2012年度 森林統計学

第11回 6月26日 推定 (+第10回までのまとめ)

講義資料

高知大学農学部 森林科学コース主
担当 鈴木保志

定理2（中心極限定理）

定理2. xが平均μ、標準偏差σのある分布に従うとき、大きさnの無作為標本に基づく標本平均$\overline{x}$は、nが無限に大きくなるとき、平均μ、標準偏差$\sigma/\sqrt{n}$の正規分布に近づく。

- 要点: $\overline{x}$の分布は　(nが大きければ正規分布に従い、)

① $\overline{\overline{x}} \fallingdotseq \mu$

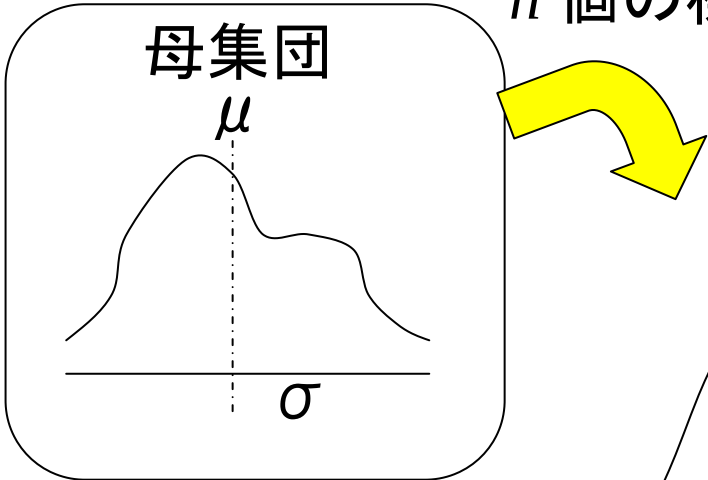
② $s_{\overline{x}} \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

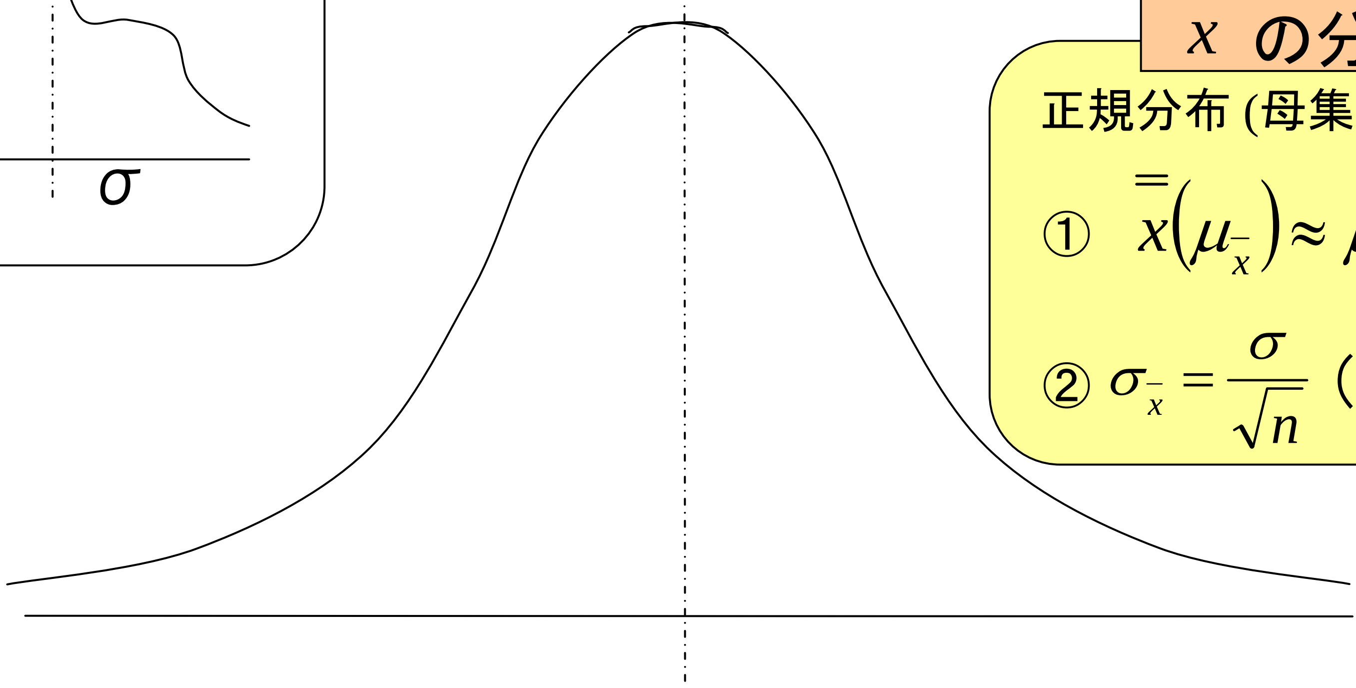
となる

- nが大きくなるほどμの推定精度が高くなる。
- 実は標本抽出の回数には関係ない（どの標本も同じ確度）

定理2 のイメージ

n 個の標本$(x_1, x_2, \ldots , x_n)$抽出 → $\bar{x}$ を算出





$\bar{x}$ の分布

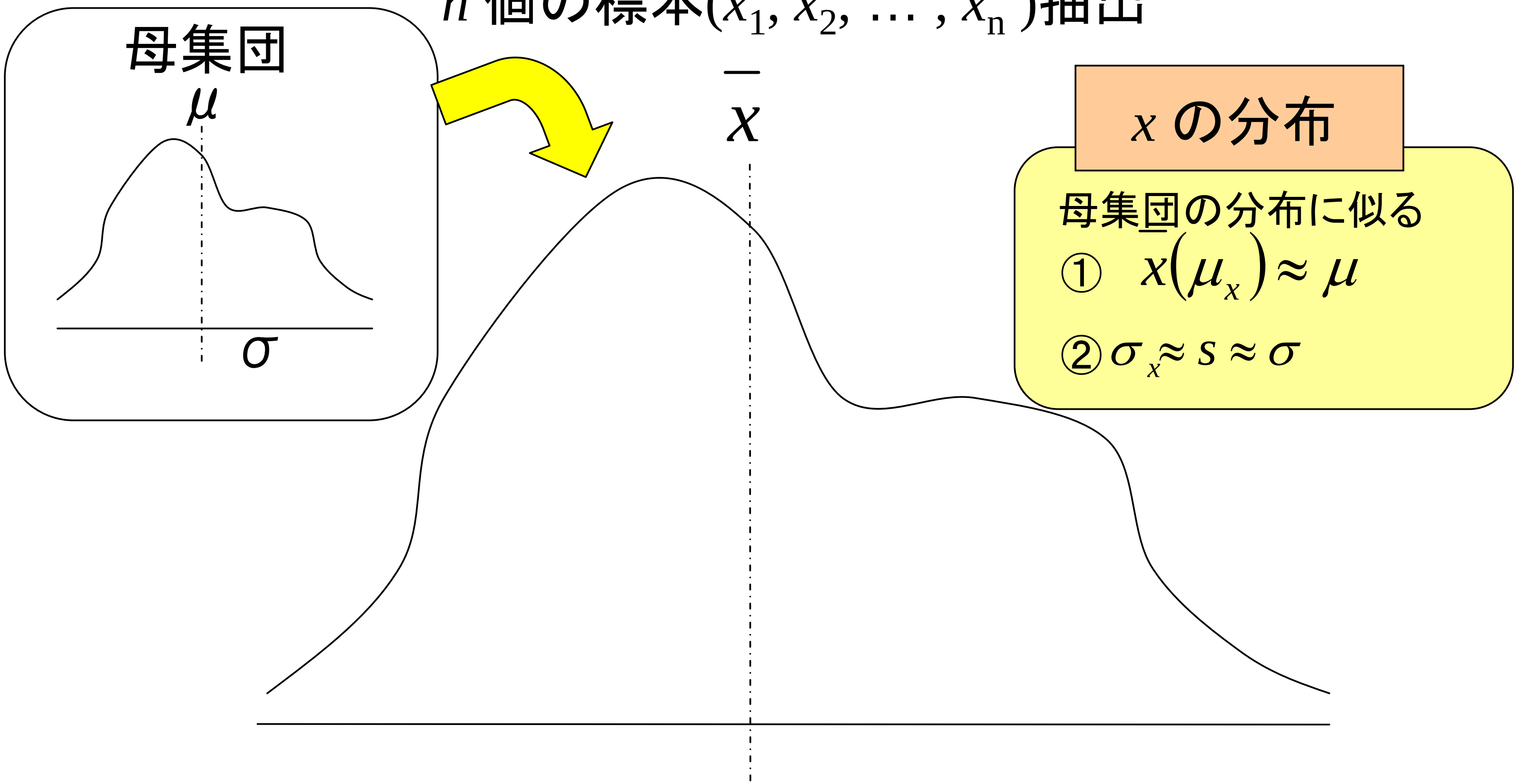
正規分布 (母集団に関わらず)

① $\bar{\bar{x}}\left(\mu_{\bar{x}}\right) \approx \mu$

② $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

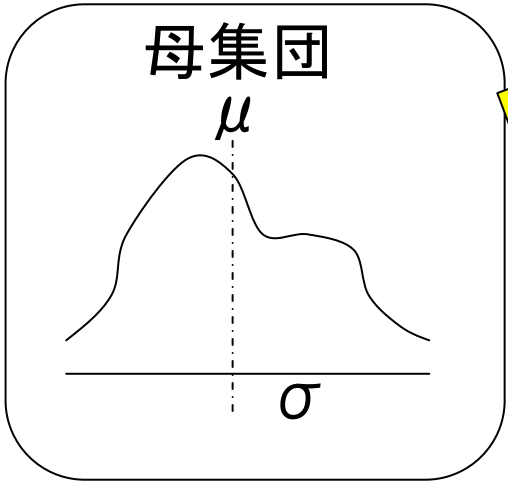
単なる x の分布だと…

n 個の標本($x_1, x_2, \ldots, x_n$)抽出

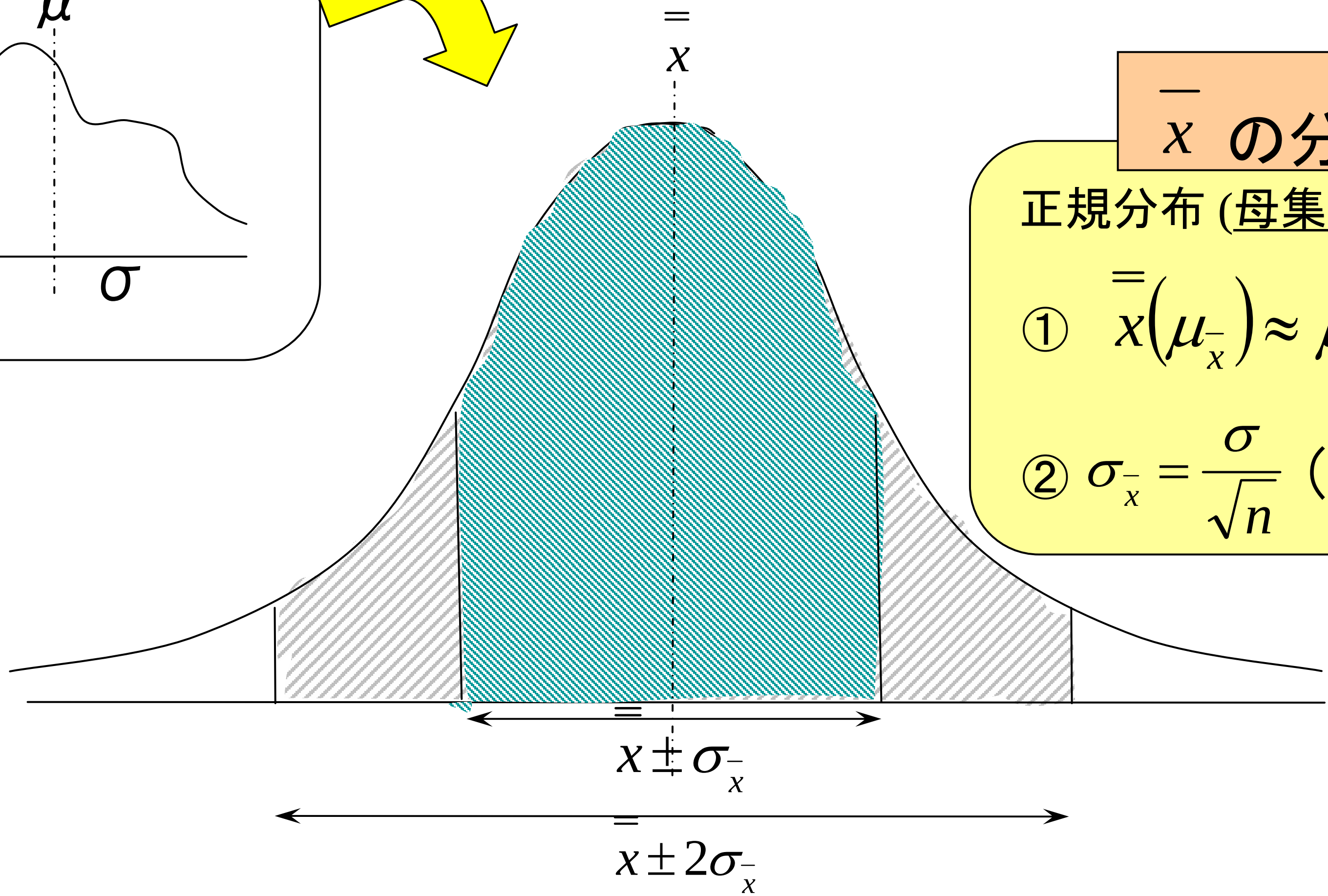


- 課題4 だと、抽出した標本で作ったヒストグラムがこれに相当する

定理2 のイメージ



n 個の標本($x_1, x_2, \dots , x_n$)抽出→ $\bar{x}$ を算出



$\bar{x}$ の分布

正規分布 (<u>母集団に関わらず</u>)

① $\bar{\bar{x}}\left(\mu_{\bar{x}}\right) \approx \mu$

② $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

- 正規分布なので、平均値±標準偏差に入る確率は正規分布表に従う→推定に正規分布表を利用できる

推定の要点

- 母平均の信頼区間を求める
  - 母平均の点推定値は標本平均 (信頼区間の中心)

$$\bar{x}$$

  - 信頼区間 e は 標準誤差 $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の z 倍

$$\bar{x} \pm e \quad \left(e = z \cdot \sigma_{\bar{x}}\right)$$

まとめて書くと

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

    - 標準誤差 $\sigma/\sqrt{n}$ は標本平均 $\bar{x}$ の標準偏差
    - z は約2 (標準偏差の±2倍の範囲内に約9割が入る)
      - 正確には信頼確率95%とすると z = 1.96 (表IVから)

各自課題4のデータで確認

- いずれかの標本を選んで、母平均を推定してみる(信頼区間を求めてみる)
  - 標本平均 $\bar{x}$ 、標本標準偏差 s、標本数 n
  - 母標準偏差 σ は不明だが、s は σ の不偏推定値なので σ の代わりに s を使う
  - 母平均がだいたい9割くらいの確率で入る信頼区間なので、($\bar{x}$ の)標準偏差の2倍の区間を取る (z = 2とする)

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \left(\bar{x} \pm 2 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

  - この範囲に、母平均 μ は入っているか?

信頼区間の推定手法

母集団: 平均 μ , 標準偏差 σ
標本: 標本数 n, 標本平均　, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes → 定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら $z = 1.96$

No ↓

nは大きい? $n \geqq 25$?

Yes → 定理2: σ をsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら $z = 1.96$

No ↓

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度 $\nu = n$-1
により異なる
(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z$または$t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

推定の要点

- 普通は、教科書p.50 例1. の(d)のパターン [推定フローチャートの一番下のパターン] が多い
  - 母平均 μ・母標準偏差 σ 不明で標本数も多くない
  - σ を s (標本標準偏差) で置きかえた定理2を適用
  - z (正規分布) でなく t 分布を使う
- 母平均の点推定値は標本平均
- 信頼区間は

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - t は t 分布表から求める (自由度 $\nu = n - 1$)

第7章の問題の推奨問題

- 2節(母平均μの推定): 1., 3., 4.
- 3節(大標本法 - σの不偏推定値sの利用): 9., 12., 13.
- 5節(小標本法 - t分布): 25, <u>26</u>, 28., 29.
  - 問題26: 大標本法と小標本法の比較
    - 小標本法(t分布)は精度が低くなる(信頼区間の幅が広くなる)ので、可能ならばnを大きくして大標本法(正規分布)が使えるようにしたほうがよい
- 一般問題: 30.