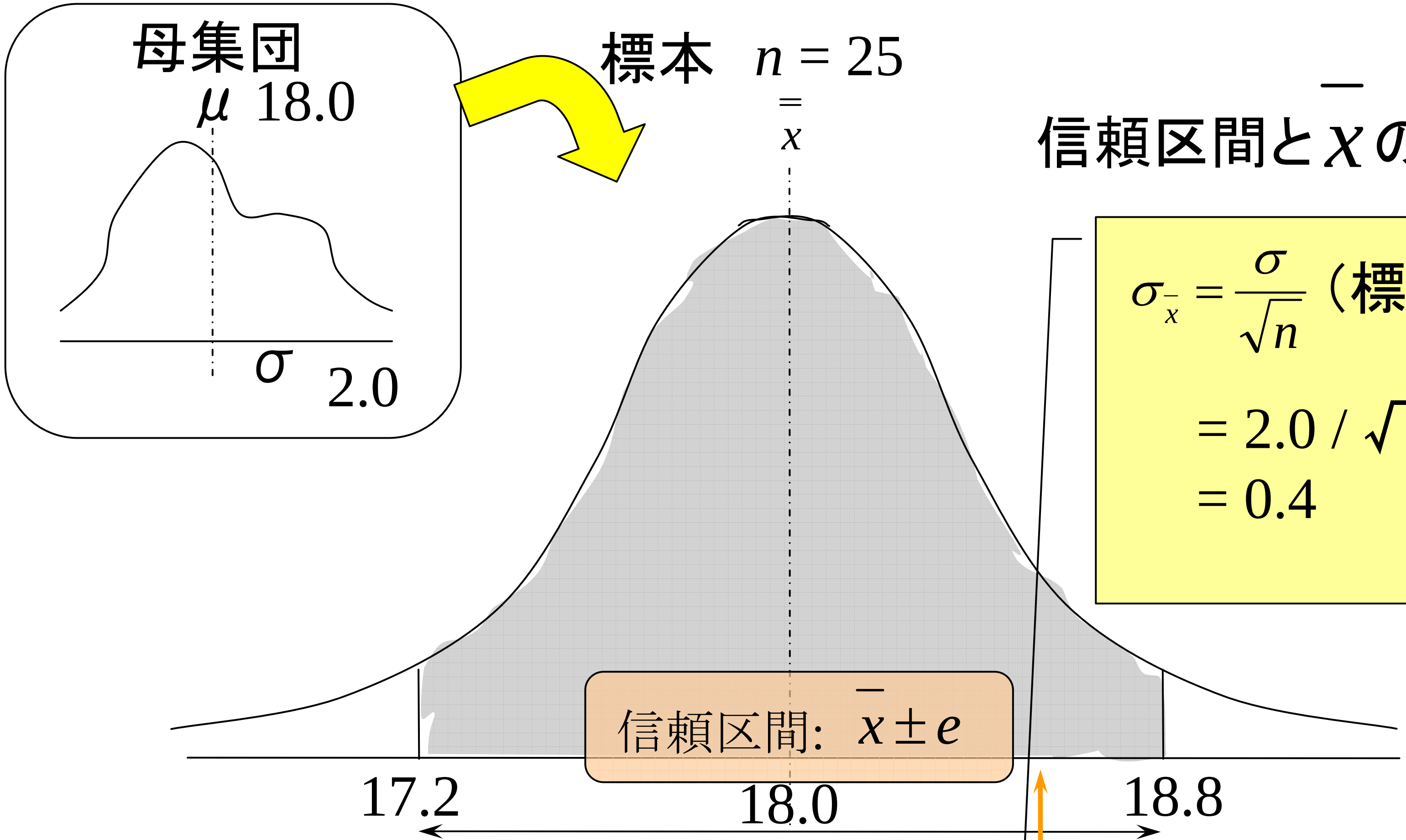
$$= 2.0 / \sqrt{25}$$
$$= 0.4$$

信頼幅 $e = \left(z \text{または} t\right) \times \sigma_{\bar{x}} = 1.96 \times 0.4 = 0.78$

信頼確率 0.95 → z = 1.96

95%

信頼区間と$\bar{x}$の分布



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{（標準誤差）}$$

$$= 2.0 / \sqrt{25}$$

$$= 0.4$$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 1.96 \times 0.4 = 0.78$

<u>信頼確率</u> 0.95 → z = 1.96

95%

標本の 18.5 はこの範囲内

∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

例題 (p.150) で復習

- 車の燃費
  - 母集団(これまでの車): $\mu = 18.0$, $\sigma = 2.0$
  - 標本(添加物実験): $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

(b) 信頼幅が0.5 (信頼区間が1.0) より狭くなるようにするには、n をいくつにすればよいか?

  - 現状($n = 25$) の信頼幅は0.78; もっと精度よく、添加物実験車の μ (μ')を推定したい

(b) 信頼幅 $e < 0.5$ となる n ?

- 信頼幅 e が 0.5 以下になるためには…

$$e = z \cdot \sigma_{\bar{x}} = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad e < z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- e (0.5), σ (2.0), z (1.96) はわかっていて、n が不明

$$n > \left(\frac{z \cdot \sigma}{e} \right)^2 \qquad n > \left(\frac{1.96 \cdot 2.0}{0.5} \right)^2 = 61.5$$

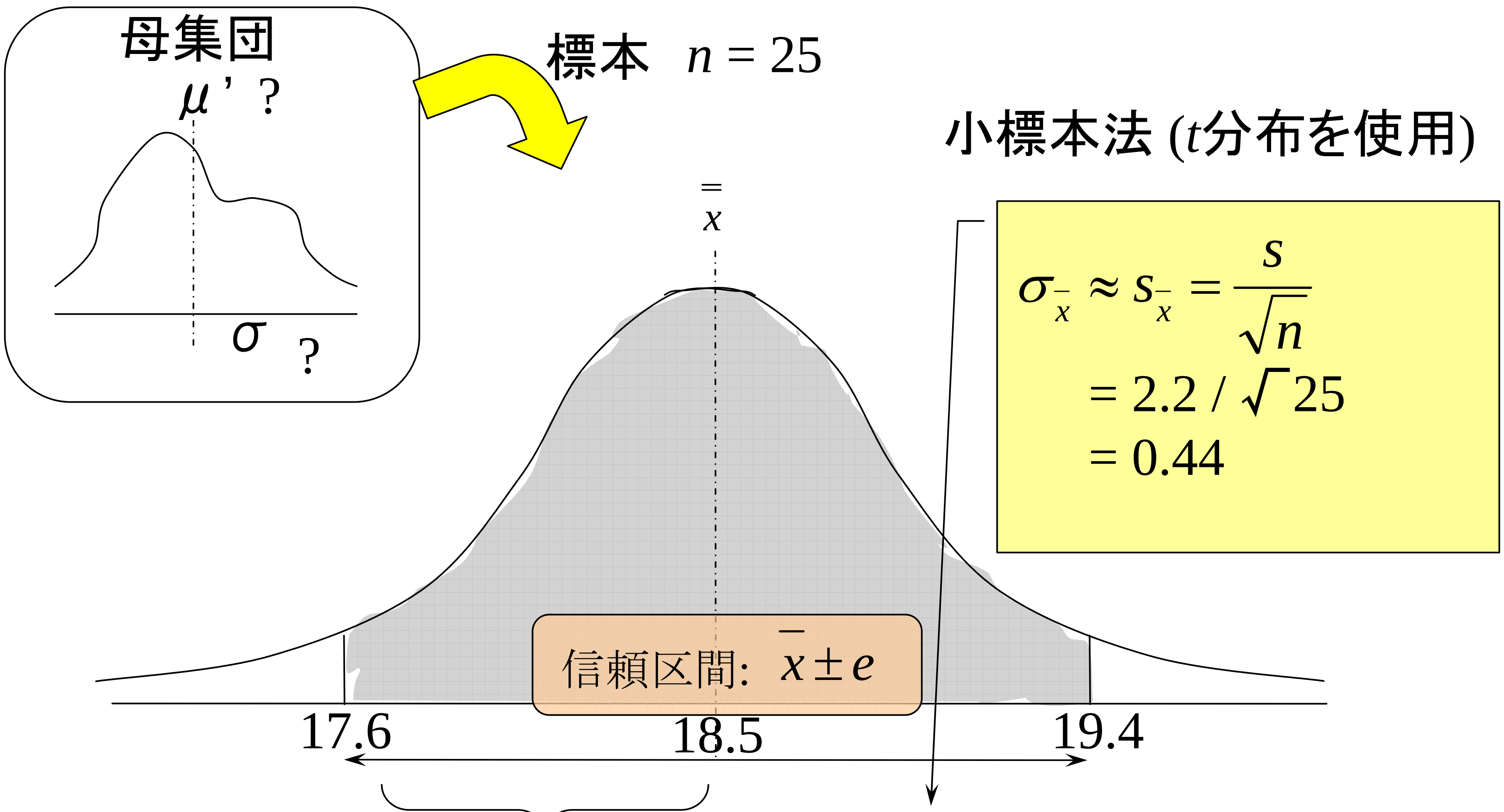
- n を 62以上にすればよい
  - 今 $n = 25$ なので、標本を37個追加すればよい

例題 (p.150) で復習

- 車の燃費
  - 母集団(これまでの車): $\mu = 18.0,\ \sigma = 2.0$
  - 標本(添加物実験): $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

(d) 添加物実験車の母平均の信頼区間は?

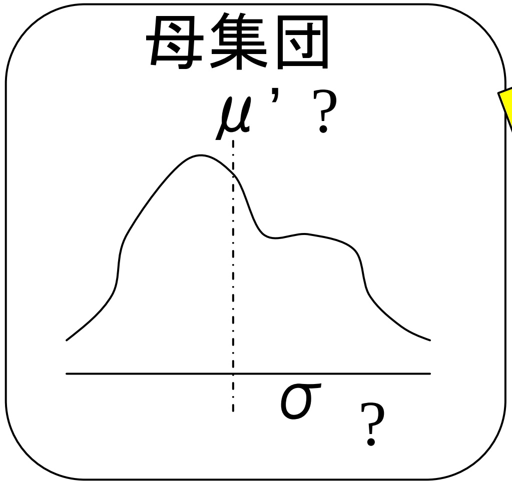
- 添加物車はこれまでの車と違うとして、母集団の値は知らないものとして実験車の n, $\bar{x}$, s からμ (μ')を推定してみる
  - その区間にこれまでの車のμがなければ、μとμ'は異なるということになる



信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

信頼確率 0.95 $\rightarrow t = 2.0639$

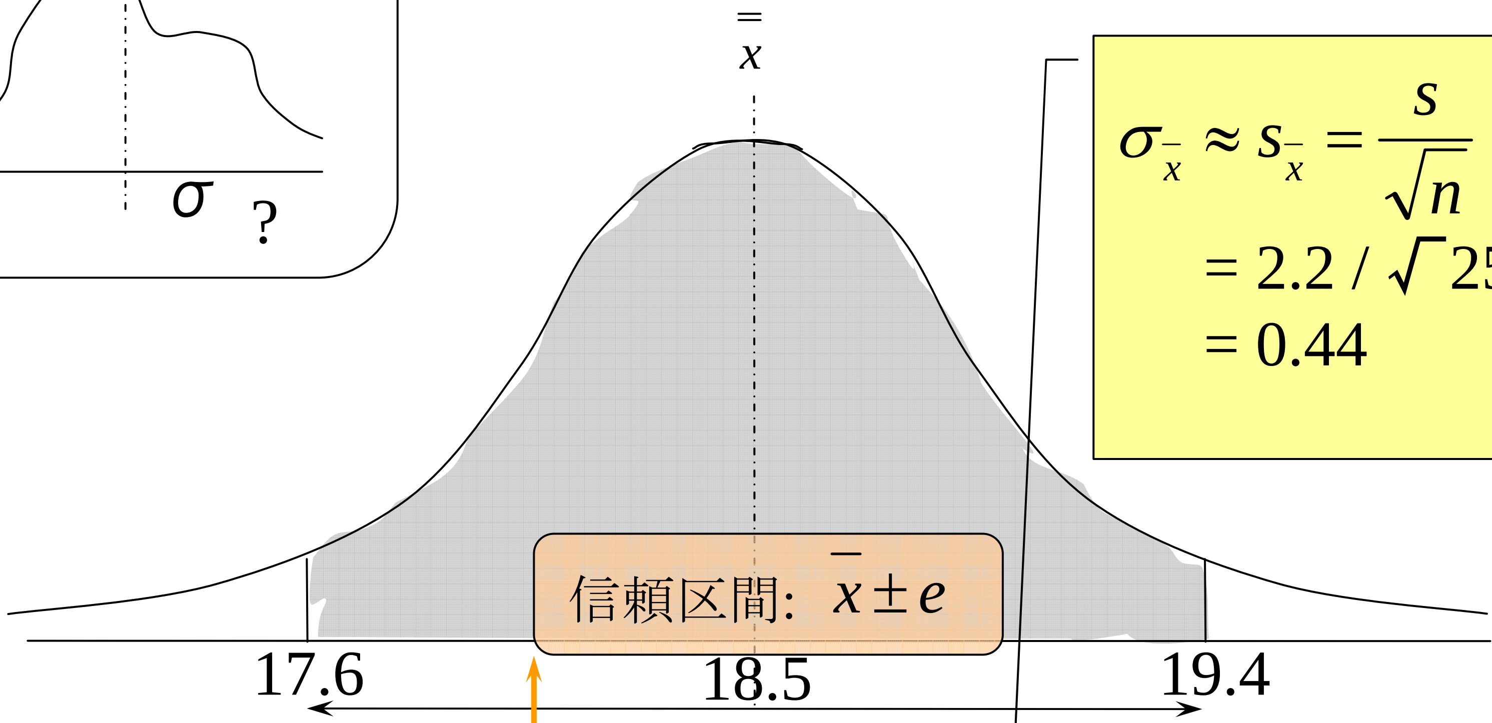
自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$



標本　$n = 25$

小標本法 (t分布を使用)

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$



信頼幅 $e = \left(z\text{または}t\right) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

<u>信頼確率</u> 0.95　　$\rightarrow t = 2.0639$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

無添加母集団の $\mu = 18.0$ はこの範囲内

∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

推定の要点

- 母平均の信頼区間を求める
  - 普通は、例題の(d)のパターン [推定フローチャートの一番下のパターン] が多い
    - 母平均 μ・母標準偏差 σ 不明で標本数も多くない
    - σ を s (標本標準偏差) で置きかえた定理2を適用
    - z (正規分布) でなく t 分布を使う
  - 母平均の点推定値は標本平均
  - 信頼区間は

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

    - t は t分布表から求める (自由度 $\nu = n - 1$)

信頼区間の推定手法

母集団: 平均 μ , 標準偏差 σ

標本: 標本数 n, 標本平均 $\bar{x}$, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes

定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{\bar{x}} = \mu \,,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\ z = \frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

No

nは大きい? $n \geqq 25$?

Yes

定理2: σ をsで代替可

$$\bar{\bar{x}} = \mu \,,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}},\ z = \frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

No

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{\bar{x}} = \mu \,,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \,,\ t = \frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

第7章の問題の推奨問題

- 2節(母平均μの推定): 1., 3., 4.
- 3節(大標本法 - σの不偏推定値sの利用): 9., 12., 13.
- 5節(小標本法 - t分布): 25, 26, 28., 29.
  - 問題26: 大標本法と小標本法の比較
    - 小標本法(t分布)は精度が低くなる(信頼区間の幅が広くなる)ので、可能ならばnを大きくして大標本法(正規分布)が使えるようにしたほうがよい
- 一般問題: 30.

第8章 検定

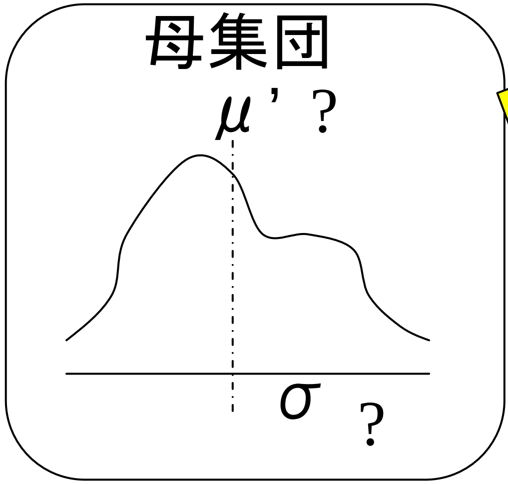
- 検定: ある値が信頼区間に入っているかどうか?
- 推定ができれば検定の方が簡単

第7章 6. 例1を検定の観点から

- 例1 (d): 標本平均(添加剤車)から母平均を推定して、その中に従来車の平均値ははいっているか?
  - 手順: 信頼区間(18.5±0.90=17.6～19.4)を求めて、その範囲に従来車の平均値(μ =18.0)が入っているか?
- 検定の観点から考えると
  - 添加剤車の標本平均の分布で、18.0は珍しい値か?

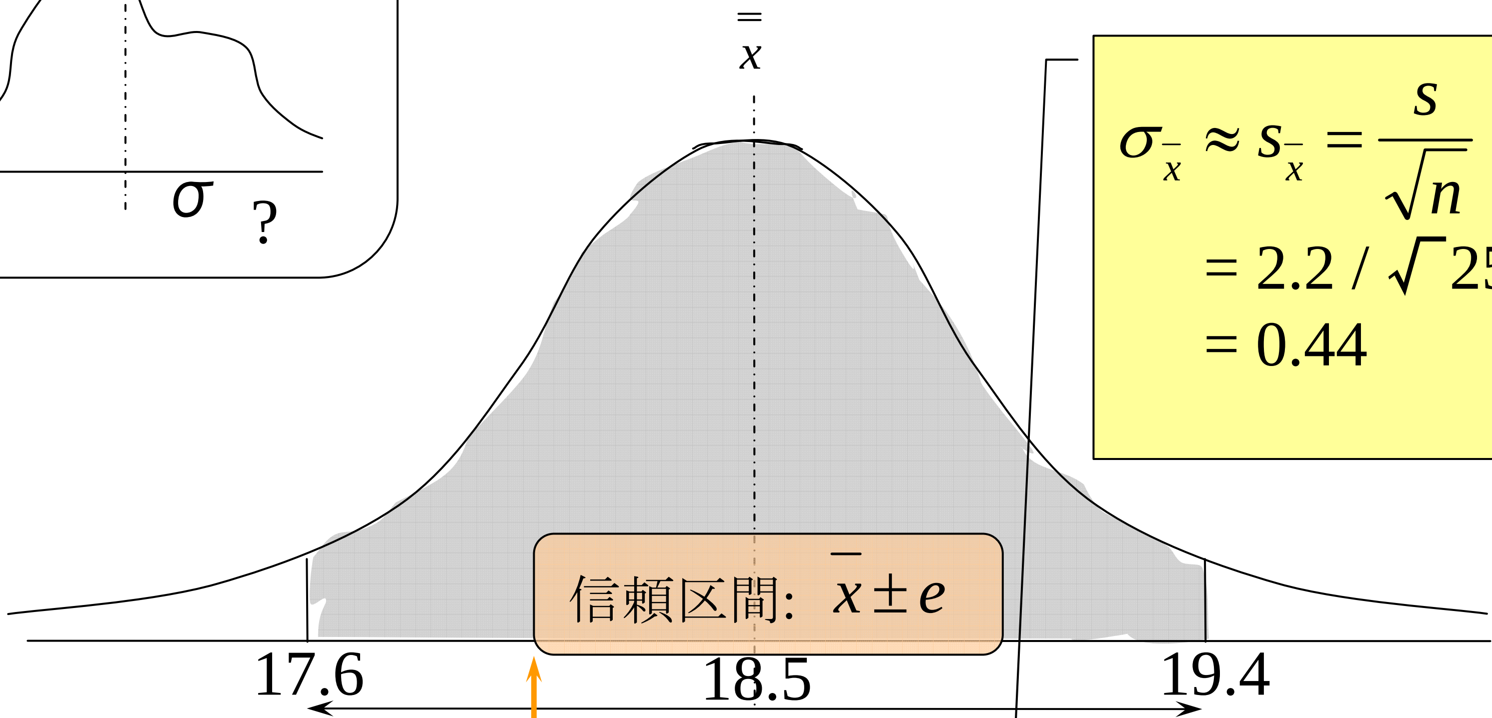
例1 (d): 推定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本　$n = 25$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$



信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

信頼確率 0.95　→ $t = 2.0639$

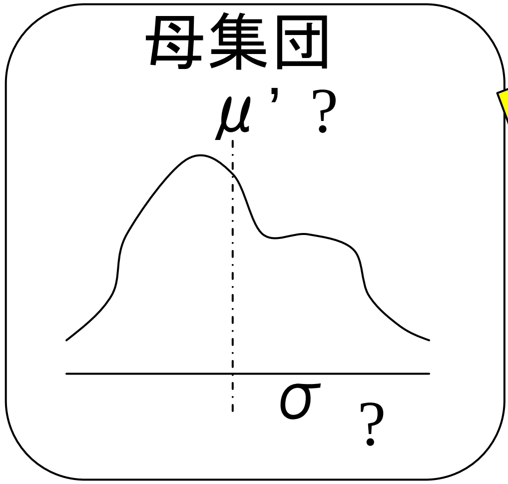
自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

無添加母集団の $\mu = 18.0$ はこの範囲内

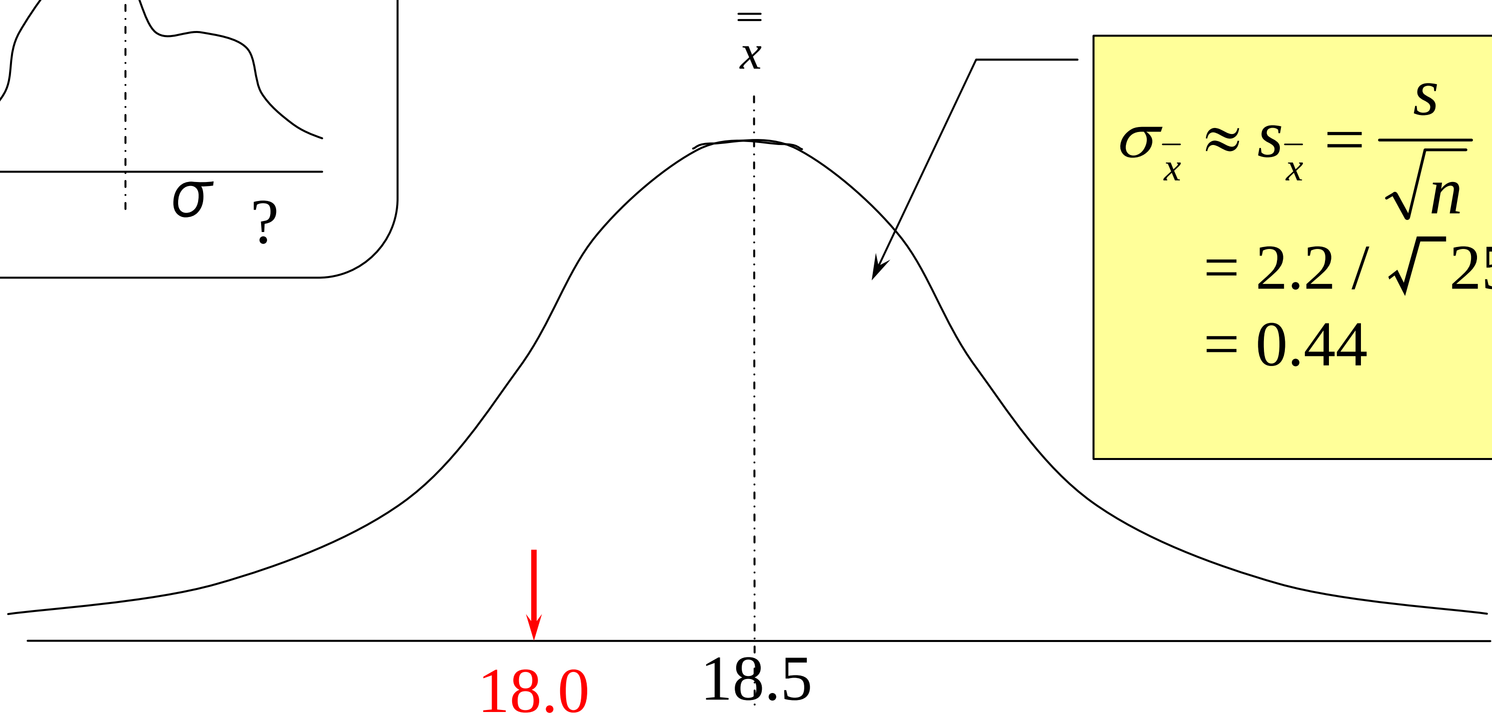
∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

例1 (d): 検定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本　$n = 25$



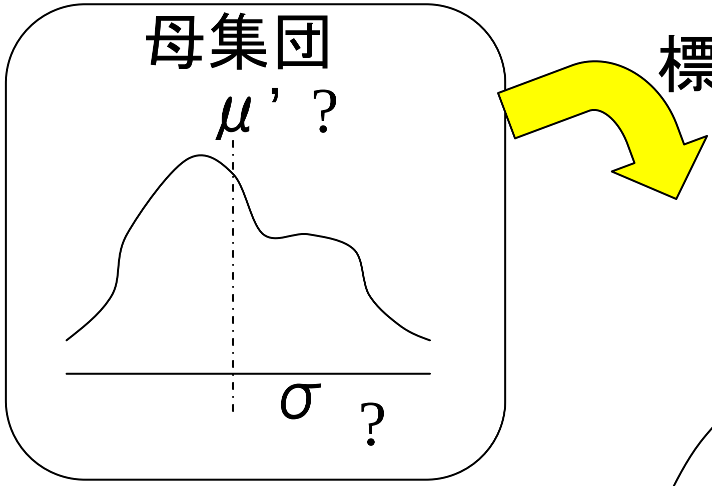
$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$

- 18.0 は添加剤車の値として珍しいか?
- 珍しいかどうかは、標準化した値で判断する

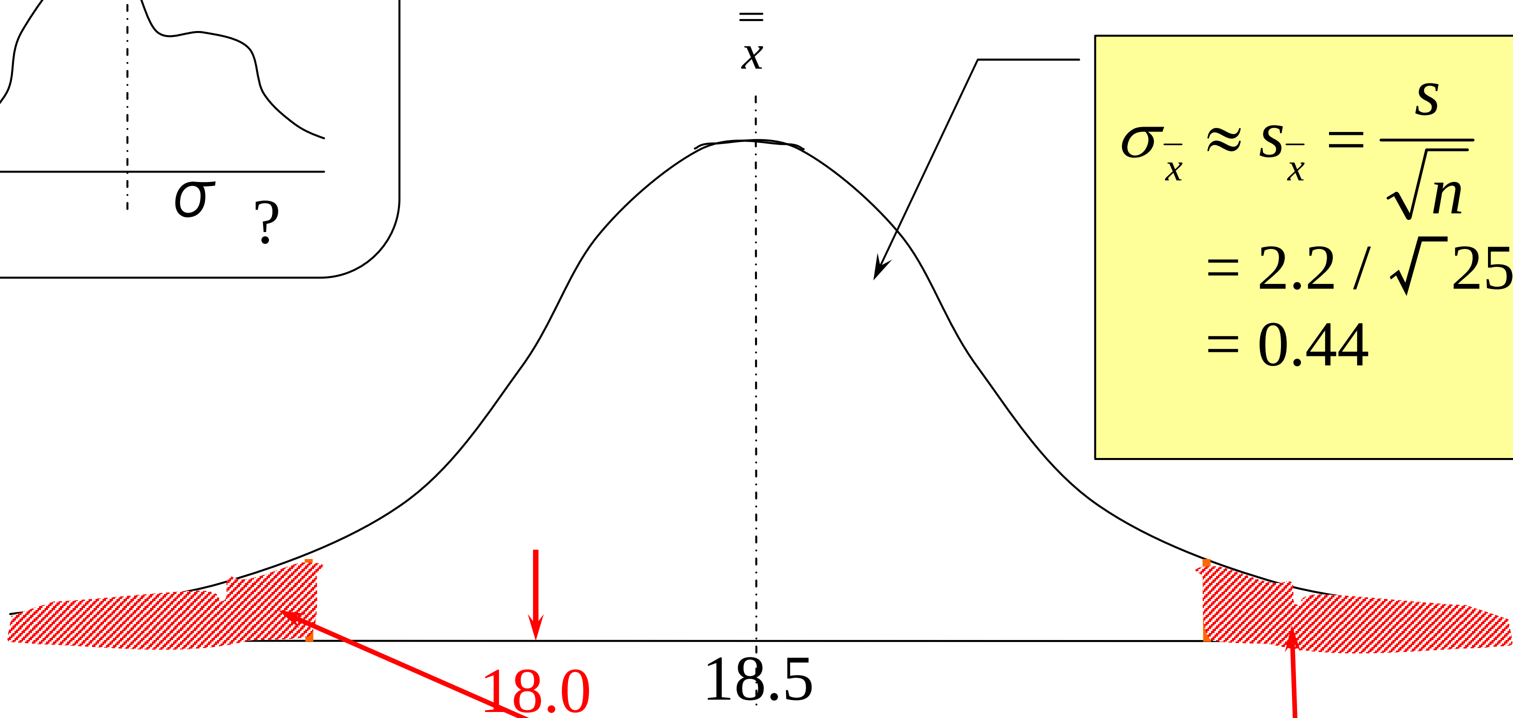
$$\frac{18.0 - \bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{18.0 - 18.5}{0.44} = \frac{-0.5}{0.44} = -1.14$$

例1 (d): 検定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本　$n = 25$



$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$

- 18.0 は添加剤車の値として珍しいか?
- 珍しいかどうかは、標準化した値で判断する

$$\frac{18.0 - \bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{18.0 - 18.5}{0.44} = \frac{-0.5}{0.44} = -1.14$$

信頼確率 0.95　　$\rightarrow t = 2.0639$

自由度 ν = 25 – 1 = 24

95%の信頼区間外 (18.0は区間内)

例1 (d): 検定の考え方

- 帰無仮説
  - H_0: 添加剤車の $\mu = 18.0$
    - (添加剤の効果はない)
- 対立仮説
  - H_1: 添加剤車の $\mu \neq 18.0$
    - (添加剤の効果はある) [両側検定]
- 検定結果
  - $|t| = |-1.14| < t_0$ (有意確率0.95のt値) = 2.063

教科書の例

- p.158～: 頭蓋骨の例
  - H_0: μ =190
  - H_1: μ =196
  - 二種類の過誤
- p.163～: 例1 (片側検定), 電球の寿命
  - H_0: μ =1180
  - H_1: μ <1180

教科書の例

- p.165～: 例2 (両側検定) 適性検査の点
  - H_0: μ =115
  - H_1: $\mu \neq 115$
- 両側検定の場合が多い
- 第1種の過誤 $\alpha = 1 -$ 信頼確率
- α=0.05 (信頼確率=0.95) のとき、第2種の過誤 β も小さくなることが経験的にわかっている