2014年度 森林統計学

第12回 7月8日 検定
講義資料

高知大学農学部　森林科学コース
主担当　　鈴木保志

不偏推定値・定理1・定理2の復習

- 過去(2011年)の試験問題から

> 問1. 以下のいずれかの問題を選択して答えよ(15点)。
>
> ③[中心極限定理] 調査や実験などでは未知の母集団についての何らかの平均値を推定するためにデータを採取する。この目的のためには、データ数は大きくした方が好ましいが、その理由を統計の理論と関連付けて説明せよ。

- 各自試験と思って解答してみる(答えをノートに書く)
- その間に[課題4]と再提出課題の返却をします

復習

定理2（中心極限定理）

定理2. x が平均 μ、標準偏差 σ のある分布に従うとき、大きさ n の無作為標本に基づく標本平均 $\overline{x}$ は、n が無限に大きくなるとき、平均 μ、標準偏差 $\sigma/\sqrt{n}$ の正規分布に近づく。

「の分布は…」の意味は、その平均や標準偏差がどうなるか、ということ

- 要点: $\overline{x}$ の分布は （n が大きければ正規分布に従い、）

① $\overline{\overline{x}} \fallingdotseq \mu$

② $\boxed{s_{\overline{x}} \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ となる

• n が大きくなるほど、標本平均 $\overline{x}$ のバラつきは小さくなる

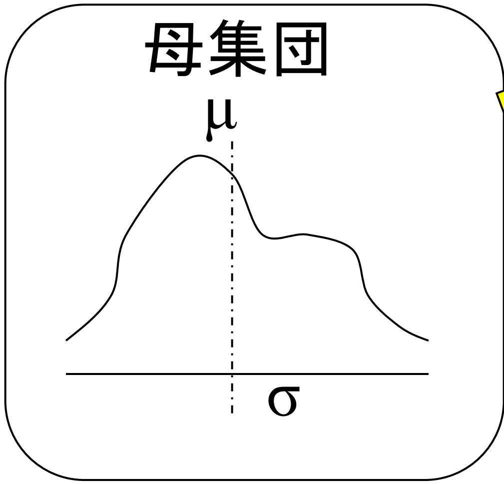
$\therefore$ $\overline{x}$ による母平均 μ の推定精度が高くなる

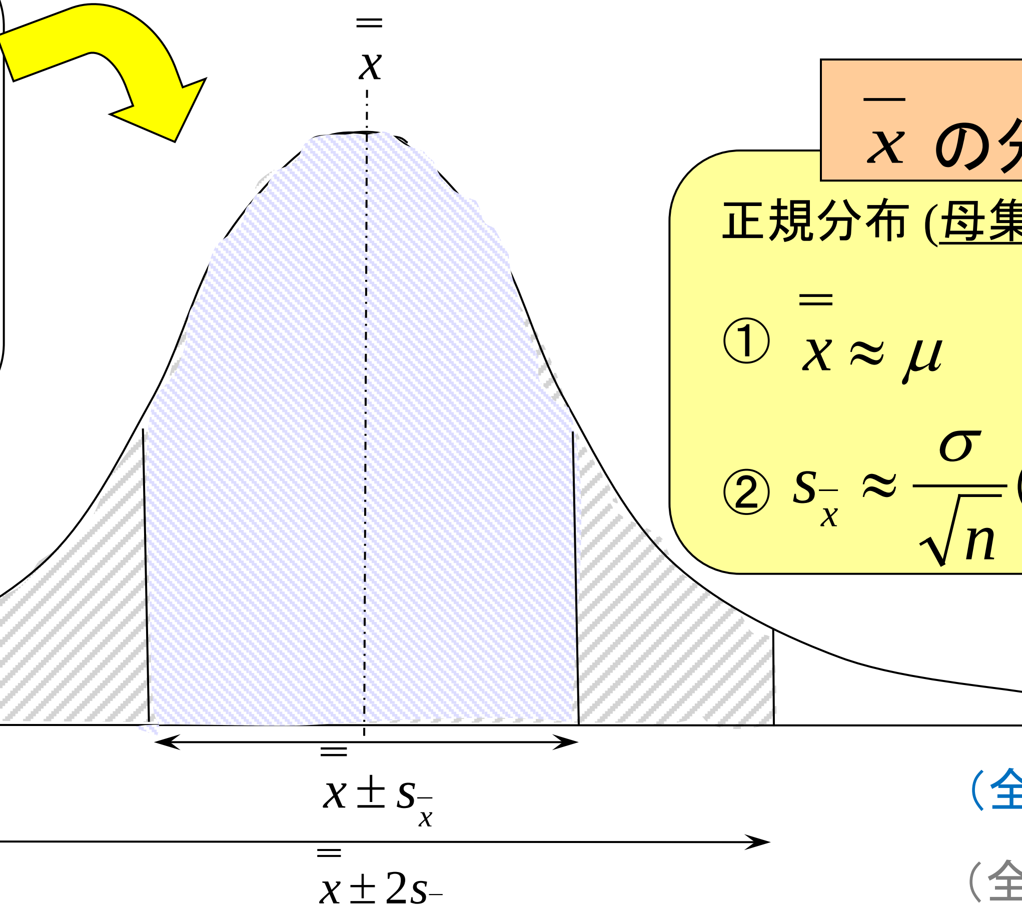
試験問題の解答の要点

復習

定理2 のイメージ

n 個の標本($x_1, x_2, \dots , x_n$)抽出→ $\bar{x}$ を算出





（全体の 68%）

（全体の95%）

$\bar{x}$ の分布

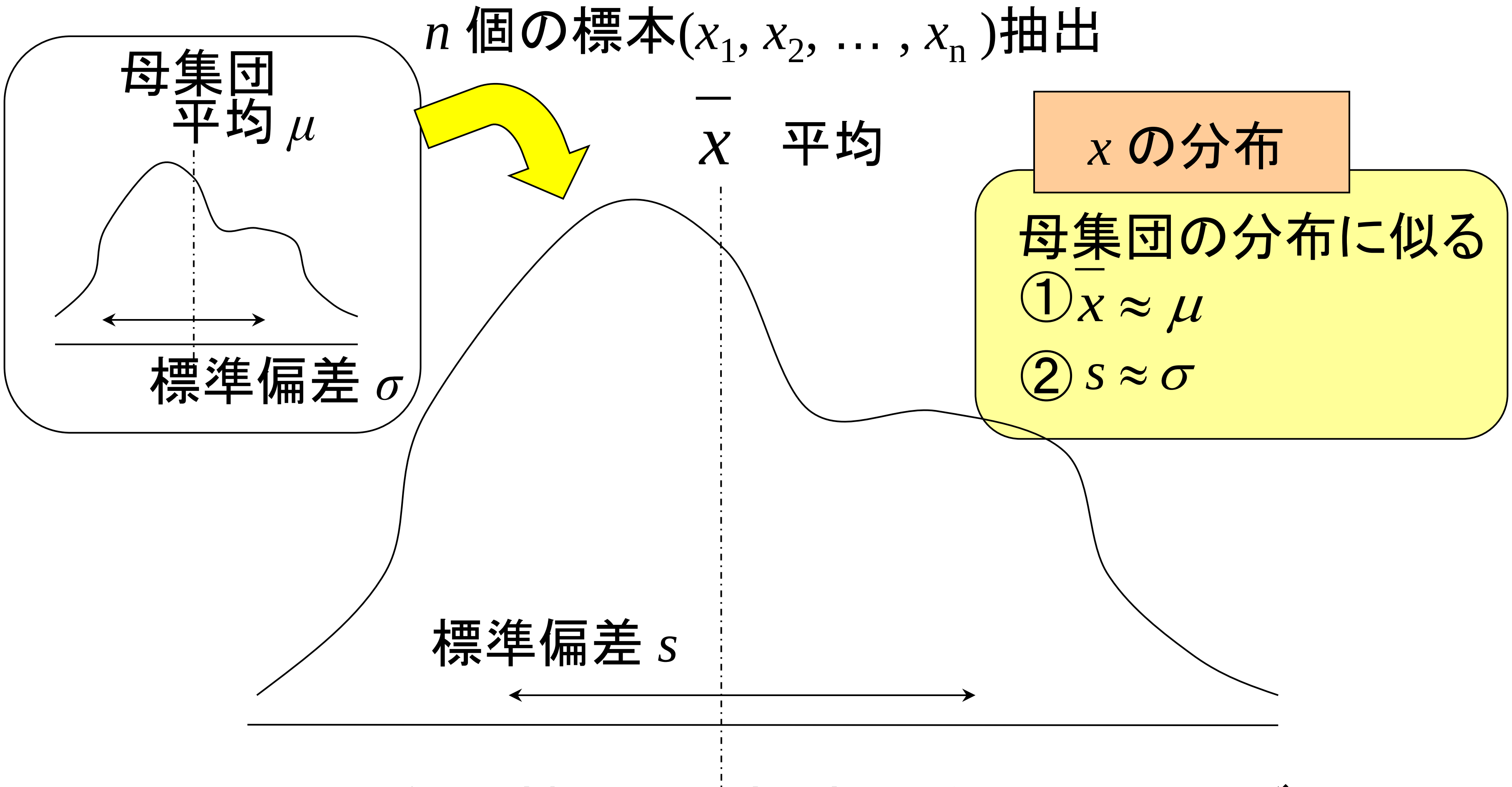
正規分布 (母集団に関わらず)

① $\bar{\bar{x}} \approx \mu$

② $s_{\bar{x}} \approx \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$（標準誤差）

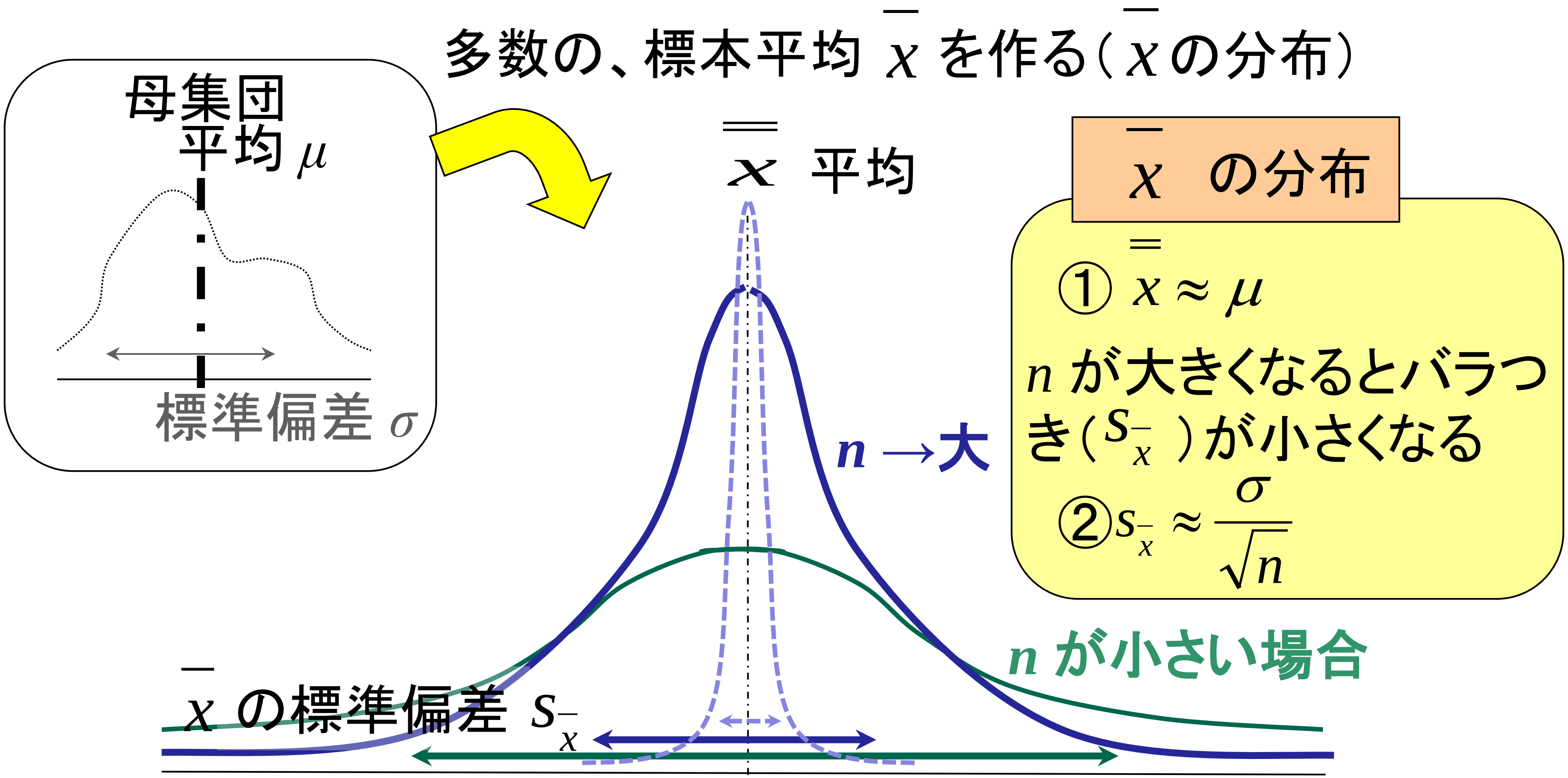
- 正規分布なので、平均値±標準偏差に入る確率は正規分布表に従う→推定に正規分布表を利用できる

個々の標本は母集団を再現する



- 課題4 だと、抽出した標本で作ったヒストグラムがこれに相当する

標本平均 $\bar{x}$ の分布は母平均 μ に収束する



- 母平均がどんな分布でも、母平均というひとつの値に収束する
  → 正規分布（誤差の分布）になる
  - n が母集団の N と同じくらいまで大きくなると、完全に $\bar{x} = \mu$ となる

復習

推定の要点

- 母平均の信頼区間を求める
  - 母平均の点推定値は標本平均 (信頼区間の中心)

$$\bar{x}$$

  - 信頼区間 e は 標準誤差 $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ の z 倍

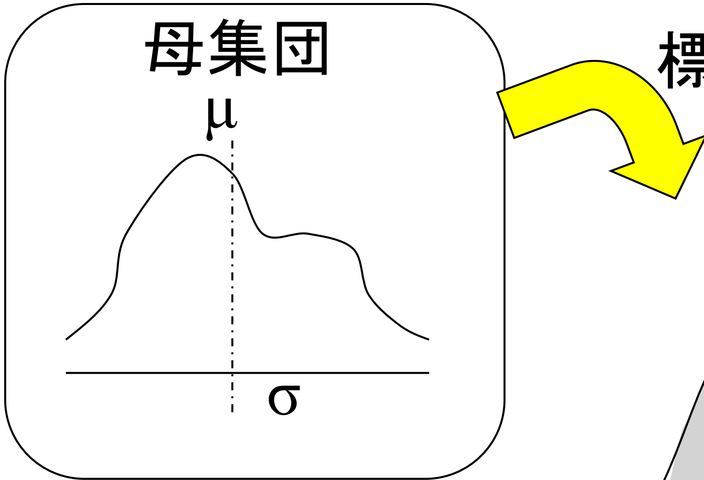
$$\bar{x} \pm e \quad \left(e = z \cdot \sigma_{\bar{x}}\right)$$

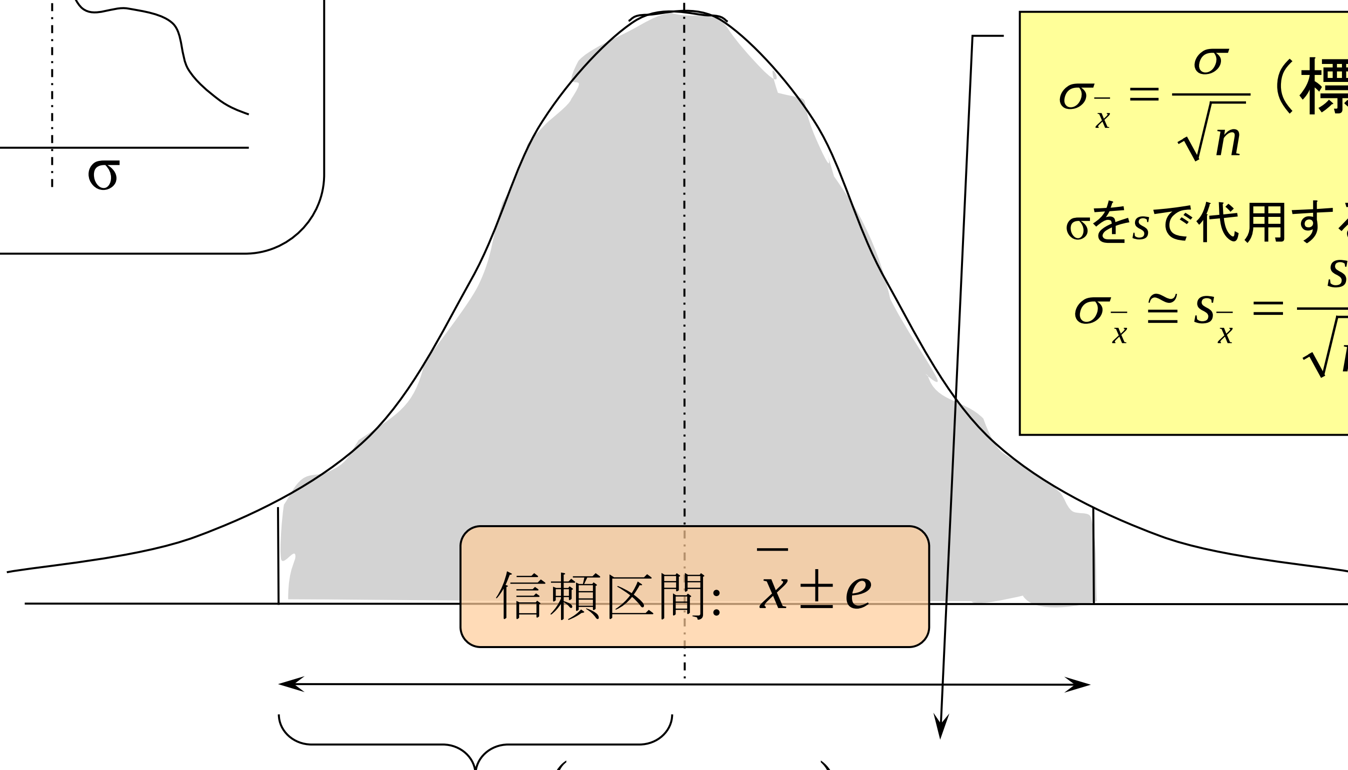
まとめて書くと

$$\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

    - 標準誤差 $\sigma/\sqrt{n}$ は標本平均 $\bar{x}$ の標準偏差
    - z は約2 (標準偏差の±2倍の範囲内に約9割が入る)
      - 正確には信頼確率95%とすると z = 1.96 (正規分布表[表IV] から)

信頼区間と$\bar{x}$の分布





$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

σをsで代用すると

$$\sigma_{\bar{x}} \cong s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$ となる

信頼幅 $e = \left(z\text{または}t\right) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

95%が使われることが多い

復習

信頼区間の推定手法

母集団: 平均μ, 標準偏差σ
標本: 標本数 n, 標本平均 , 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes → 定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu, \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No ↓

nは大きい?
$n \geqq 25$?

Yes → 定理2: σをsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu, \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No ↓

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度ν=n-1
により異なる
(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

信頼幅 $e = (z$または$t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

復習

推定の要点

- 普通は、教科書p.150 例1. の(d)のパターン [推定フローチャートの一番下のパターン] が多い
  - 母平均μ・母標準偏差σ不明で標本数も多くない
  - σをs (標本標準偏差) で置きかえた定理2を適用
  - z (正規分布) でなくt 分布を使う
- 母平均の点推定値は標本平均
- 信頼区間は

$$\bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  - t は t 分布表から求める (自由度$\nu = n - 1$)

復習

第7章の問題の推奨問題

- 2節(母平均μの推定): 1., 3., 4.
- 3節(大標本法 - σの不偏推定値*s*の利用): 9., 12., 13.
- 5節(小標本法 - *t*分布): <u>25</u>, <u>26</u>, 28., 29.
  - 問題26: 大標本法と小標本法の比較
    - 小標本法(*t*分布)は精度が低くなる(信頼区間の幅が広くなる)ので、可能ならば*n*を大きくして大標本法(正規分布)が使えるようにしたほうがよい
- 一般問題: 30.

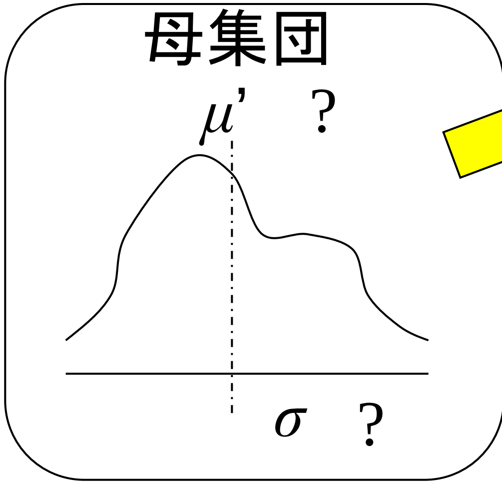
第8章 検定

- 検定: ある値が信頼区間に入っているかどうか?
- 推定ができれば検定の方が簡単

第7章 6. 例1を検定の観点から

- 例1 (d): 標本平均（添加剤車）から母平均を推定して、その中に従来車の平均値が入っているか?
  - 手順: 信頼区間(18.5±0.90=17.6〜19.4)を求めて、その範囲に従来車の平均値(μ=18.0)が入っているか?
- 検定の観点から考えると
  - 添加剤車の標本平均の分布で、18.0は珍しい値か?

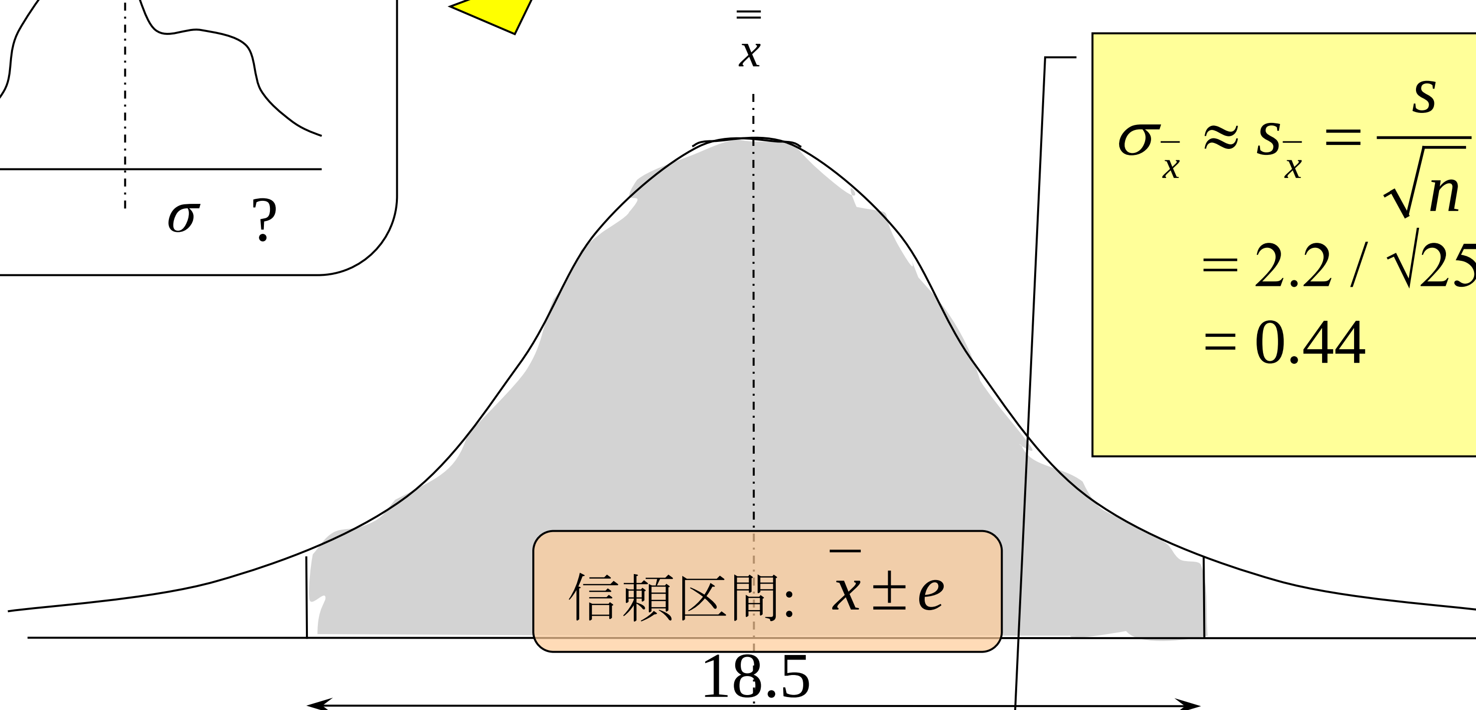
例1 (d): 推定の考え方



標本 $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

小標本法 (t分布を使用)

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$



信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}}$

<u>信頼確率</u> 0.95 $\rightarrow t = 2.064$
自由度$\nu = 25 - 1 = 24$

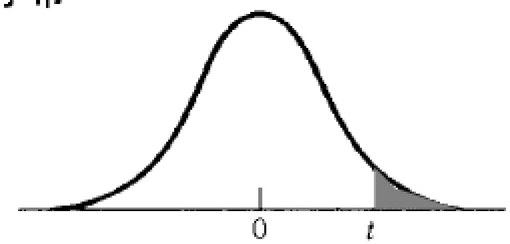
t分布表(表V) の見方の復習

復習

危険率 $P = (1 - \text{信頼率}) / 2$
信頼率: 0.95

表 V　スチューデントの t 分布

表側の数字は自由度（ν）を表わす．表頭の数字は t が表の中の数値を超える確率（P）を表わす．負の t の値に対しては分布の対称性を利用すればよい．

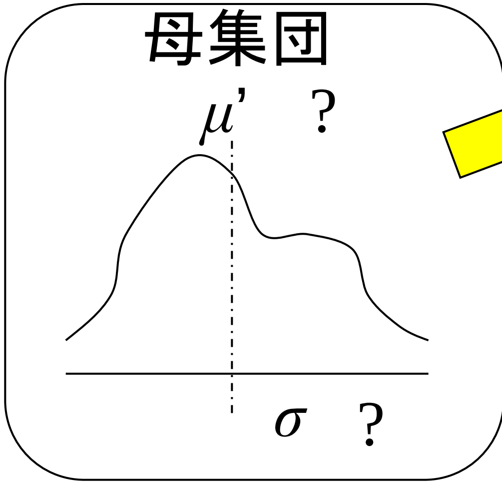


ν \ P	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	$\boxed{2.064}$	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771

自由度
ν(ニュー)は $n-1$

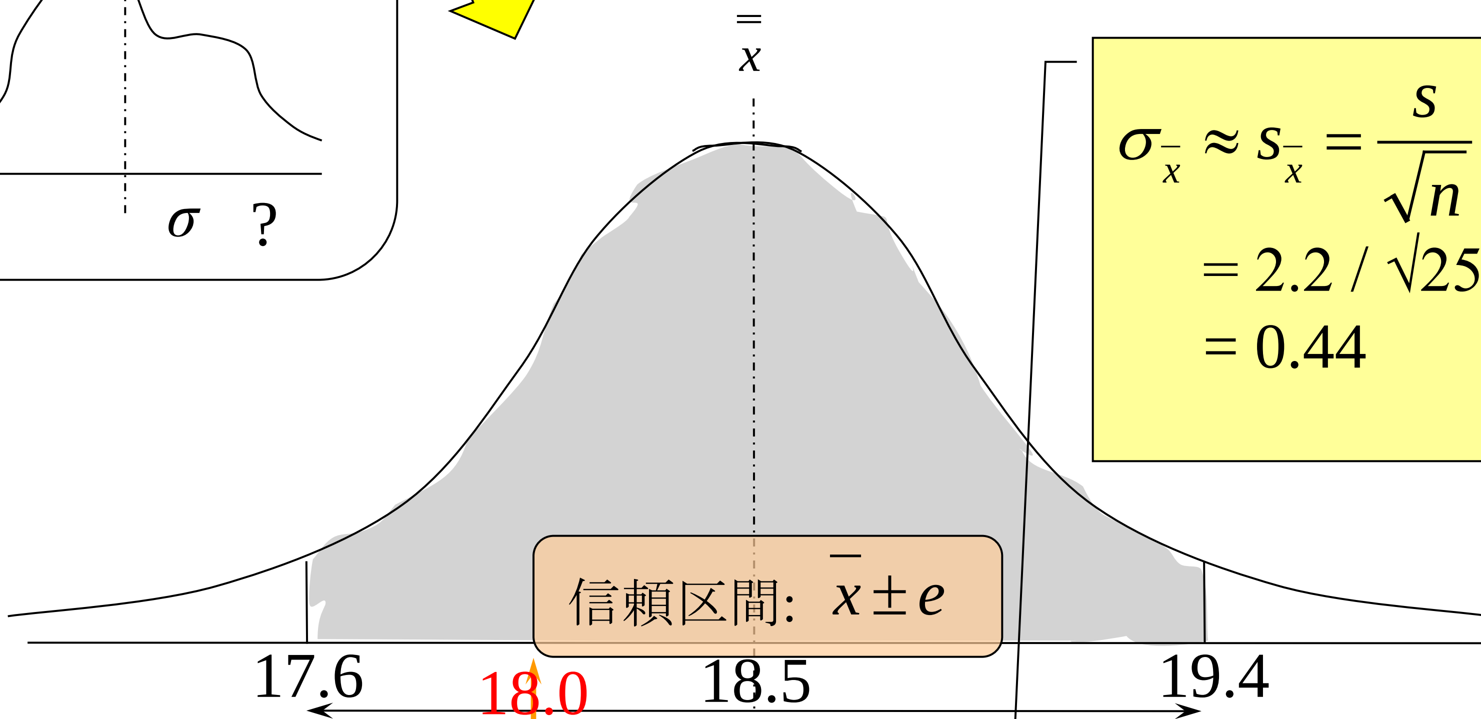
例1 (d): 推定の考え方

小標本法 (t分布を使用)



標本 $n = 25$, $\bar{x} = 18.5$, $s = 2.2$

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$= 2.2 / \sqrt{25}$$
$$= 0.44$$



信頼幅 $e = (z\text{または}t) \times \sigma_{\bar{x}} = 2.06 \times 0.44 = 0.90$

信頼確率 0.95 → $t = 2.064$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

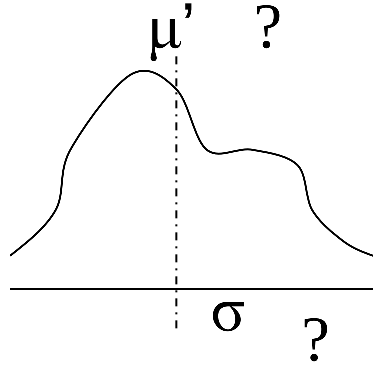
無添加母集団のμ= 18.0 はこの範囲内

∴添加物の効果がなくても、よくあることといえる

例1 (d): 検定の考え方

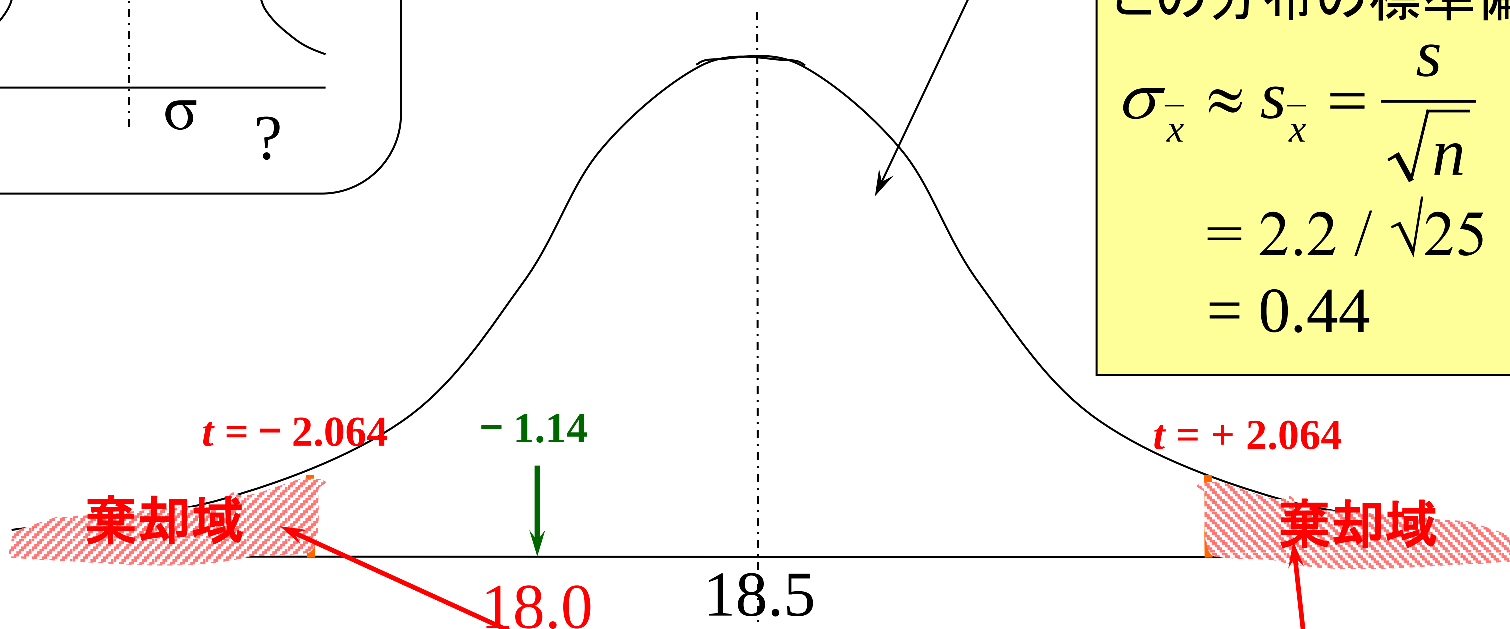
小標本法 (t分布を使用)

母集団



標本　$n = 25$

$\bar{x} = 18.5,\ s = 2.2$



この分布の標準偏差は…

$$\sigma_{\bar{x}} \approx s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.2 / \sqrt{25}$$

$$= 0.44$$

- 18.0 は添加剤車の値として珍しいか?
- 珍しいかどうかは、<u>**標準化**</u>した値で判断する

標準化: 平均値から標準偏差の何倍離れているか?

$$\frac{18.0-\bar{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{18.0-18.5}{0.44} = \frac{-0.5}{0.44} = \boxed{-1.14}$$

閾値のtと比較する

<u>信頼確率</u> 0.95　→ $t = 2.064$

自由度 $\nu = 25 - 1 = 24$

95%の信頼区間外 (18.0は区間内)

例1 (d): 検定の考え方

- 帰無仮説
  - H_0: 添加剤車の μ=18.0
    - (添加剤の効果はない)
- 対立仮説
  - H_1: 添加剤車の $\mu\neq$18.0
    - (添加剤の効果はある) [両側検定]
- 検定結果
  - $|t| = |-1.14| < t_0$ (有意確率0.95の t 値) = 2.064

帰無仮説と対立仮説

- 帰無仮説 H_0
  - 検定する仮説。結果が「有意」でなければ採択される。
  - 例)目だった差がない、薬品などの効果がない
- 対立仮説 H_1
  - 結果が「有意」のとき、採択される。
  - 例) 目だった差がある、薬品などの効果がある

※ H は hypothesis (仮説) の頭文字

教科書の例

- p.158～: 頭蓋骨の例
  - H_0: $\mu=190$
  - H_1: $\mu=196$
  - 二種類の過誤
- p.163～: 例1 (片側検定), 電球の寿命
  - H_0: $\mu=1180$
  - H_1: $\mu<1180$

2種類の過誤

		検定の結果	
		有意でない	有意
		H_0 を採択	H_1 を採択
真実(誰にもわからない)	H_0 が真	正しい (確率：$1-\alpha$)	第 1 種の過誤 (確率：α =有意水準)
	H_1 が真	第 2 種の過誤 (確率：β)	正しい (確率：$1-\beta$ =検出力)

(教科書p.159, 表1 に加筆)

- 第1種の過誤をしてしまう確率は α でコントロールできる
  - α: 有意確率 (“$1-\alpha$” は「推定」での信頼確率と同じ)
- 第2種の過誤の確率 β は神のみぞ知る
  - α を小さくしすぎなければ、β も大きくならないことがわかっている

第8章の問題の推奨問題

- 1節. 2種類の過誤: 1., 3.
- 2節. 平均値の検定: 6., 7., 9. , 13
- 4節. 正規分布による平均値の差の検定: 22., 24.
- 6節. 小標本法 - t検定: 33., 34., 35.
- 一般問題: 37

1節 1.
　被告を窃盗罪で審理する裁判の場合、2種類の過誤に当たるものは何か。
　社会的にみて、どちらの種類の過誤がより重要とみなされるか。

2種類の過誤: 教科書p.160～の頭蓋骨の例

帰無仮説　　　　対立仮説

H_0: μ=190　　　H_1: μ=196

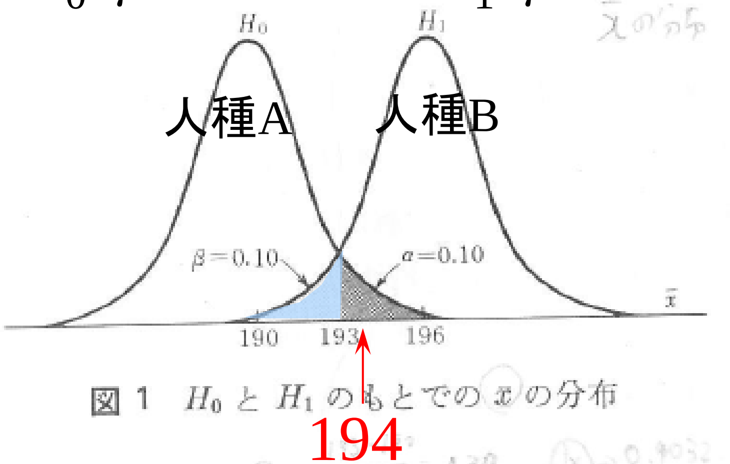
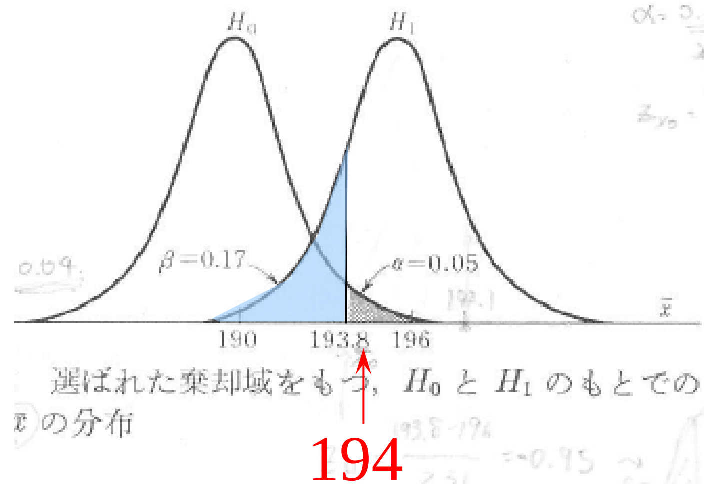


図 1　H_0 と H_1 のもとでの $\bar{x}$ の分布



選ばれた棄却域をもつ，H_0 と H_1 のもとでの $\bar{x}$ の分布

得られた標本の $\bar{x}$ =194だったらどう判断するか?

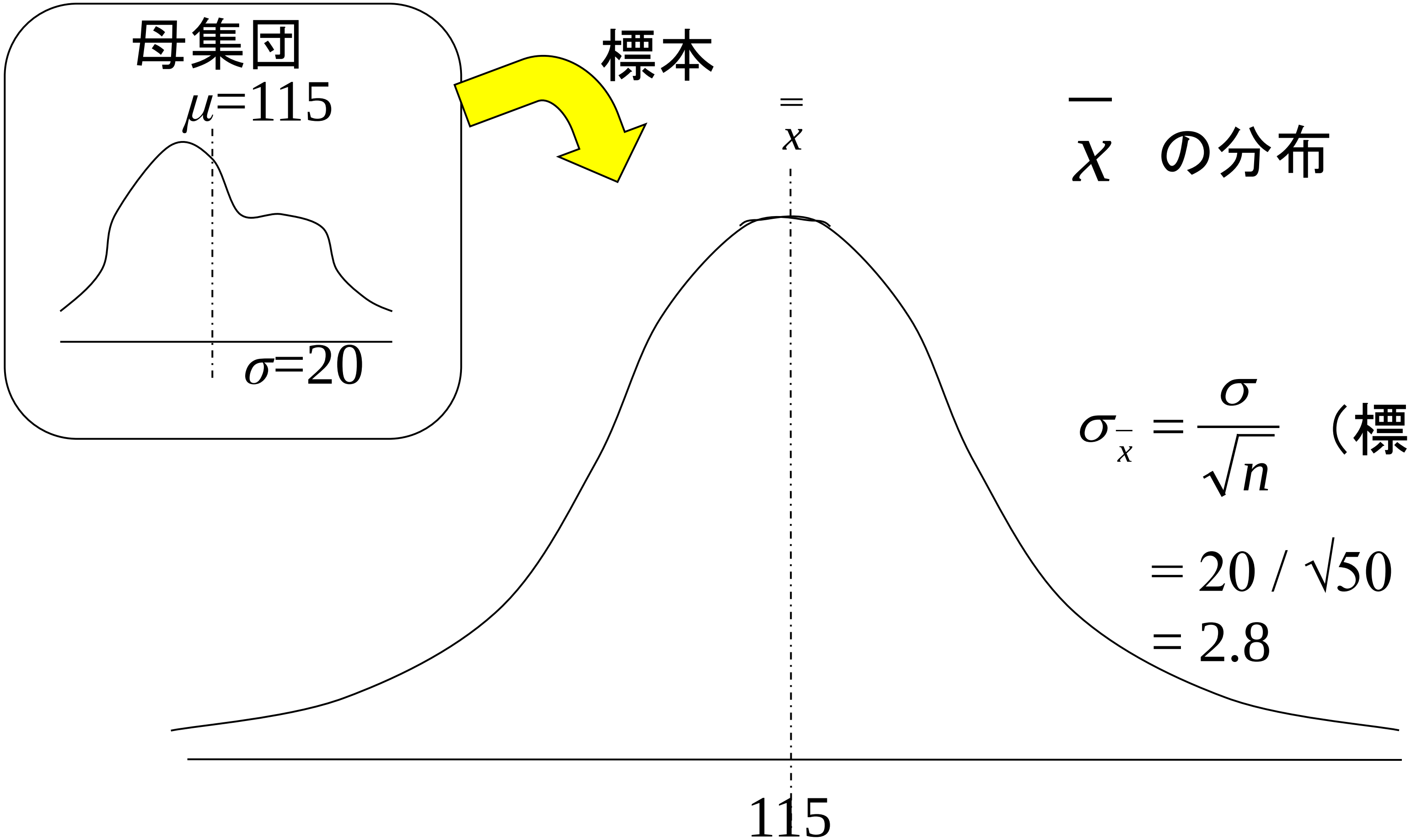
- 左: α = 0.10 としたとき、この例では β = 0.10
- 右: α をより小さく、0.05 とすると、β は0.17 と大きくなる
  - α と β はトレードオフの関係

教科書の例

- p.165～: 例2 (両側検定) 適性検査の点数
  - H_0: μ=115
  - H_1: $\mu \neq 115$
- 一般には両側検定の場合が多い
- 第1種の過誤α = 1 – 信頼確率
- α=0.05 (信頼確率=0.95) のとき、第2種の過誤βも小さくなることが経験的にわかっている

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118$, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ （標準誤差）

$= 20 / \sqrt{50}$

$= 2.8$

- μ=115、σ=20 の母集団からとられた n = 50 の標本の標本平均 x の分布は…
  - 平均値 115 (＝μ)
  - 標準偏差 2.8 (＝σ/√n [標準誤差]) の正規分布になる

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118$, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.96) より大きいか?

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu=115$
  - $H_1 : \mu\neq115$ [両側検定]
  - $\bar{x}=118,\ \sigma_{\bar{x}}=20/\sqrt{50}=2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?

「推定」の復習
・μ=115, σ=20 の母集団からの n = 50 の標本平均の信頼区間は?

復習

信頼区間の推定手法

母集団: 平均μ, 標準偏差σ

標本: 標本数 n, 標本平均 $\bar{x}$, 標本標準偏差 s

「推定」手法の判断

母集団は正規分布?

Yes

定理1: $\bar{x}$は正規分布 (z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No

nは大きい?
$n \geqq 25$?

Yes

定理2: σをsで代替可(z; 表IV)

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu,\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%信頼区間なら
$z = 1.96$

No

t分布: zでなくt (表V)を使う

$$\bar{x} \fallingdotseq \mu,\quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

t: 自由度$\nu=n$-1
により異なる
(zよりは大きい)

信頼区間: $\bar{x} \pm e$

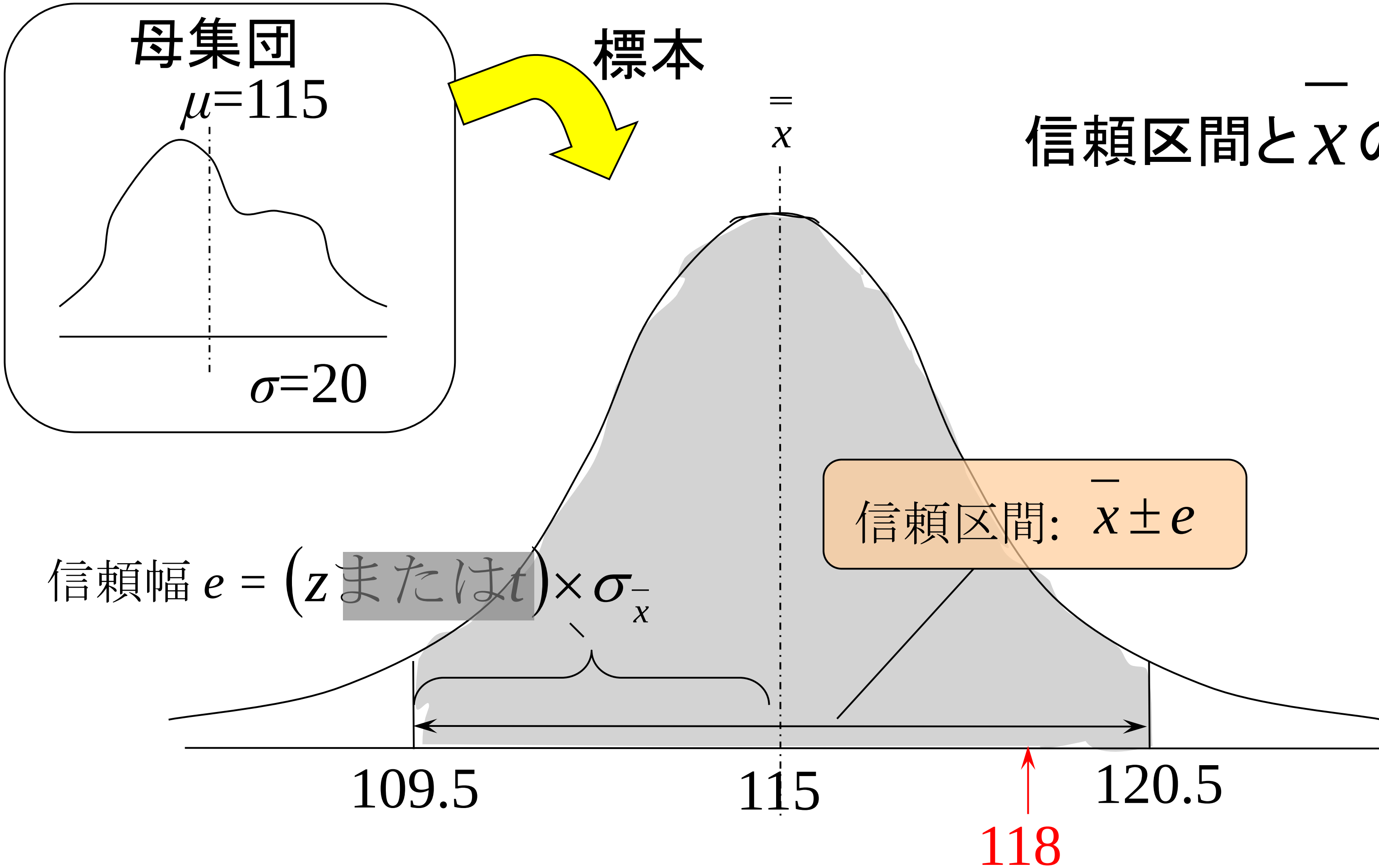
信頼幅 $e = (z$または$t) \times \sigma_{\bar{x}}$

z (またはt): 信頼確率により決まる

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118,\ \sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
  - α=0.05 とすると z =1.96(表IVから)
  - 信頼区間 115±1.96×2.8 = 115±5.5=109.5～120.5

信頼区間と$\bar{x}$の分布



- 標本(n=50)がμ=115, σ=20の母集団から採られたとしたら、その標本平均 $\bar{x}$ は95%の確率で109.5～120.5の間の値をとる。
- 実際の $\bar{x}$ は118 で信頼区間内

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点 μ=115 (σ=20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x} = 118$, $\sigma_{\bar{x}} = 20/\sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
  - α=0.05 とすると z =1.96（表IVから）
  - 信頼区間 115±1.96×2.8 = 115±5.5=109.5〜120.5
  - $\bar{x}$ =118は信頼区間内→めずらしいことではない
  - $H_0 : \mu = 115$ は棄却されない (有意ではない)
    - **新入生の平均点118 は これまでの学生の平均点115 と有意な差はない**

平均値(1つの平均)の検定

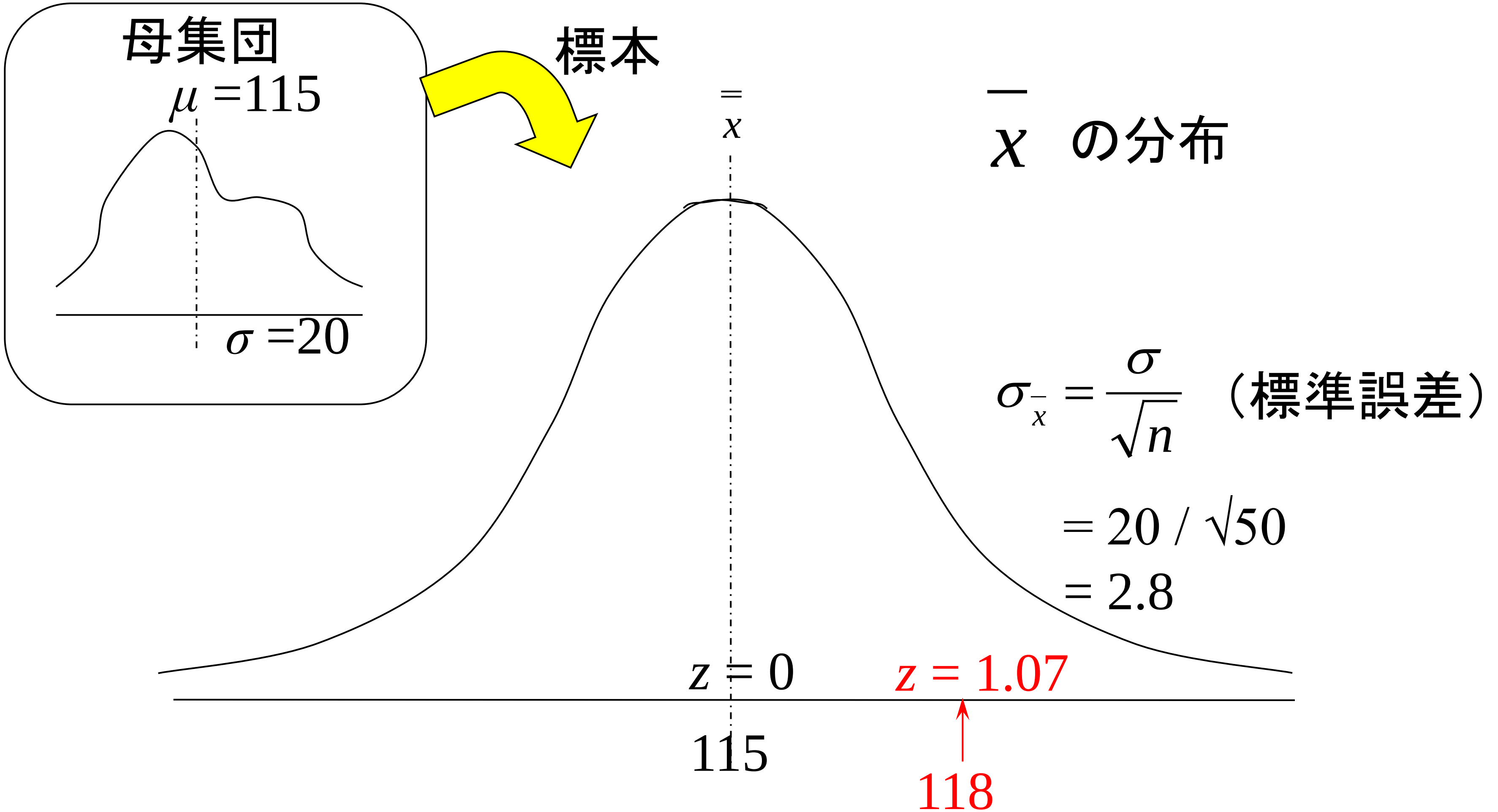
- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ = 115 (σ = 20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x}$=118, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法①: 信頼区間内に $\bar{x}$ があるか?
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値の z (1.96) より大きいか?

復習

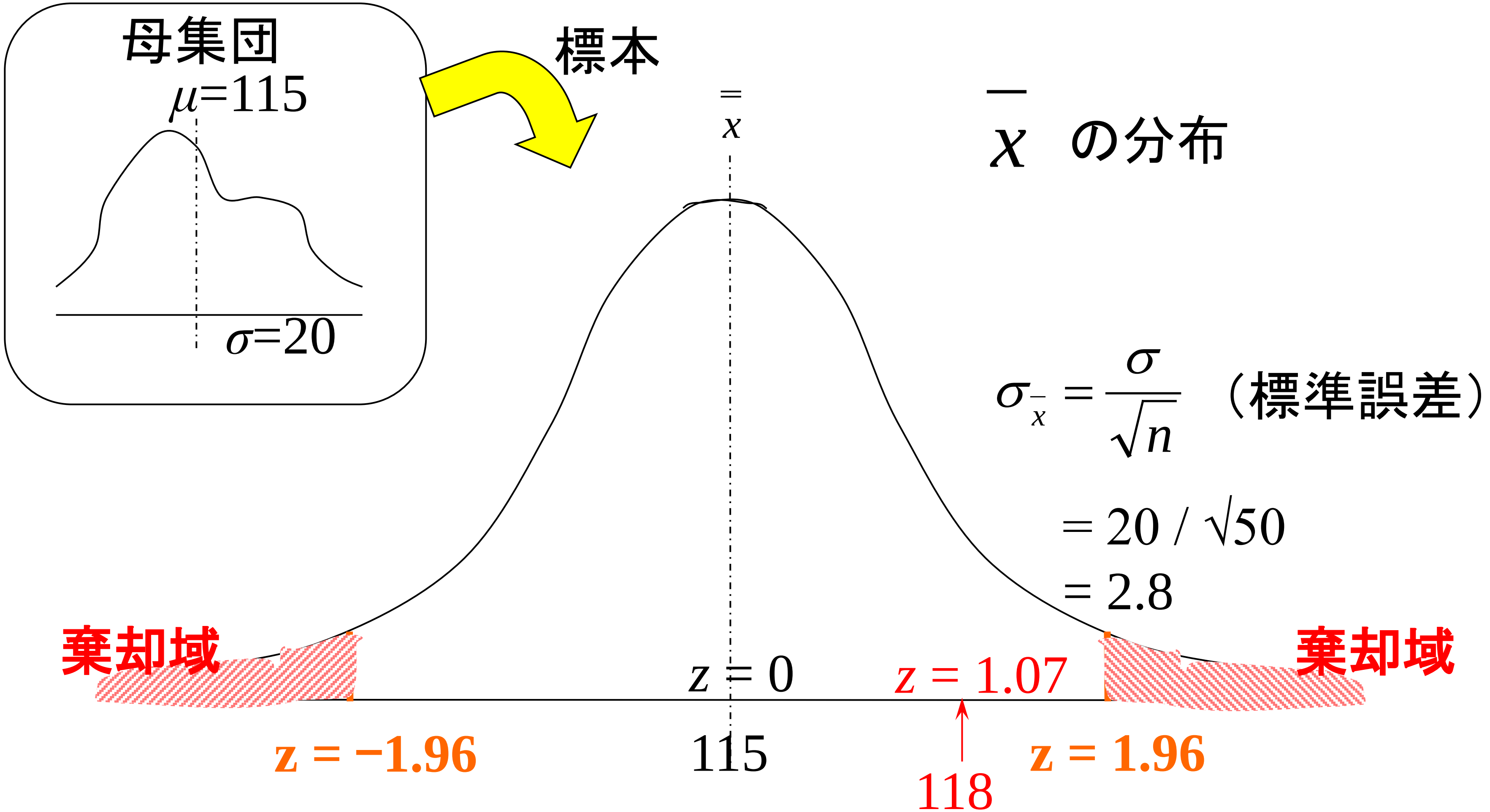
・σ=20 の母集団から採られた n = 50 の標本平均は118だった。
母平均115に対するz (118と115の標準化した差)は?

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ = 115 (σ = 20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x}$=118, $\sigma_{\bar{x}} = 20 / \sqrt{50} = 2.8$
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値の z (1.96) より大きいか?
  - 118を標準化すると $z' = (118 - 115) / 2.8 = 1.07$



- μ =115、σ =20 の母集団からとられた n = 50 の標本の標本平均 $\bar{x}$ の分布において…
  - 118 は 平均値の115から標準偏差の1.07倍離れている



- 118 は 平均値の115から標準偏差の1.07倍離れている
- α = 0.05 とすると z =1.96（表IVから）
- 118 はα = 0.05 の危険率による閾値内
  - 「1−α = 0.95 (95%)の信頼区間内」と意味は同じ

平均値(1つの平均)の検定

- 教科書 例2.(p.166)の適性検査の例で復習
- 新入生の平均点118 (n = 50) は、これまでの学生の平均点μ =115 (σ =20) と同じくらいといえるか?
  - $H_0 : \mu = 115$
  - $H_1 : \mu \neq 115$ [両側検定]
  - $\bar{x}$=118, $\sigma_{\bar{x}}$ = 20 /√50 = 2.8
- 方法②: $\bar{x}$ の z は閾値のz (1.96) より大きいか?
  - 118 を標準化すると z’= (118 – 115) / 2.8 = 1.07
  - α = 0.05 とすると z =1.96（表IVから）
  - |z’| < z なので→めずらしいことではない
  - $H_0 : \mu = 115$ は<u>棄却されない</u> (有意ではない)
    - 平均点 118 は 115 と有意な差はない

第8章の問題の推奨問題

- 1節. 2種類の過誤: 1., 3.
- 2節. 平均値の検定: 6., 7., 9. , 13
- 4節. 正規分布による平均値の差の検定: 22., 24.
- 6節. 小標本法 - t検定: 33., 34., 35.
- 一般問題: 37.

6. $\bar{x}=82, \sigma=16, n=100$; $H_0: \mu=86$

7. $\bar{x}=82, \sigma=16, n=25$; $H_0: \mu=86$

9. $H_0: \mu > 64$
$\bar{x}=68, \sigma=8, n=55$

次回の課題[課題5]の準備

- データを2組×2セット用意(検定するため)
  - 次回講義時間内にとりかかれるように

- 数は任意だが、
  - 正規分布を適用できる場合(n_1, $n_2 > 20$〜25)と
  - t 分布を使うべき場合(n_1, $n_2 < 20$〜25)と、
    1組ずつとする

25個程度ずつ
を1セット

10個程度ずつ
をもう1セット

n_1とn_2は同じでなくてもよい
（各セットでの2組のデータの個数は
違ってもよい）