2013年度 森林統計学

第12回 7月2日 検定
講義資料

高知大学農学部　森林科学コース
主担当　　鈴木保志

復習

定理2（中心極限定理）

定理2. xが平均μ、標準偏差σのある分布に従うとき、大きさnの無作為標本に基づく標本平均 $\overline{x}$ は、nが無限に大きくなるとき、平均μ、標準偏差$\sigma/\sqrt{n}$ の正規分布に近づく。

- 要点: $\overline{x}$の分布は (*n* が大きければ正規分布に従い、)

① $\overline{\overline{x}} \doteqdot \mu$

② $s_{\overline{x}} \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

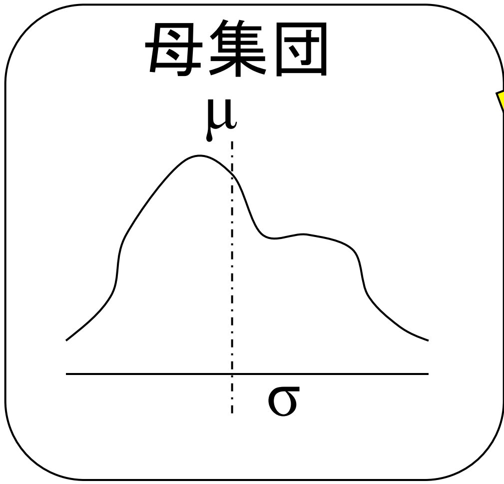
となる

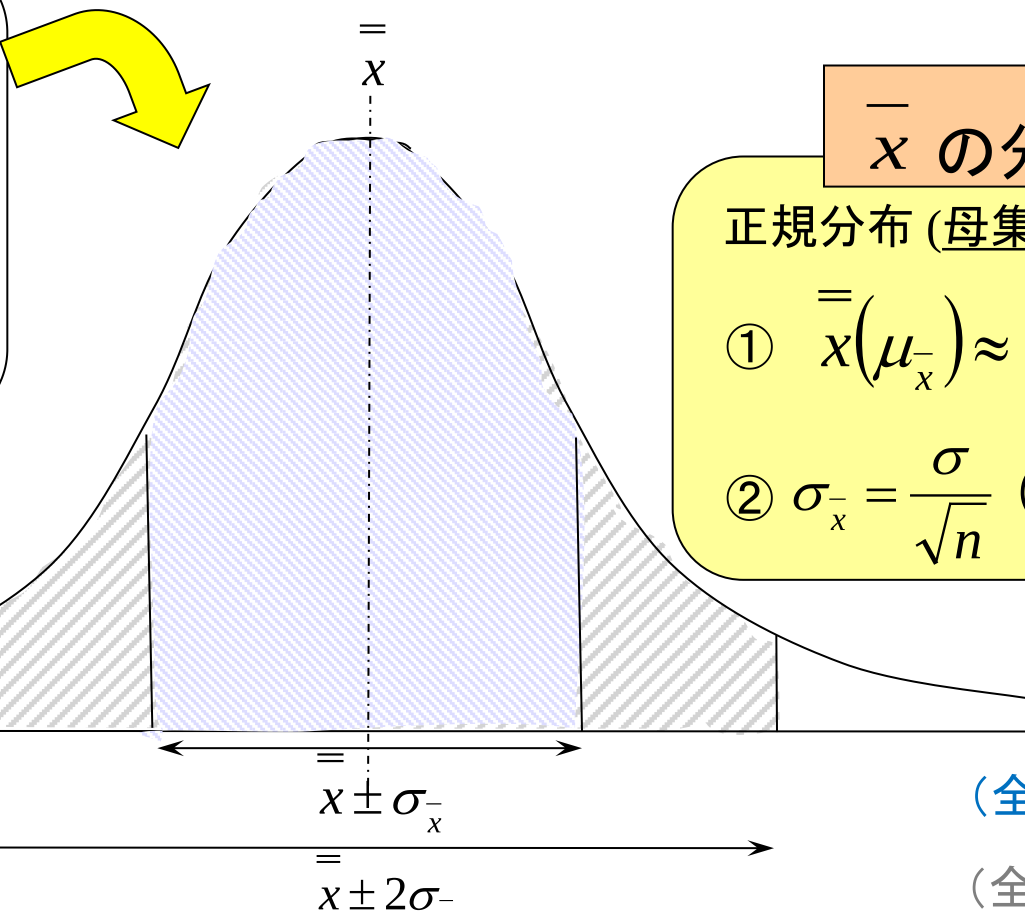
- nが大きくなるほどμの推定精度が高くなる。
- 実は標本抽出の回数には関係ない（どの標本も同じ確度）

定理2 のイメージ

復習

n 個の標本$(x_1, x_2, \dots , x_n)$抽出→ $\bar{x}$ を算出





（全体の 68%）

（全体の95%）

$\bar{x}$ の分布

正規分布 (<u>母集団に関わらず</u>)

① $\bar{\bar{x}}\left(\mu_{\bar{x}}\right) \approx \mu$

② $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ （標準誤差）

- 正規分布なので、平均値±標準偏差に入る確率は正規分布表に従う→推定に正規分布表を利用できる

復習

推定の要点

- 母平均の信頼区間を求める
  - 母平均の点推定値は標本平均 (信頼区間の中心)

$$\bar{x}$$

  - 信頼区間 e は 標準誤差 $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の z 倍

$$\bar{x} \pm e \quad \left(e = z \cdot \sigma_{\bar{x}}\right)$$

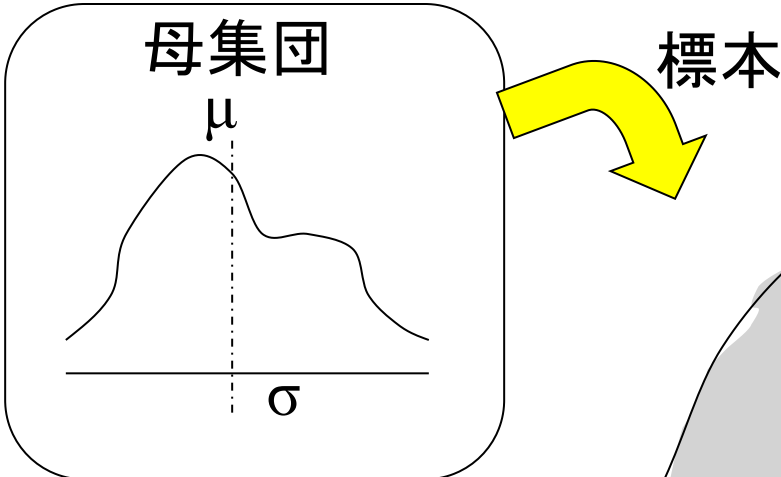
まとめて書くと

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

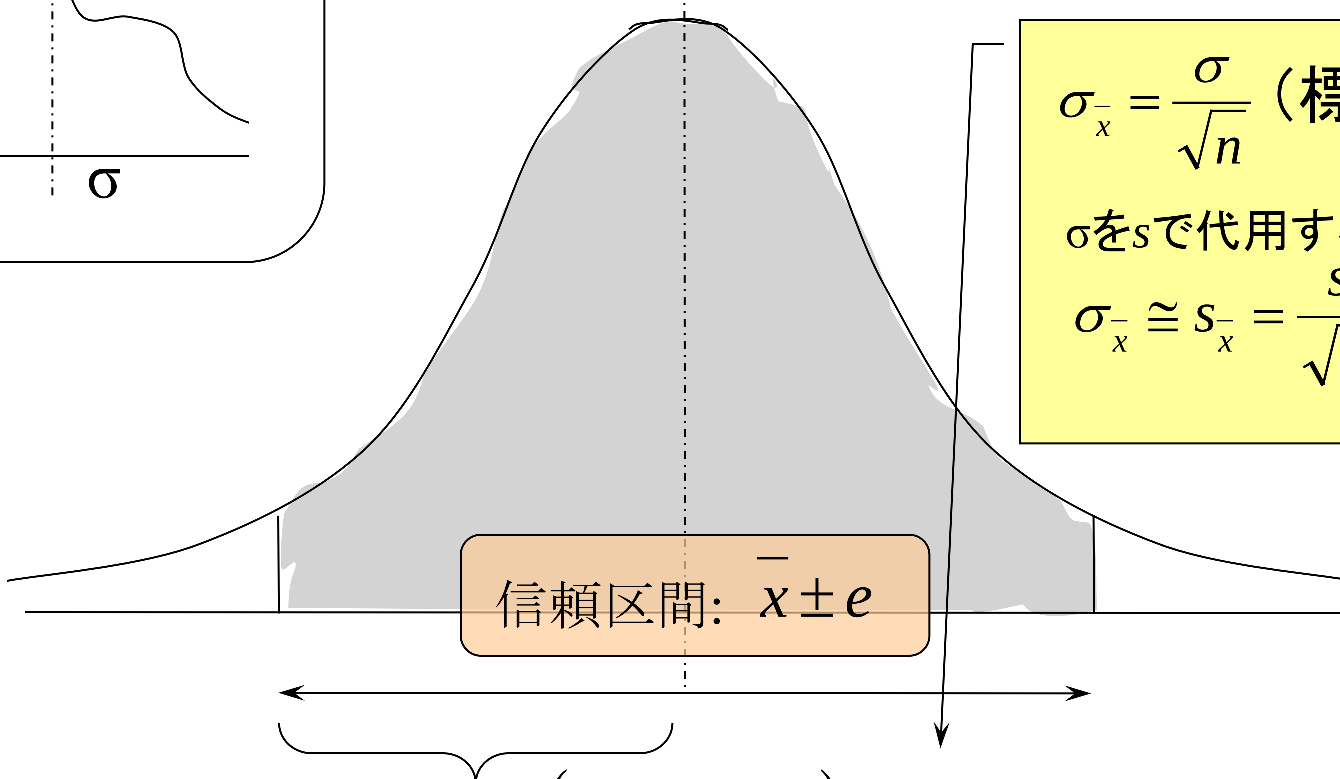
    - 標準誤差 $\sigma/\sqrt{n}$ は標本平均 $\bar{x}$ の標準偏差
    - z は約2 (標準偏差の±2倍の範囲内に約9割が入る)
      - 正確には信頼確率95%とすると z = 1.96 (表IVから)

復習

信頼区間と$\bar{x}$の分布



$\bar{\bar{x}}$



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

σをsで代用すると

$$\sigma_{\bar{x}} \cong s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ となる

$$\text{信頼幅 } e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}}$$

z (またはt): 信頼確率により決まる

95%が使われることが多い

復習

信頼区間の推定手法

母集団: 平均μ, 標準偏差σ
標本: 標本数 n, 標本平均 , 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes → 定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu, \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No ↓

nは大きい? $n \geqq 25$?

Yes → 定理2: σをsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu, \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No ↓

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度$\nu = n-1$
により異なる
(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z$または$t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

復習

推定の要点

- 普通は、教科書p.150 例1. の(d)のパターン [推定フローチャートの一番下のパターン] が多い
  - 母平均μ・母標準偏差σ不明で標本数も多くない
  - σをs (標本標準偏差) で置きかえた定理2を適用
  - z (正規分布) でなくt 分布を使う
- 母平均の点推定値は標本平均
- 信頼区間は

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - t は t 分布表から求める (自由度$\nu = n - 1$)

復習

第7章の問題の推奨問題

- 2節(母平均μの推定): 1., 3., 4.
- 3節(大標本法 - σの不偏推定値*s*の利用): 9., 12., 13.
- 5節(小標本法 - *t*分布): 25, 26, 28., 29.
  - 問題26: 大標本法と小標本法の比較
    - 小標本法(*t*分布)は精度が低くなる(信頼区間の幅が広くなる)ので、可能ならば*n*を大きくして大標本法(正規分布)が使えるようにしたほうがよい
- 一般問題: 30.

第8章 検定

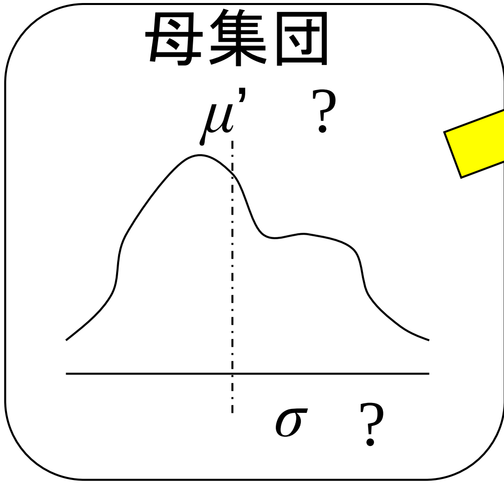
- 検定: ある値が信頼区間に入っているかどうか?
- 推定ができれば検定の方が簡単

第7章 6. 例1を検定の観点から

- 例1 (d): 標本平均（添加剤車）から母平均を推定して、その中に従来車の平均値が入っているか?
  – 手順: 信頼区間(18.5±0.90=17.6〜19.4)を求めて、その範囲に従来車の平均値(μ=18.0)が入っているか?
- 検定の観点から考えると
  – 添加剤車の標本平均の分布で、18.0は珍しい値か?

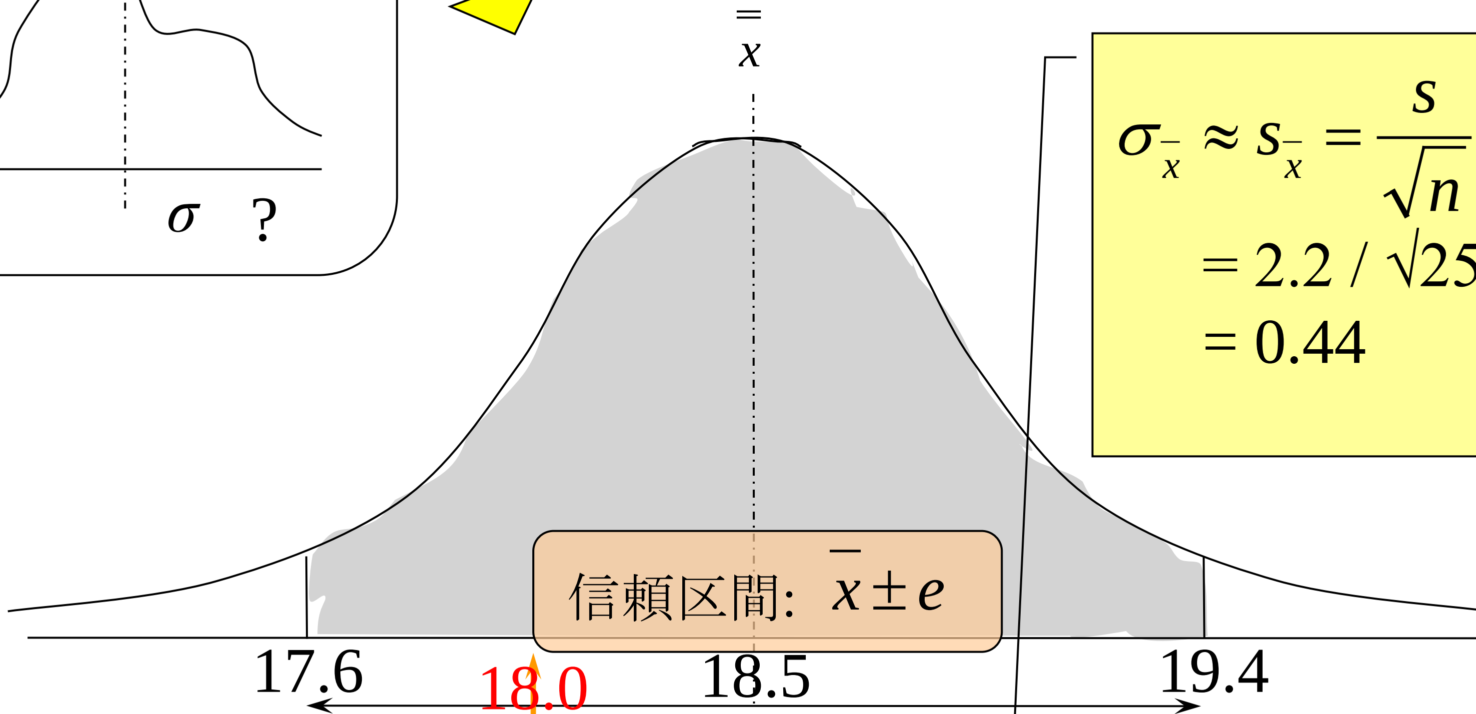
例1 (d): 推定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本 $n = 25$,

$\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$



$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.2 / \sqrt{25}$$

$$= 0.44$$

信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

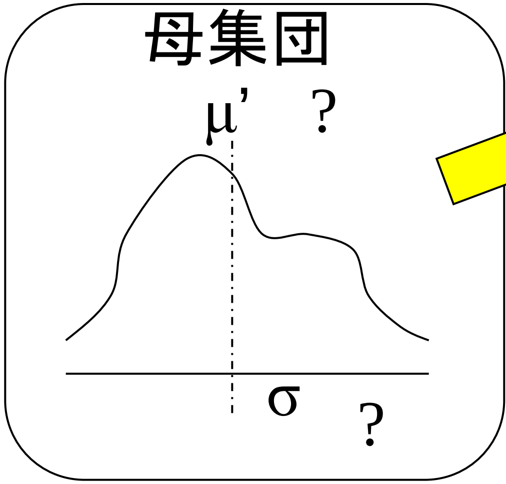
<u>信頼確率</u> 0.95 → $t = 2.0639$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

無添加母集団のμ= 18.0 はこの範囲内

∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

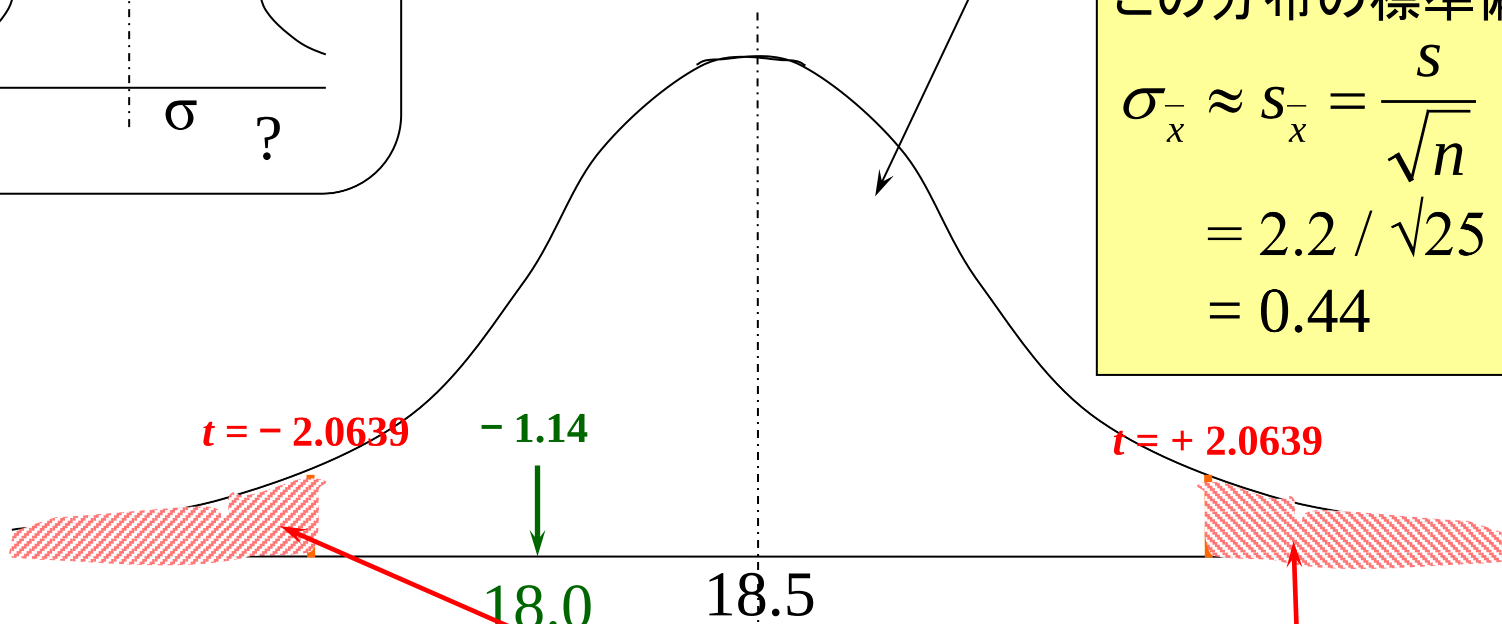
例1 (d): 検定の考え方



標本 $n = 25$

$\bar{x} = 18.5,\ s = 2.2$

小標本法 (t分布を使用)



この分布の標準偏差は…

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.2 / \sqrt{25}$$

$$= 0.44$$

- 18.0 は添加剤車の値として珍しいか?
- 珍しいかどうかは、**標準化**した値で判断する

標準化: 平均値から標準偏差の何倍離れているか?

$$\frac{18.0 - \bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{18.0 - 18.5}{0.44} = \frac{-0.5}{0.44} = -1.14$$

信頼確率 0.95 → $t = 2.0639$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

95%の信頼区間外 (18.0は区間内)

例1 (d): 検定の考え方

- 帰無仮説
  - H_0: 添加剤車の μ=18.0
    - (添加剤の効果はない)
- 対立仮説
  - H_1: 添加剤車の $\mu \neq$18.0
    - (添加剤の効果はある) [両側検定]
- 検定結果
  - $|t| = |-1.14| < t_0$ (有意確率0.95の t 値) = 2.063

帰無仮説と対立仮説

- 帰無仮説 H_0
  - 検定する仮説。結果が「有意」でなければ採択される。
  - 例)目だった差がない、薬品などの効果がない
- 対立仮説 H_1
  - 結果が「有意」のとき、採択される。
  - 例) 目だった差がある、薬品などの効果がある

※ H は hypothesis (仮説) の頭文字

教科書の例

- p.158～: 頭蓋骨の例
  - H_0: μ=190
  - H_1: μ=196
  - 二種類の過誤
- p.163～: 例1 (片側検定), 電球の寿命
  - H_0: μ=1180
  - H_1: μ<1180

2種類の過誤

真実 (誰にもわからない)		検定の結果	
		有意でない	有意
		H_0を採択	H_1を採択
	H_0が真	正しい (確率：$1-\alpha$)	第1種の過誤 (確率：α=有意水準)
	H_1が真	第2種の過誤 (確率：β)	正しい (確率：$1-\beta$=検出力)

(教科書p.159, 表1 に加筆)

- 第1種の過誤をしてしまう確率はαでコントロールできる
  - α: 有意確率 (“$1-\alpha$” は「推定」での信頼確率と同じ)
- 第2種の過誤の確率は神のみぞ知る
  - αを小さくしすぎなければ、βも大きくならないことがわかっている

第8章の問題の推奨問題

- 1節. 2種類の過誤: 1., 3.
- 2節. 平均値の検定: 6., 7., 9. , 13
- 4節. 正規分布による平均値の差の検定: 22., 24.
- 6節. 小標本法 - t検定: 33., 34., 35.
- 一般問題: 37

1節 1.

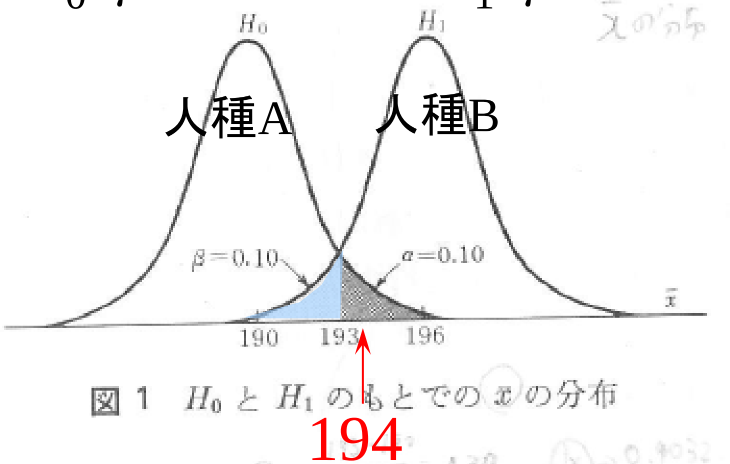
被告を窃盗罪で審理する裁判の場合、2種類の過誤に当たるものは何か。

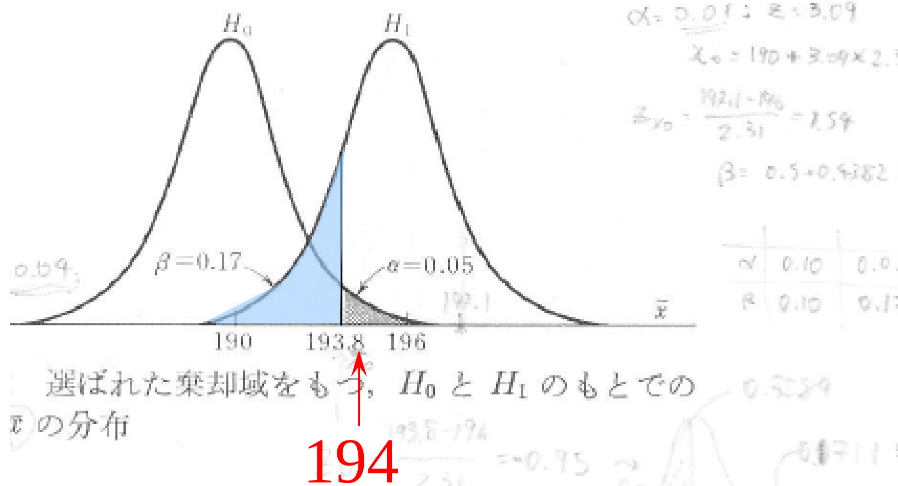
社会的にみて、どちらの種類の過誤がより重要とみなされるか。

2種類の過誤: 教科書p.160～の頭蓋骨の例

帰無仮説　　　　対立仮説

H_0: μ=190　　　H_1: μ=196





得られた標本の $\bar{x}$ =194だったらどう判断するか?

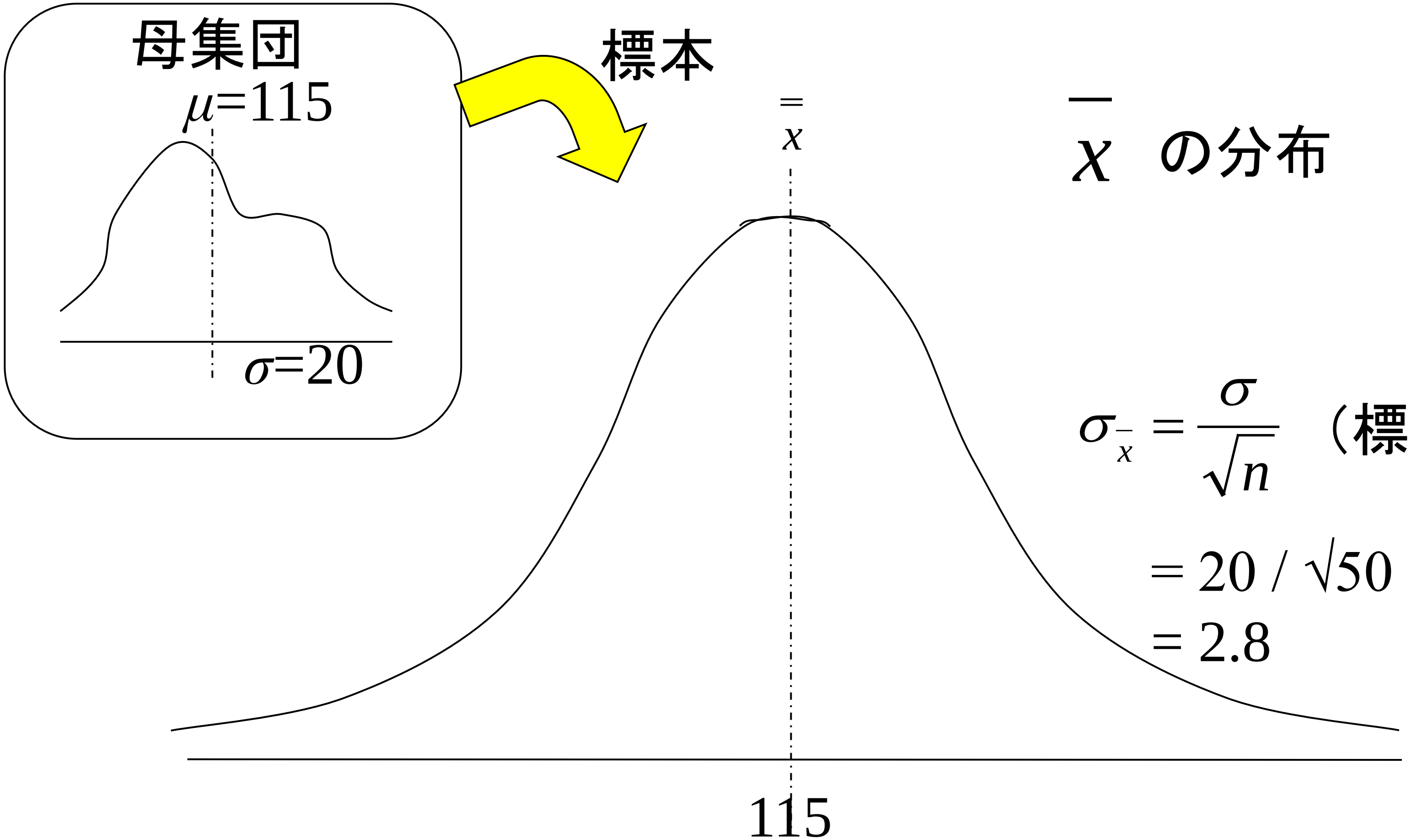
- 左: α = 0.10 としたとき、この例では β = 0.10
- 右: α をより小さく、0.05 とすると、β は0.17 と大きくなる
  - α と β はトレードオフの関係

教科書の例

- p.165～: 例2 (両側検定) 適性検査の点数
  - H_0: μ=115
  - H_1: $\mu \neq$115
- 一般には両側検定の場合が多い
- 第1種の過誤α = 1 – 信頼確率
- α=0.05 (信頼確率=0.95) のとき、第2種の過誤βも小さくなることが経験的にわかっている

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118,\ \sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

$= 20 / \sqrt{50}$

$= 2.8$

- μ=115、σ=20 の母集団からとられた n = 50 の標本の標本平均 $\bar{x}$ の分布は…
  - 平均値 115 (＝μ)
  - 標準偏差 2.8 (＝$\sigma/\sqrt{n}$ [標準誤差]) の正規分布になる

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x}=118$, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.960) より大きいか?

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118$, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?

「推定」の復習
・μ=115, σ=20 の母集団からの n = 50 の標本平均の信頼区間は?

復習

信頼区間の推定手法

母集団: 平均μ, 標準偏差σ

標本: 標本数 n, 標本平均 $\bar{x}$, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes

定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \doteqdot \mu,\ \ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No

nは大きい?
$n \geqq 25$?

Yes

定理2: σをsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \doteqdot \mu,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \doteqdot \mu,\ \ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度$\nu=n$-1
により異なる
(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

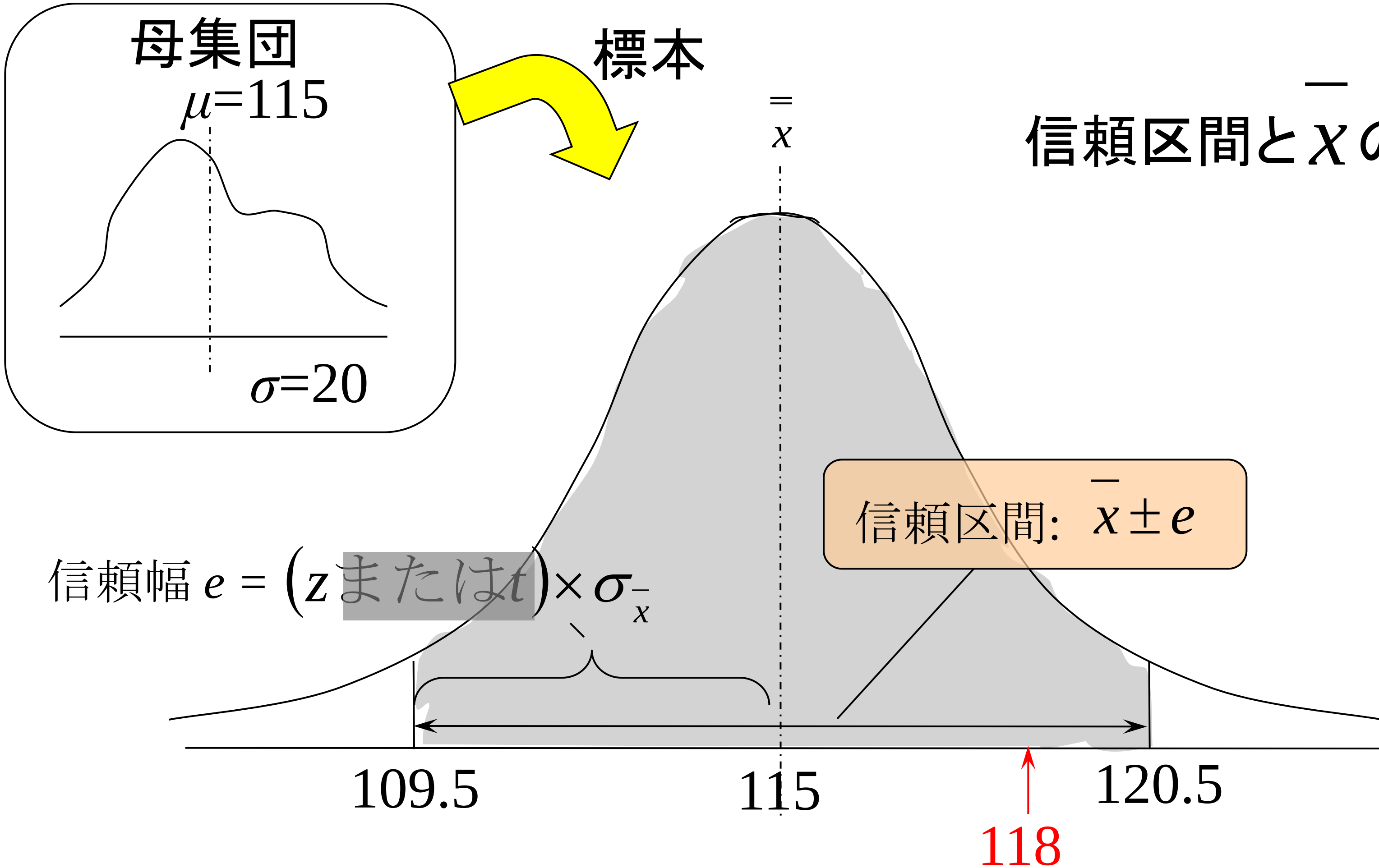
信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x}=118,\ \sigma_{\bar{x}}=20/\sqrt{50}=2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
  - α=0.05 とすると z =1.960（表IVから）
  - 信頼区間 115±1.960×2.8 = 115±5.5=109.5〜120.5

信頼区間と $\overline{x}$ の分布



- 標本(n=50)がμ=115, σ=20の母集団から採られたとしたら、その標本平均 $\overline{x}$ は95%の確率で109.5～120.5の間の値をとる。
- 実際の $\overline{x}$ は118 で信頼区間内

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点 μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0: \mu=115$
  - $H_1: \mu\neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x}=118$, $\sigma_{\bar{x}}=20/\sqrt{50}=2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
  - α=0.05 とすると z =1.960（表IVから）
  - 信頼区間 115±1.960×2.8 = 115±5.5=109.5〜120.5
  - $\bar{x}$=118は信頼区間内→めずらしいことではない
  - $H_0: \mu=115$ は<u>棄却されない</u> (有意ではない)
    - **新入生の平均点118 は これまでの学生の平均点115 と<u>有意な差はない</u>**

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118, \ \sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.960) より大きいか?

平均値(1つの平均)の検定

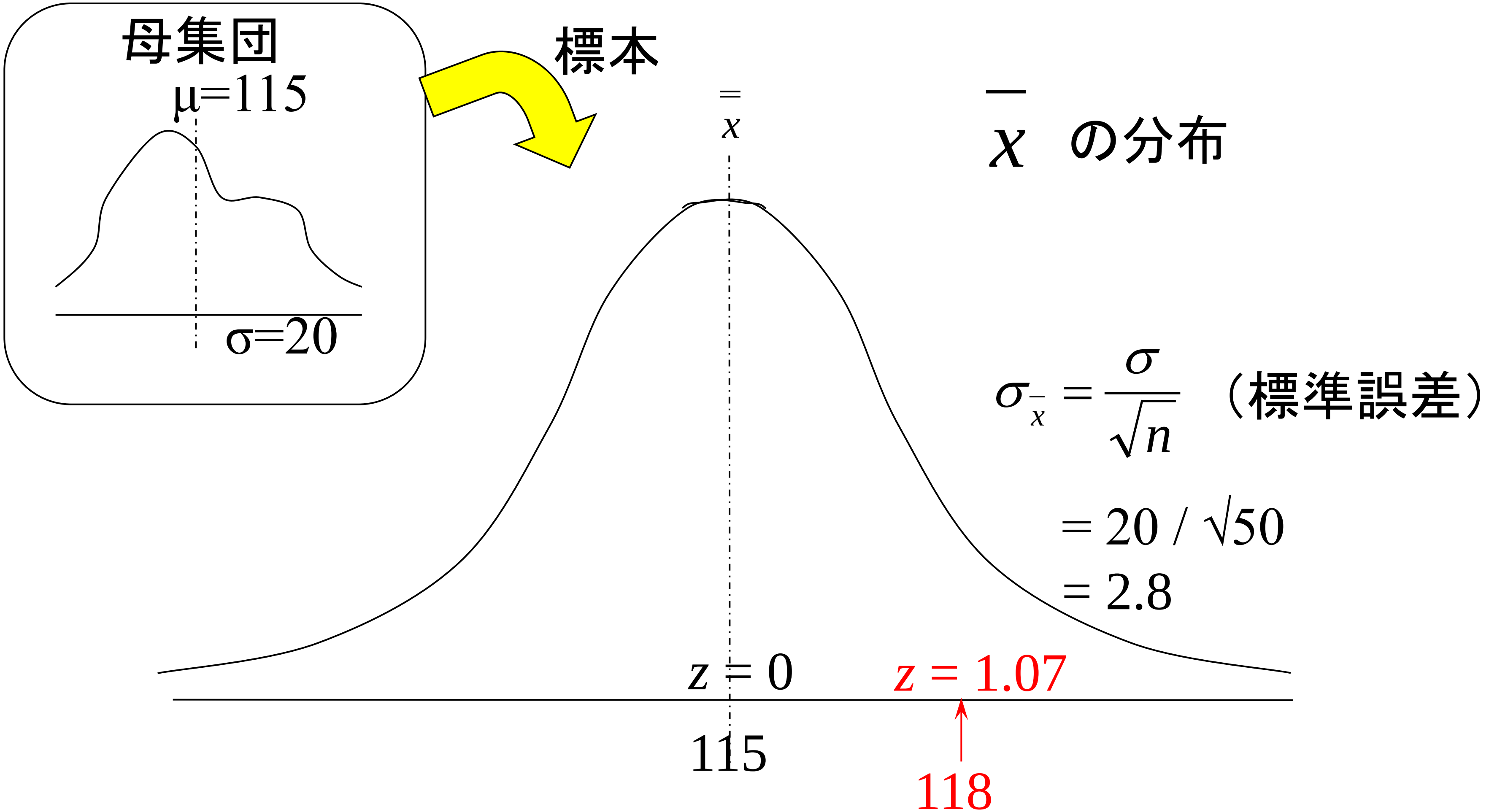
- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - H_0 : μ=115
  - H_1 : μ≠115 [両側検定]
  - $\bar{x}$=118, $\sigma_{\bar{x}}$=20 /√50 = 2.8
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.960) より大きいか?

復習

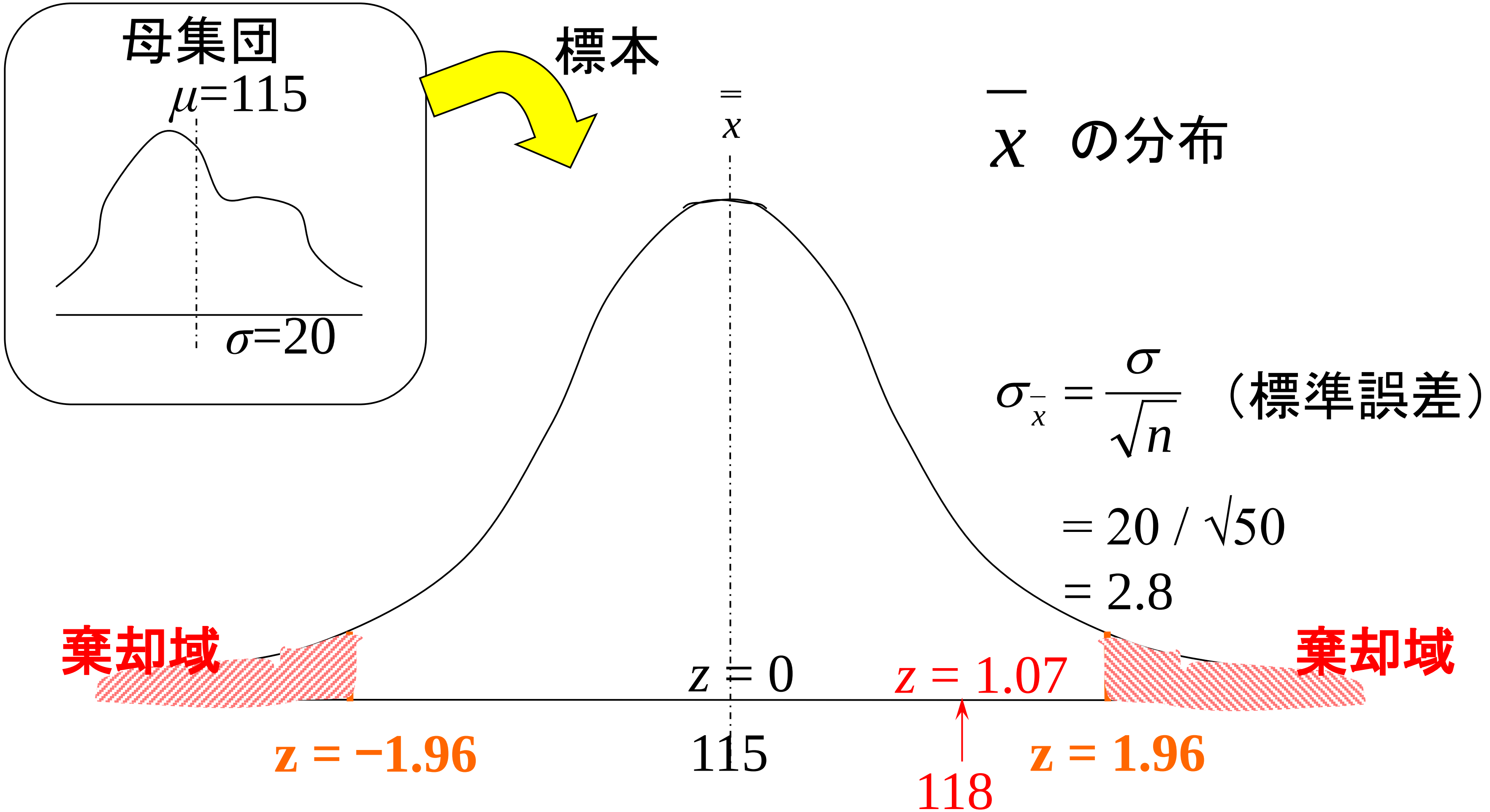
・σ=20 の母集団から採られた n = 50 の標本平均は118だった。
母平均115に対するz (118と115の標準化した差)は?

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - H_0 : μ=115
  - H_1 : μ≠115 [両側検定]
  - $\bar{x}$=118, $\sigma_{\bar{x}}$=20 /√50 = 2.8
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.960) より大きいか?
  - 118を標準化すると z'= (118 – 115) / 2.8 = 1.07



- μ=115、σ=20 の母集団からとられた $n = 50$ の標本の標本平均 $\bar{x}$ の分布において…
  - 118 は 平均値の115から標準偏差の1.07倍離れている



- 118 は 平均値の115から標準偏差の1.07倍離れている
- α=0.05 とすると z =1.960（表IVから）
- 118 はα=0.05 の危険率による閾値内
  - 「1−α=0.95 (95%)の信頼区間内」と意味は同じ

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0: \mu = 115$
  - $H_1: \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118$, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.960) より大きいか?
  - 118を標準化すると z’= (118 – 115) / 2.8 = 1.07
  - α=0.05 とすると z =1.960（表IVから）
  - |z’| < z なので→めずらしいことではない
  - $H_0: \mu = 115$ は<u>棄却されない</u> (有意ではない)
    - 平均点118 は 115 と有意な差はない

第8章の問題の推奨問題

- 1節. 2種類の過誤: 1., 3.
- 2節. 平均値の検定: 6., 7., 9. , 13
- 4節. 正規分布による平均値の差の検定: 22., 24.
- 6節. 小標本法 - t検定: 33., 34., 35.
- 一般問題: 37.

6. $\bar{x}=82, \sigma=16, n = 100$; $H_0: \mu=86$

7. $\bar{x}=82, \sigma=16, n = 25$; $H_0: \mu=86$

9. $H_0: \mu > 64$

$\bar{x}=68, \sigma=8, n = 55$

次回の課題[課題5]の準備

- データを2組×2用意(検定するため)
  - 次回講義時間内にとりかかれるように
- 数は任意だが、
  - 正規分布を適用できる場合($n > 20$〜25)と
  - t 分布を使うべき場合($n < 20$〜25)と、
    1組ずつとする