2012年度 森林統計学

第12回 7月3日 検定

講義資料

高知大学農学部　森林科学コース
主担当　　鈴木保志

復習

定理2（中心極限定理）

定理2. xが平均μ、標準偏差σのある分布に従うとき、大きさnの無作為標本に基づく標本平均$\overline{x}$は、nが無限に大きくなるとき、平均μ、標準偏差$\sigma/\sqrt{n}$の正規分布に近づく。

- 要点: $\overline{x}$の分布は (nが大きければ正規分布に従い、)

① $\overline{\overline{x}} \doteqdot \mu$

② $s_{\overline{x}} \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

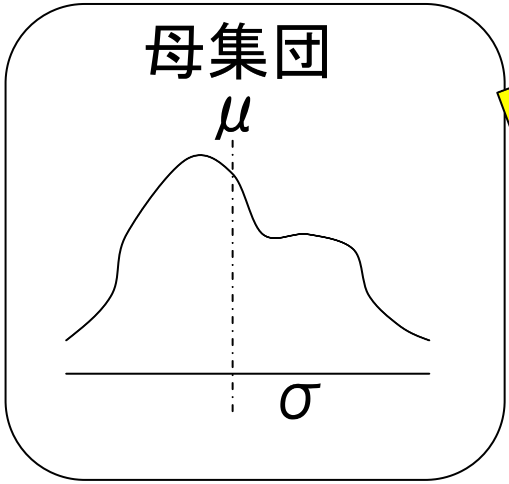
となる

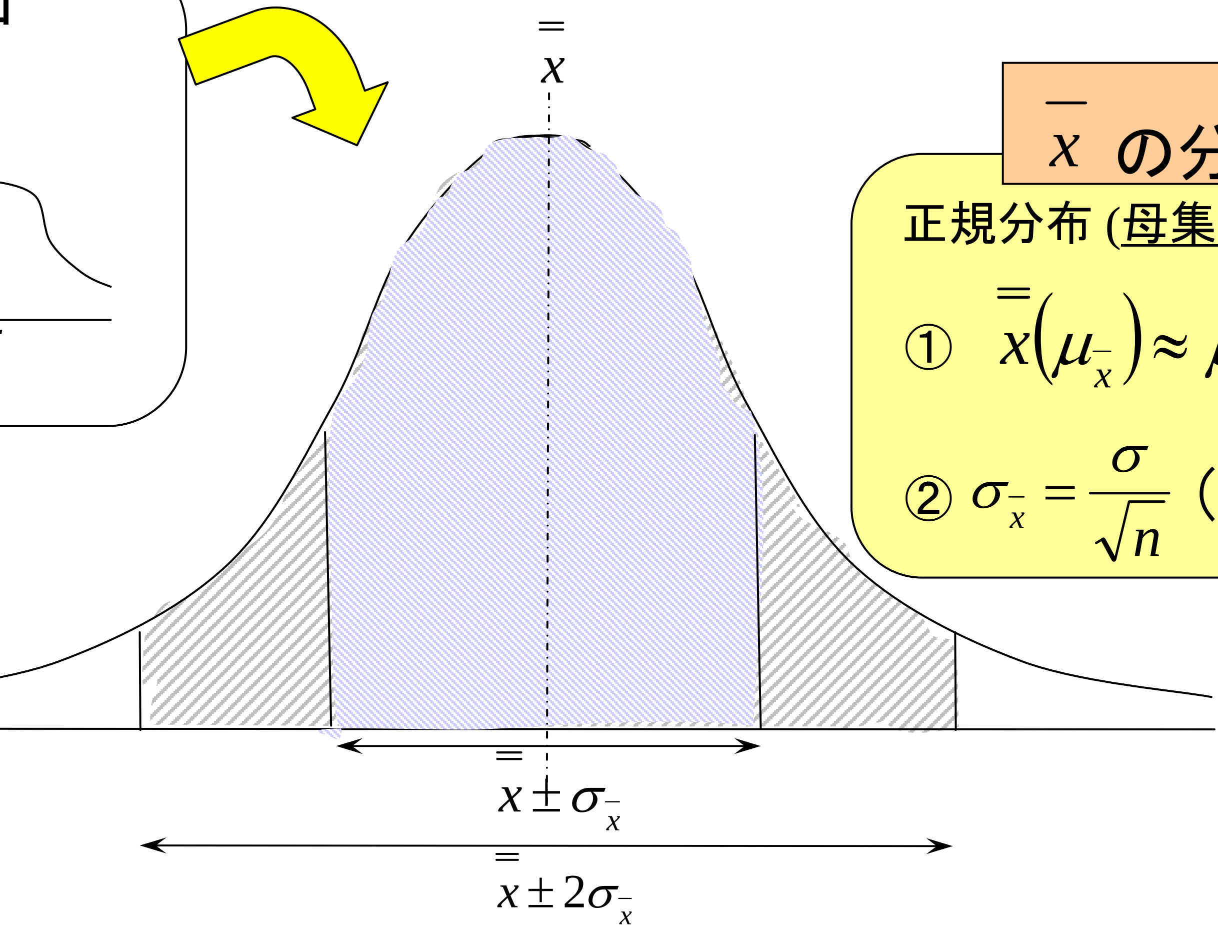
- nが大きくなるほどμの推定精度が高くなる。
- 実は標本抽出の回数には関係ない（どの標本も同じ確度）

定理2 のイメージ

復習

n 個の標本$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$抽出→ $\bar{x}$ を算出





$\bar{x}$ の分布

正規分布 (<u>母集団に関わらず</u>)

① $\bar{\bar{x}}\left(\mu_{\bar{x}}\right) \approx \mu$

② $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

- 正規分布なので、平均値±標準偏差に入る確率は正規分布表に従う→推定に正規分布表を利用できる

復習

推定の要点

- 母平均の信頼区間を求める
  - 母平均の点推定値は標本平均 (信頼区間の中心)

$$\bar{x}$$

  - 信頼区間 e は 標準誤差 $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の z 倍

$$\bar{x} \pm e \quad \left(e = z \cdot \sigma_{\bar{x}}\right)$$

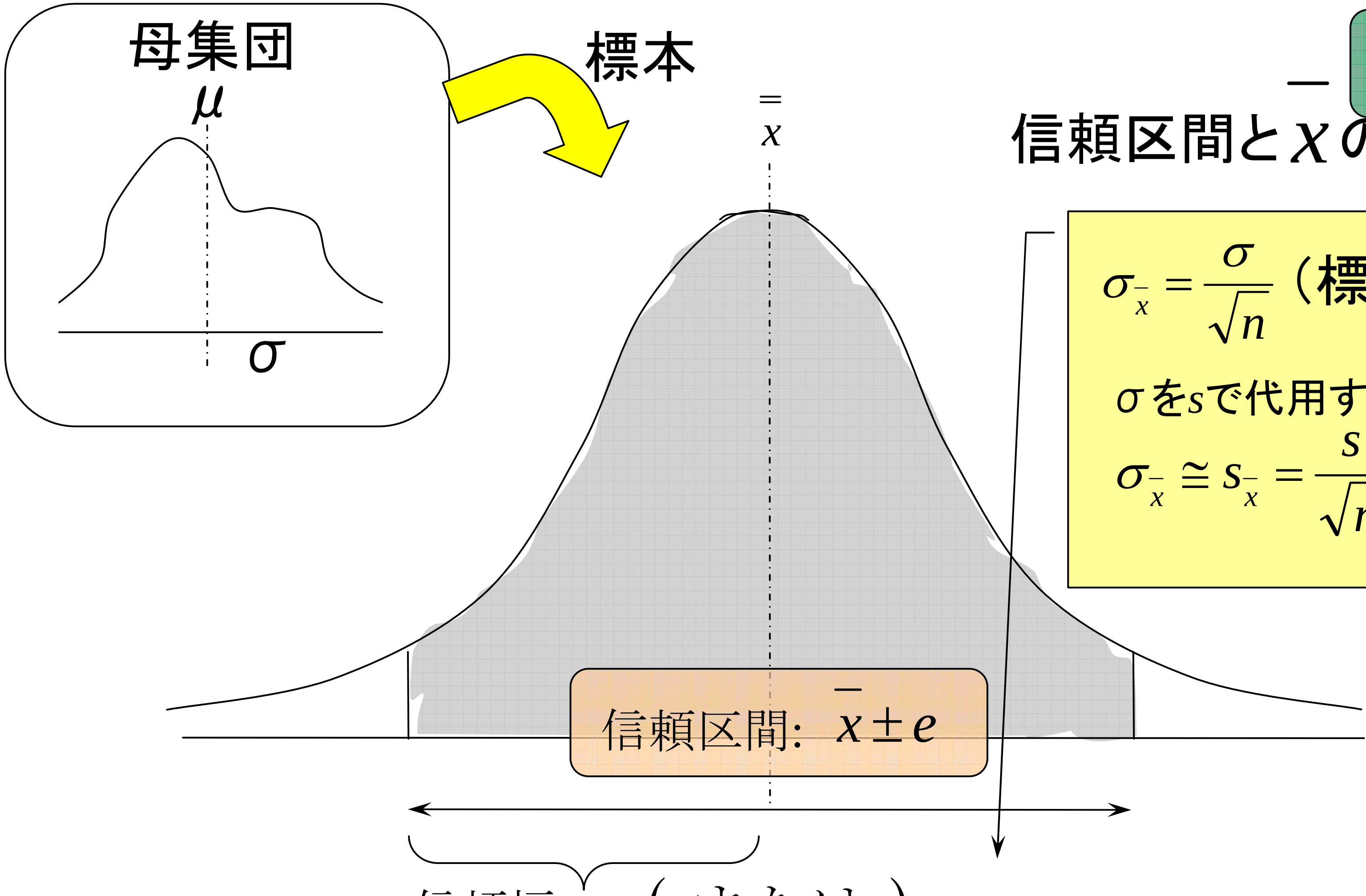
まとめて書くと

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

    - 標準誤差 $\sigma / \sqrt{n}$ は標本平均 $\bar{x}$ の標準偏差
    - z は約2 (標準偏差の±2倍の範囲内に約9割が入る)
      - 正確には信頼確率95%とすると $z = 1.96$ (表IVから)

信頼区間と$\bar{x}$の分布

復習



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$（標準誤差）

σをsで代用すると

$$\sigma_{\bar{x}} \cong s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ となる

信頼幅 $e = \left(z\text{または}t\right) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

95%が使われることが多い

復習

信頼区間の推定手法

母集団: 平均 μ , 標準偏差 σ

標本: 標本数 n, 標本平均　, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes → 定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら $z = 1.96$

No ↓

nは大きい? $n \geqq 25$?

Yes → 定理2: σ をsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら $z = 1.96$

No ↓

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度 $\nu = n$-1 により異なる

(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z または t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

復習

推定の要点

- 普通は、教科書p.150 例1. の(d)のパターン [推定フローチャートの一番下のパターン] が多い
  - 母平均μ・母標準偏差σ不明で標本数も多くない
  - σをs (標本標準偏差) で置きかえた定理2を適用
  - z (正規分布) でなくt 分布を使う
- 母平均の点推定値は標本平均
- 信頼区間は

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - t は t 分布表から求める (自由度 $\nu = n - 1$)

［課題4］のコメント

- 標本抽出の方法、$\bar{x}$ や s の計算はおおむねできていた
  - が s の計算ができていない人もいる: 要注意
- 母集団の集計、ヒストグラムの作成などの復習もおおむねOK
- 適切なケタどりに注意
  - 元データの計測精度 m に対し、$\bar{x}$ や s は $m/10$ 程度が目安
- 考察して欲しかった要点は…

[課題4]の考察の要点

- 考察 (1)：「$\bar{x}$ の分布は定理2のようになっているか?」
- 考察(2)：「s は σ の不偏推定値になっているか?」
  - 個々の s はバラツキはあっても σ くらいの値
    - なので σ を s で置き換えることができる
  - $\bar{x}$ のバラツキ($s_{\bar{x}}$)は n が大きい方が小さい
    → その程度は「定理2」に従う

もういちど自分のデータで確認してみよう

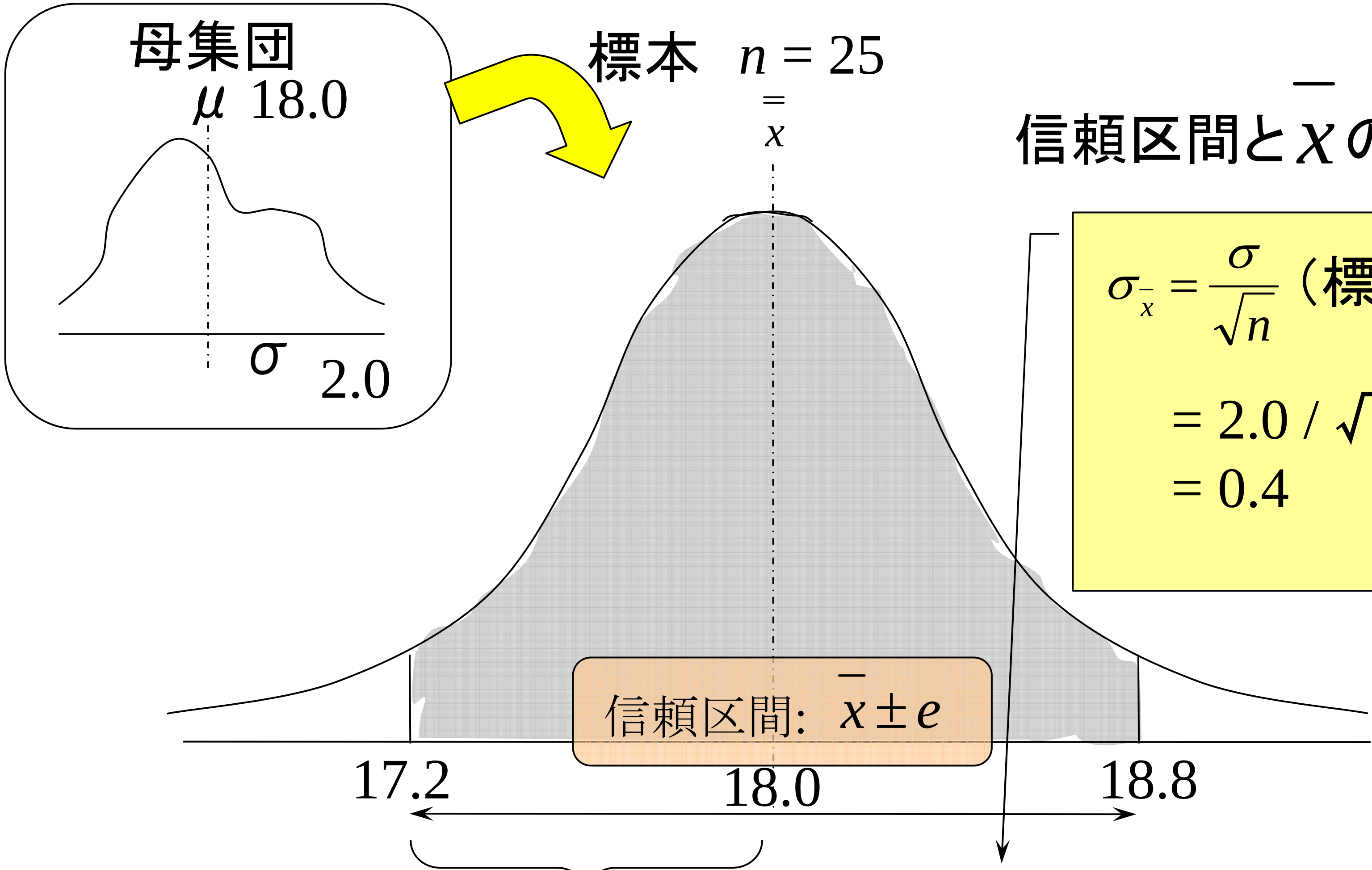
例題 (p.150) で復習

- 車の燃費
  - 母集団(これまでの車): $\mu = 18.0$, $\sigma = 2.0$
  - 標本(添加物実験): $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

(a), (c) $n = 25$ の標本平均の信頼区間は?

- その中に 18.5 が入っているなら添加物の効果はない

信頼区間と$\bar{x}$の分布



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

$$= 2.0 / \sqrt{25}$$

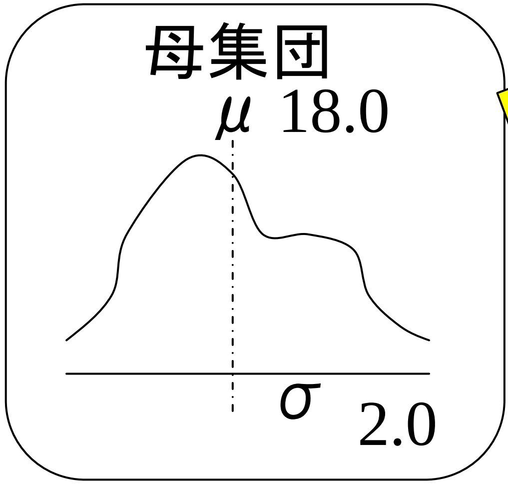
$$= 0.4$$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 1.96 \times 0.4 = 0.78$

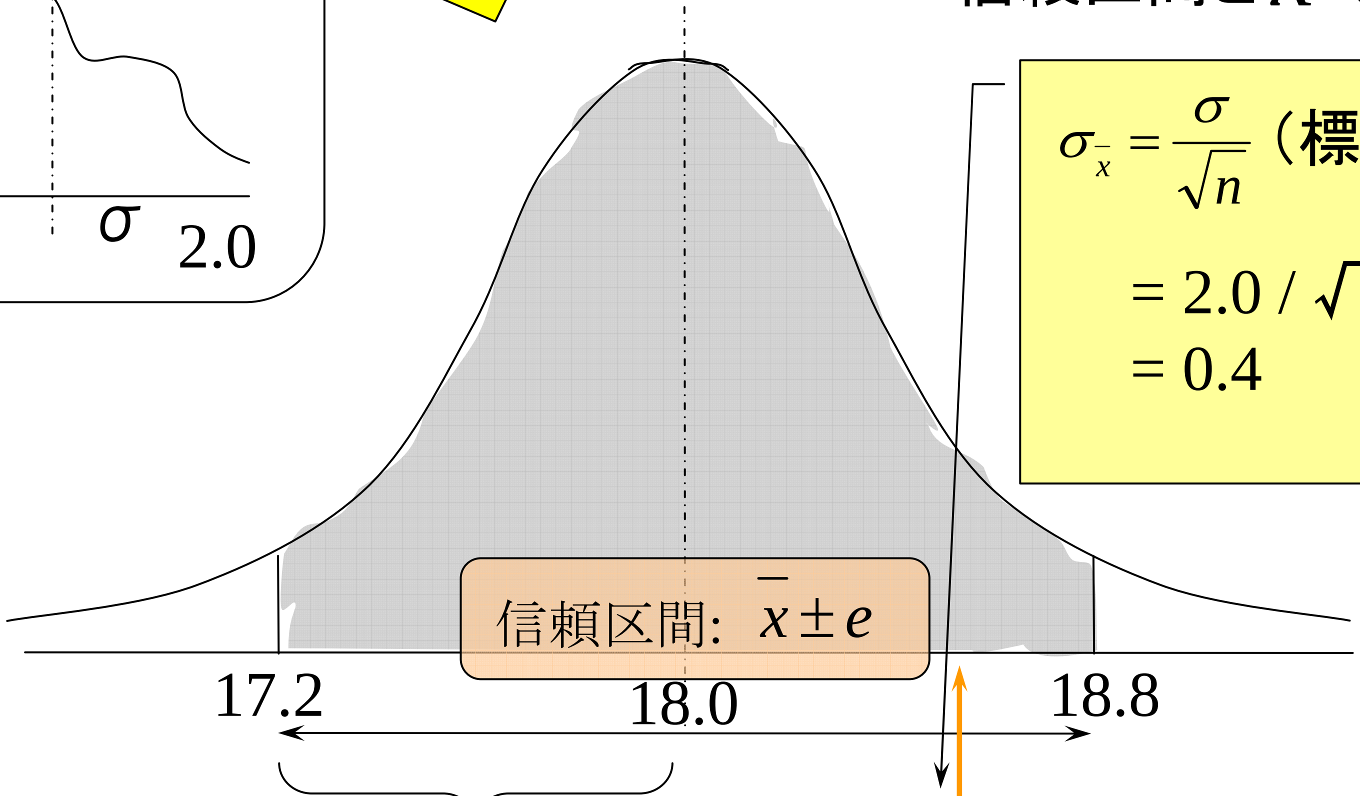
<u>信頼確率</u> 0.95 → z = 1.96

95%

信頼区間と$\bar{x}$の分布



標本　$n = 25$



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

$$= 2.0 / \sqrt{25}$$

$$= 0.4$$

信頼幅 $e = (z \text{または} t) \times \sigma_{\bar{x}} = 1.96 \times 0.4 = 0.78$

<u>信頼確率</u> 0.95 → z = 1.96

95%

標本の 18.5 はこの範囲内

∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

例題 (p.150) で復習

- 車の燃費
  - 母集団(これまでの車): $\mu = 18.0$, $\sigma = 2.0$
  - 標本(添加物実験): $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

(b) 信頼幅が0.5 (信頼区間が1.0) より狭くなるようにするには、n をいくつにすればよいか?

  - 現状($n = 25$) の信頼幅は0.78; もっと精度よく、添加物実験車の μ (μ')を推定したい

(b) 信頼幅 $e < 0.5$ となる n ?

- 信頼幅 e が 0.5 以下になるためには…

$$e = z \cdot \sigma_{\bar{x}} = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad e < z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- e (0.5), σ (2.0), z (1.96) はわかっていて、n が不明

$$n > \left(\frac{z \cdot \sigma}{e} \right)^2 \qquad n > \left(\frac{1.96 \cdot 2.0}{0.5} \right)^2 = 61.5$$

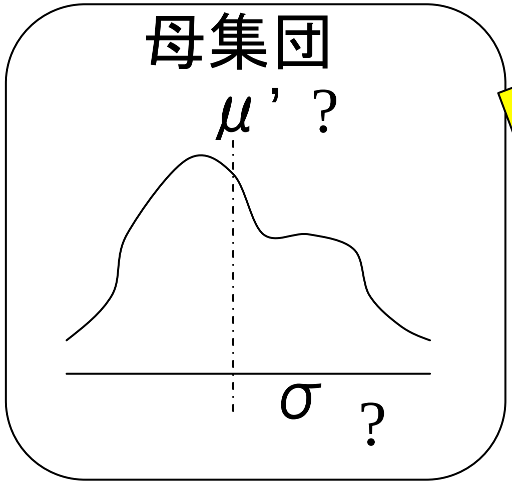
- n を 62以上にすればよい
  - 今 $n = 25$ なので、標本を37個追加すればよい

例題 (p.150) で復習

- 車の燃費
  - 母集団(これまでの車): $\mu = 18.0,\ \sigma = 2.0$
  - 標本(添加物実験): $n = 25,\ \bar{x} = 18.5,\ s = 2.2$

(d) 添加物実験車の母平均の信頼区間は?

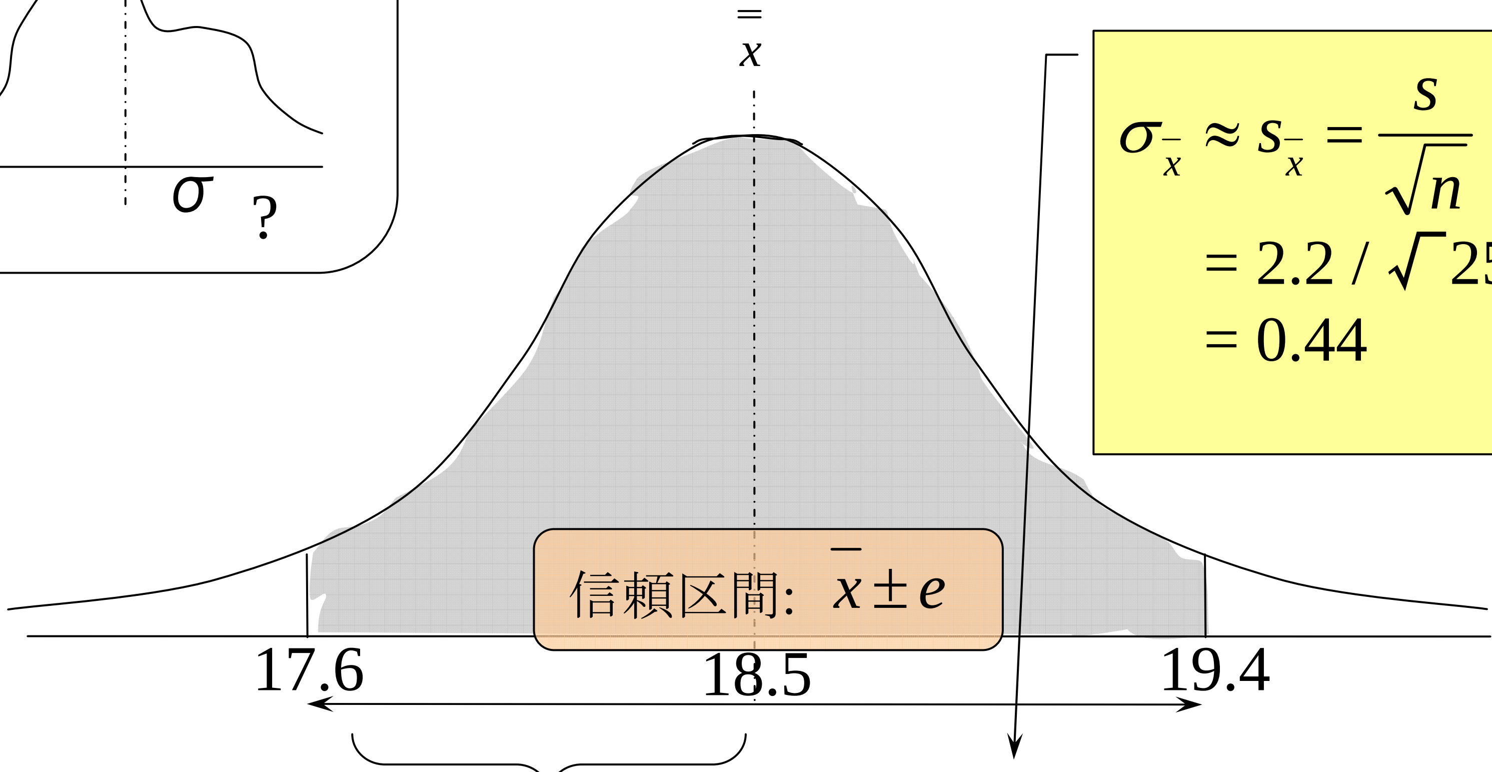
- 添加物車はこれまでの車と違うとして、母集団の値は知らないものとして実験車の $n,\ \bar{x},\ s$ から μ (μ')を推定してみる
  - その区間にこれまでの車の μ がなければ、μ と μ' は異なるということになる



標本 $n = 25$

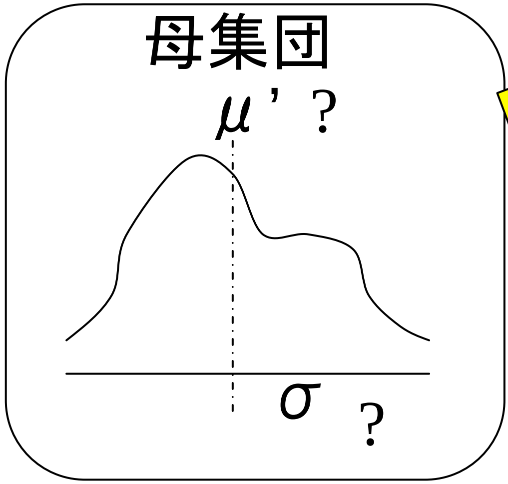
小標本法 (t分布を使用)

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$



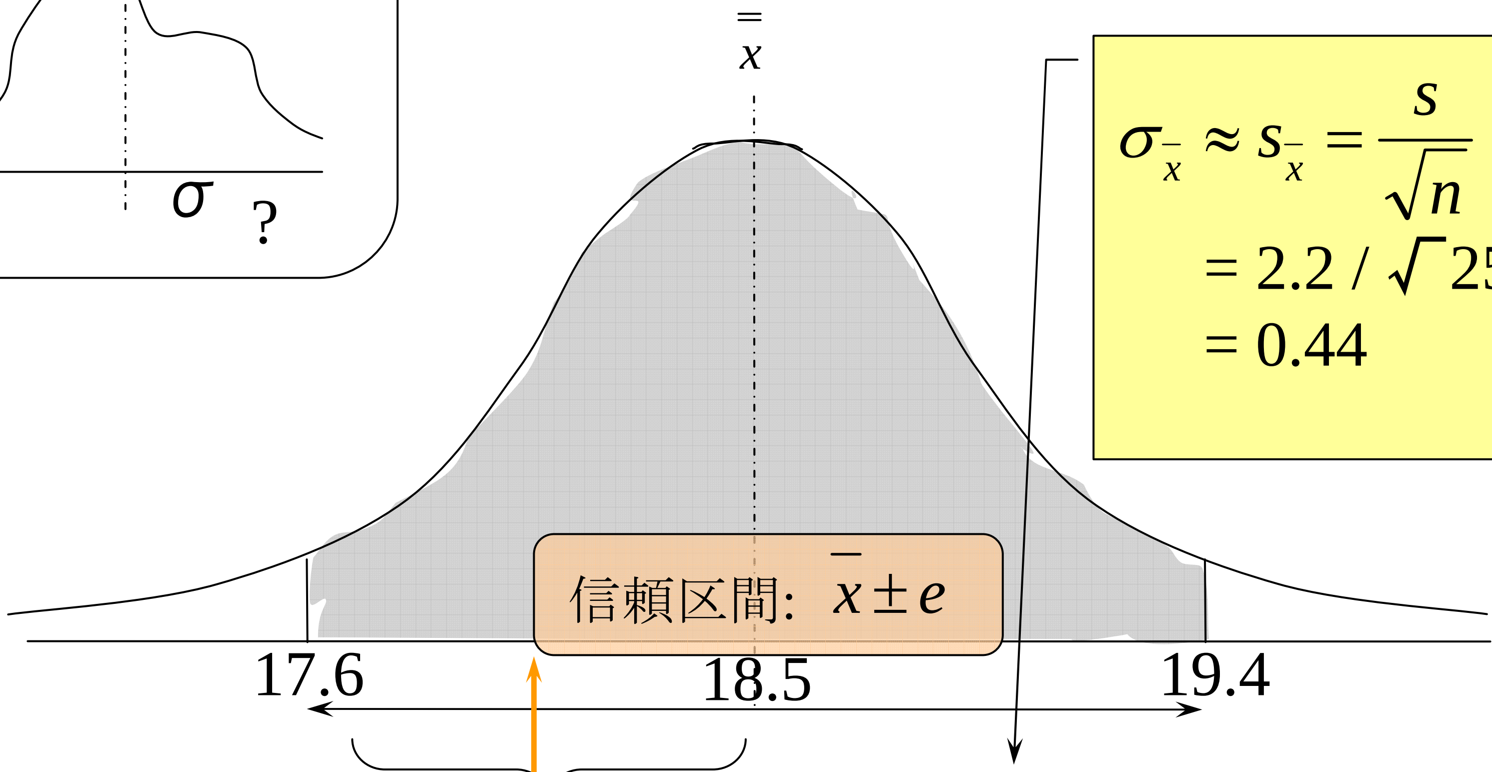
信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

<u>信頼確率</u> 0.95 $\rightarrow t = 2.0639$
自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$



標本 $n = 25$

小標本法 (t分布を使用)



$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

信頼確率 0.95 $\rightarrow t = 2.0639$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

無添加母集団の $\mu = 18.0$ はこの範囲内

∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

復習

推定の要点

- 母平均の信頼区間を求める
  - 普通は、例題の(d)のパターン [推定フローチャートの一番下のパターン] が多い
    - 母平均 μ・母標準偏差 σ 不明で標本数も多くない
    - σ を s (標本標準偏差) で置きかえた定理2を適用
    - z (正規分布) でなく t 分布を使う
  - 母平均の点推定値は標本平均
  - 信頼区間は

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

    - t は t分布表から求める (自由度 $\nu = n - 1$)

復習

信頼区間の推定手法

母集団: 平均 μ , 標準偏差 σ
標本: 標本数 n, 標本平均 　, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布? → Yes →

定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No ↓

nは大きい? $n \geqq 25$? → Yes →

定理2: σをsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No ↓

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu , \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度 $\nu = n-1$
により異なる
(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z または t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

第7章の問題の推奨問題

- 2節(母平均μの推定): 1., 3., 4.
- 3節(大標本法 - σの不偏推定値sの利用): 9., 12., 13.
- 5節(小標本法 - t分布): 25, <u>26</u>, 28., 29.
  - 問題26: 大標本法と小標本法の比較
    - 小標本法(t分布)は精度が低くなる(信頼区間の幅が広くなる)ので、可能ならばnを大きくして大標本法(正規分布)が使えるようにしたほうがよい
- 一般問題: 30.

第8章 検定

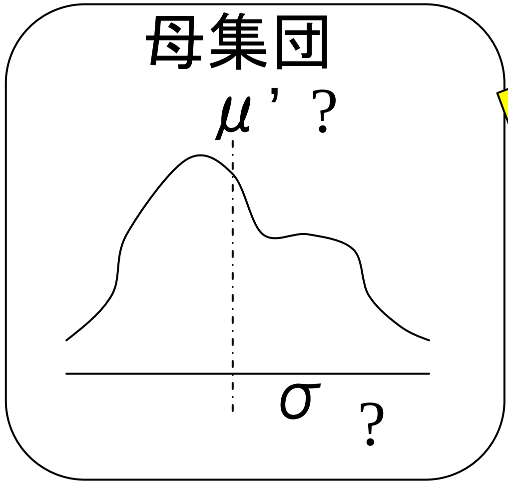
- 検定: ある値が信頼区間に入っているかどうか?
- 推定ができれば検定の方が簡単

第7章 6. 例1を検定の観点から

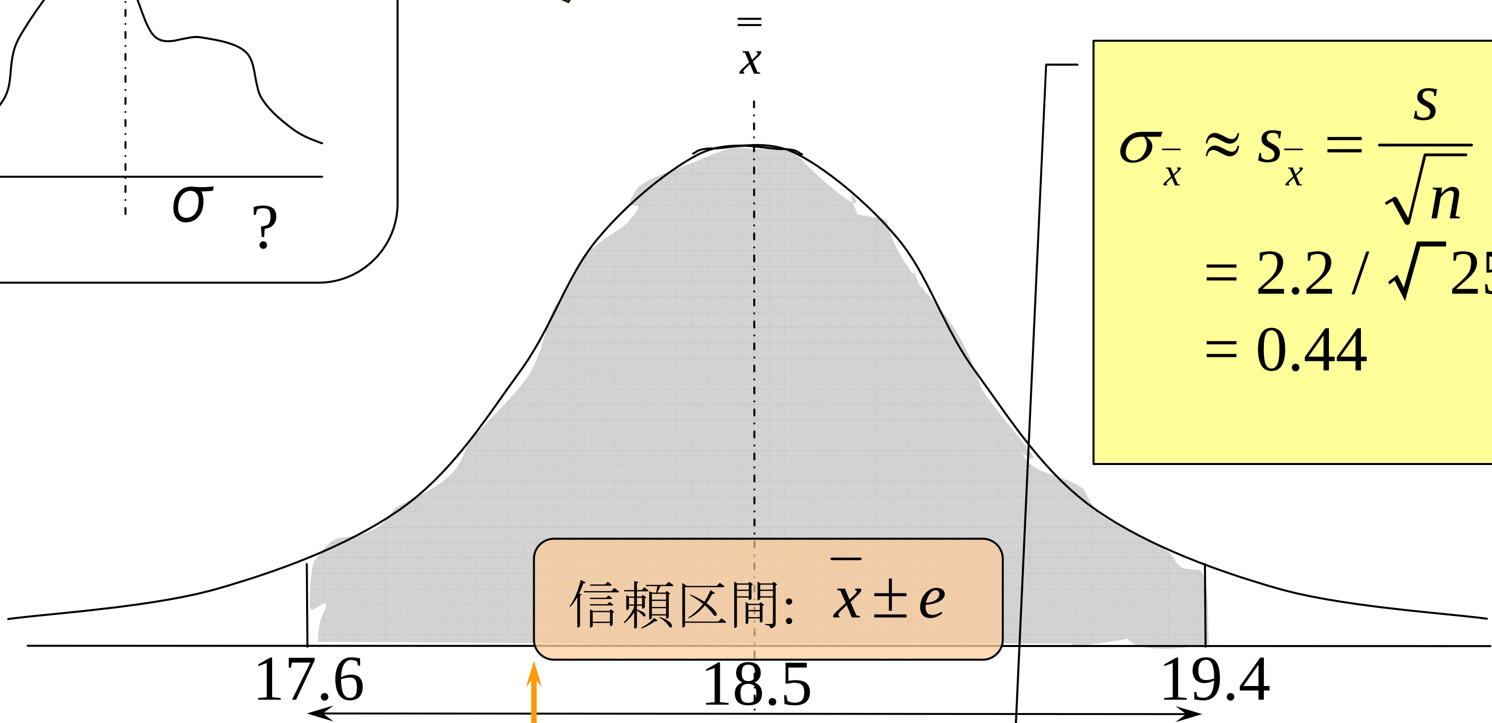
- 例1 (d): 標本平均(添加剤車)から母平均を推定して、その中に従来車の平均値が入っているか?
  - 手順: 信頼区間(18.5±0.90=17.6～19.4)を求めて、その範囲に従来車の平均値(μ =18.0)が入っているか?
- 検定の観点から考えると
  - 添加剤車の標本平均の分布で、18.0は珍しい値か?

例1 (d): 推定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本 $n = 25$



$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

信頼確率 0.95 → $t = 2.0639$

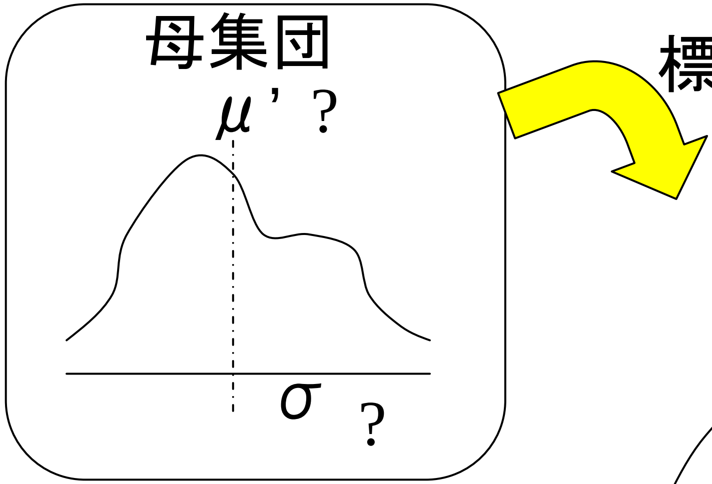
自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

無添加母集団の $\mu = 18.0$ はこの範囲内

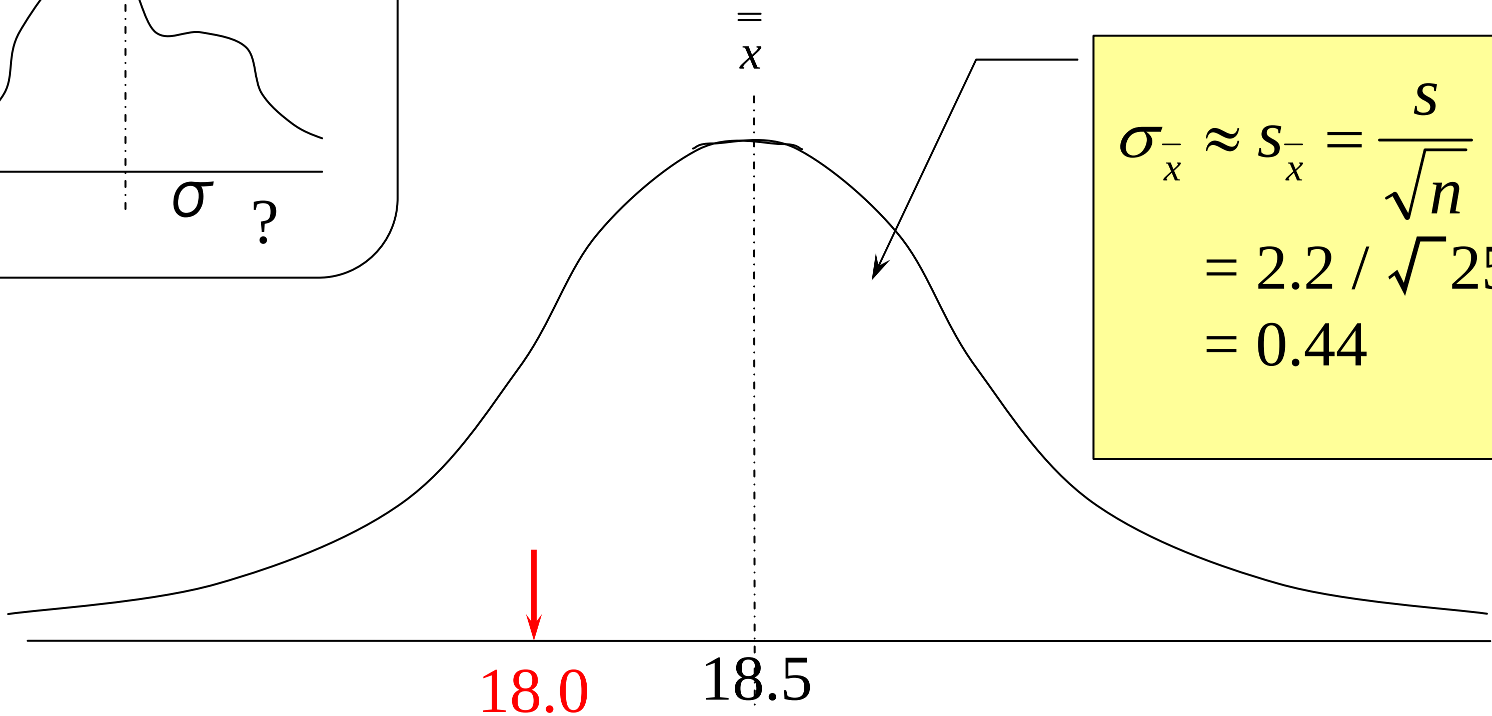
∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

例1 (d): 検定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本 $n = 25$



$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.2 / \sqrt{25}$$

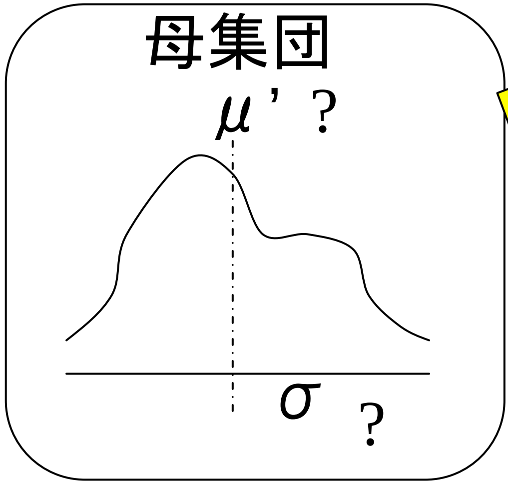
$$= 0.44$$

- 18.0 は添加剤車の値として珍しいか?
- 珍しいかどうかは、標準化した値で判断する

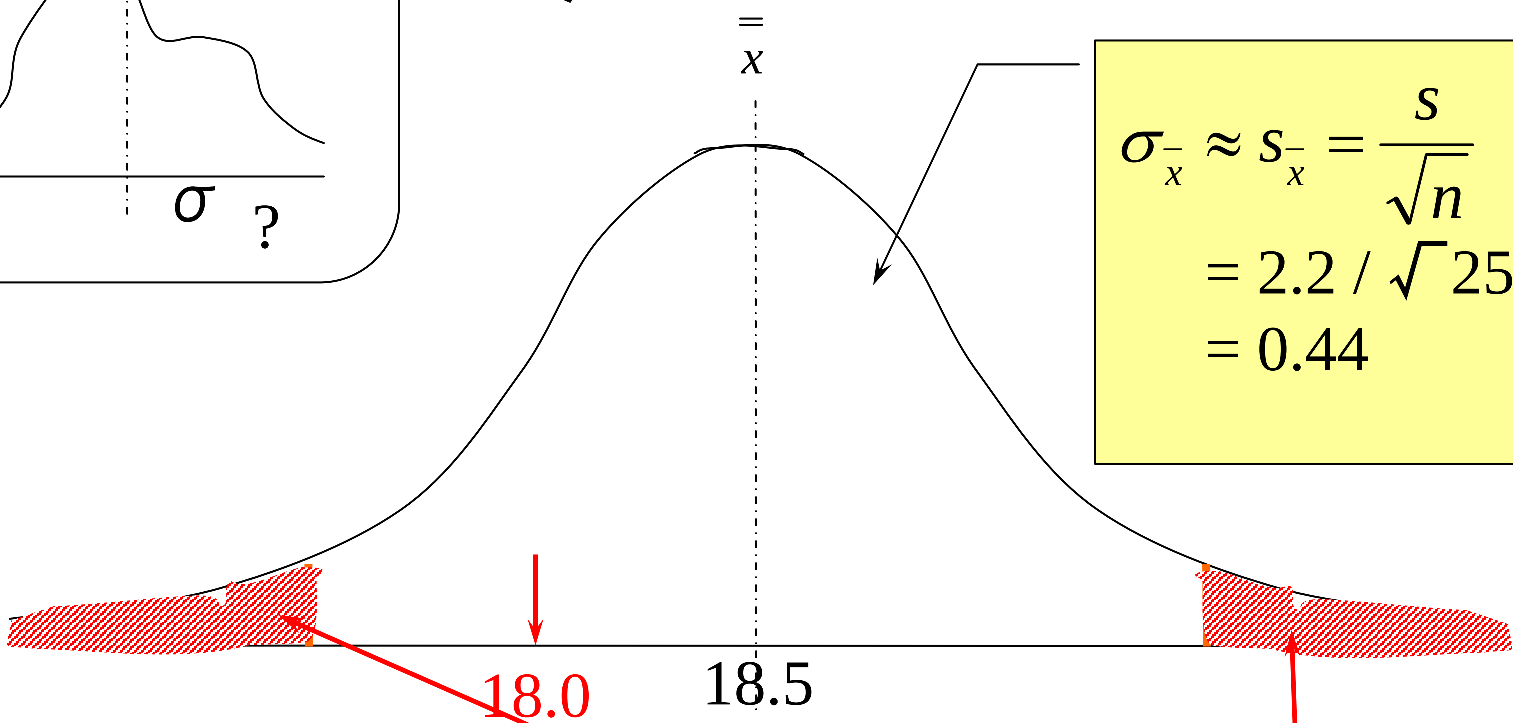
$$\frac{18.0 - \bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{18.0 - 18.5}{0.44} = \frac{-0.5}{0.44} = -1.14$$

例1 (d): 検定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本　$n = 25$



$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.2 / \sqrt{25} = 0.44$$

- 18.0 は添加剤車の値として珍しいか?
- 珍しいかどうかは、標準化した値で判断する

$$\frac{18.0 - \bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{18.0 - 18.5}{0.44} = \frac{-0.5}{0.44} = -1.14$$

信頼確率 0.95　→ $t = 2.0639$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

95%の信頼区間外 (18.0は区間内)

例1 (d): 検定の考え方

- 帰無仮説
  - H_0: 添加剤車の μ =18.0
    - (添加剤の効果はない)
- 対立仮説
  - H_1: 添加剤車の $\mu \neq 18.0$
    - (添加剤の効果はある) [両側検定]
- 検定結果
  - $|t| = |-1.14| < t_0$ (有意確率0.95のt値) = 2.063

帰無仮説と対立仮説

- 帰無仮説 H_0
  - 検定する仮説。結果が「有意」でなければ採択される。
  - 例)目だった差がない、薬品などの効果がない
- 対立仮説 H_1
  - 結果が「有意」のとき、採択される。
  - 例) 目だった差がある、薬品などの効果がある

※ H は hypothesis (仮説) の頭文字

教科書の例

- p.158～: 頭蓋骨の例
  - H_0: $\mu = 190$
  - H_1: $\mu = 196$
  - 二種類の過誤
- p.163～: 例1 (片側検定), 電球の寿命
  - H_0: $\mu = 1180$
  - H_1: $\mu < 1180$

2種類の過誤

		検定の結果	
		有意でない	有意
		H_0を採択	H_1を採択
真実(誰にもわからない)	H_0が真	正しい （確率：1−α）	✕ 第1種の過誤 （確率：α=有意水準）
	H_1が真	✕ 第2種の過誤 （確率：β）	正しい （確率：1−β=検出力）

(教科書p.159, 表1 に加筆)

- 第1種の過誤をしてしまう確率はαでコントロールできる
  - α: 有意確率 (“1 – α” は「推定」での信頼確率と同じ)
- 第2種の過誤の確率は神のみぞ知る
  - αを小さくしすぎなければ、βも大きくならないことがわかっている

教科書の例

- p.165～: 例2 (両側検定) 適性検査の点数
  - – H_0: μ =115
  - – H_1: $\mu \neq 115$
- 一般には両側検定の場合が多い
- 第1種の過誤α = 1 – 信頼確率
- α=0.05 (信頼確率=0.95) のとき、第2種の過誤βも小さくなることが経験的にわかっている